UNIDAD 6 y 7: FUNCIONES Y FUNCIONES POLINÓMICAS

Contenido

1. INTRODUCCIÓN

Puntos y coordenadas

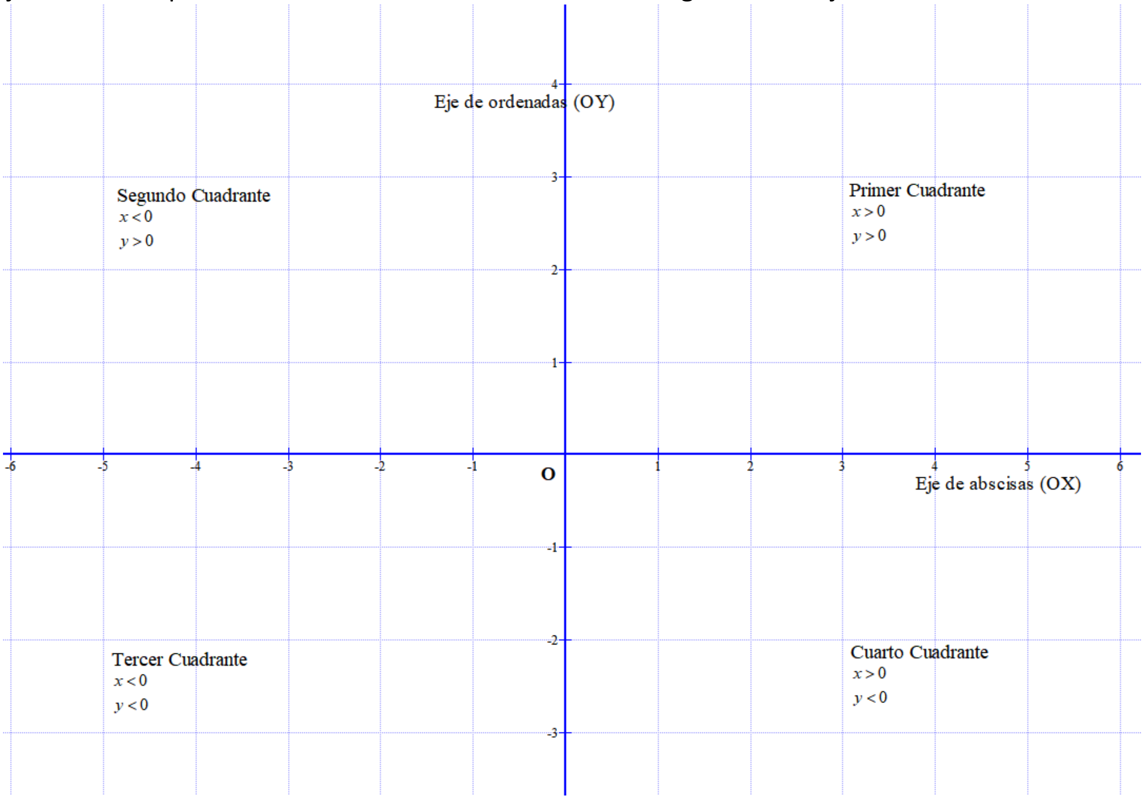
Para representar en el plano se toman dos rectas perpendiculares OX y OY, llamadas ejes de coordenadas. El eje OX se llama eje de abscisas y el eje OY eje de ordenadas. El punto O es el origen de coordenadas.

Cada uno de estos ejes se gradúa con números positivos y números negativos. De este modo, a cada punto P del plano le corresponde un par de números (x, y) que llamamos coordenadas del punto.

El 1er número o 1ª coordenada “ x ” corresponde al eje horizontal (abscisa).

El 2º número ó 2ª coordenada “ y ” corresponde al eje vertical (ordenada)

Estos dos ejes dividen al plano en 4 cuadrantes como vemos en el siguiente dibujo:



Ejercicio 1: Representar en el plano los siguientes puntos (1, 2), (-3,4), (2,-5), (-4, -3)

2. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Definición: Una función es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, x e y, tal que para cada valor de x le corresponde un único valor de y.

La magnitud cuyos valores se pueden elegir libremente se denomina variable independiente y se suele designar por la letra x.

La magnitud cuyos valores se obtienen por la relación funcional es la variable dependiente y se suele designar por la letra y.

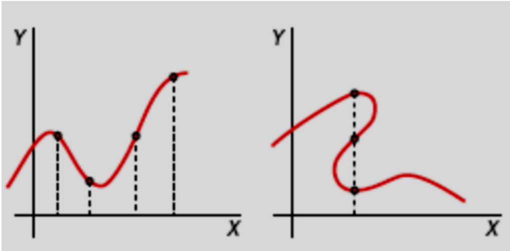
Una función, f, que asocia a cada valor de x un valor de y la representamos por $y = f(x)$.

Ejemplo: Una función es la relación $y = 5x^2 - 1$, expresa que la variable x depende de la variable y, por eso se llama a x variable independiente, y a y variable dependiente.

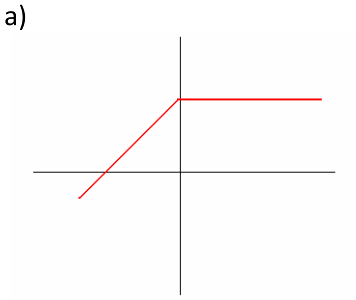
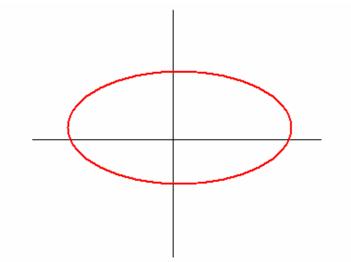
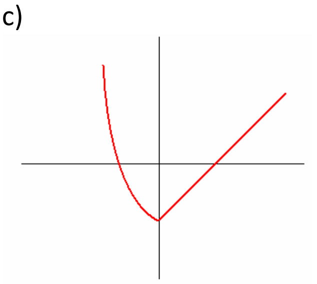
Para visualizar el comportamiento de una función, recurrimos a su representación gráfica: sobre unos ejes cartesianos, con sendas escalas, representamos las dos variables:
· La x sobre el eje horizontal o eje de abscisas.
· La y sobre el eje vertical o eje de ordenadas.
Cada punto de la gráfica tiene dos coordenadas, su abscisa, x , y su ordenada, y .

<u>Ejemplo</u>: La primera gráfica corresponde a una función: a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

La segunda gráfica no es de una función: hay valores de x que les corresponde más de un y.



<u>Ejercicio 2</u>: Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función.
Razona tu respuesta:

a)	b)	c)
		

Una función se nos puede dar o presentar de diferentes formas

- MEDIANTE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Como mejor se puede apreciar el comportamiento global de una función es mediante su representación gráfica. Por eso, siempre que pretendamos analizar una función, intentaremos representarla gráficamente, cualquiera que sea la forma en la cual, en principio, nos venga dada.

- MEDIANTE UN ENUNCIADO

Cuando una función viene dada por un enunciado o una descripción, la idea que nos podemos hacer de ella es, casi siempre, cuantitativamente poco precisa. Pero si el enunciado se acompaña con datos numéricos, la función puede quedar perfectamente determinada.

- MEDIANTE UNA TABLA DE VALORES

Con frecuencia se nos dan los datos de una función mediante una tabla de valores en la cual se obtienen directamente los datos buscados, aunque en otros casos, hay que efectuar complejos cálculos para obtener lo que se busca.

- MEDIANTE SU EXPRESIÓN ANALÍTICA O FÓRMULA

La expresión analítica es la forma más precisa y operativa de dar una función. Pero requiere un minucioso estudio posterior.

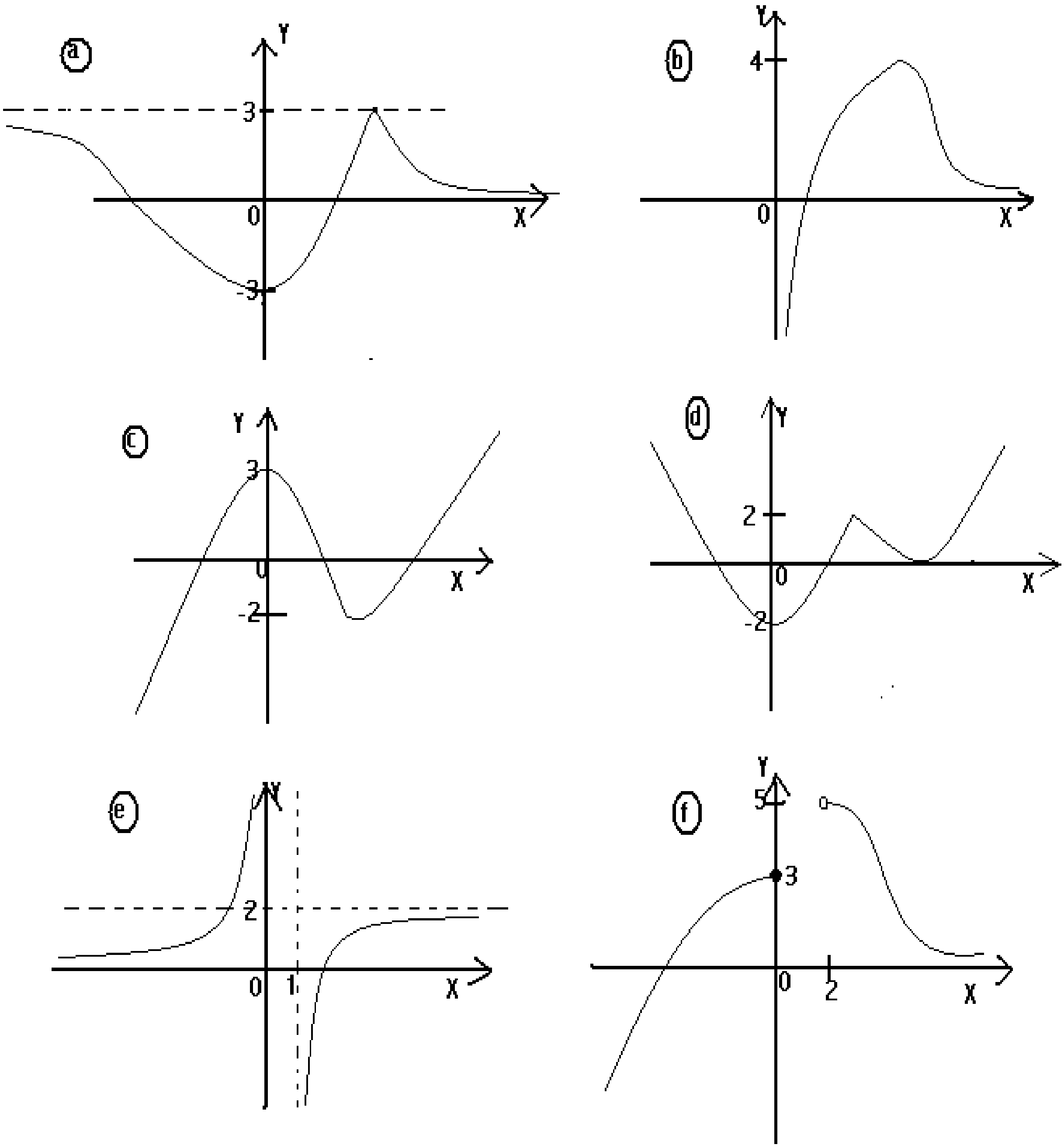
Definición: Se llama dominio de definición o simplemente dominio de una función f , y se designa por $Dom(f)$, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función, es decir, para los cuales hay un $f(x)$.

El dominio se encuentra en el eje de abscisas o eje OX

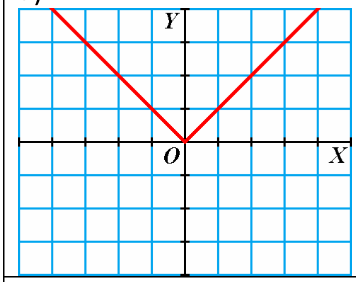
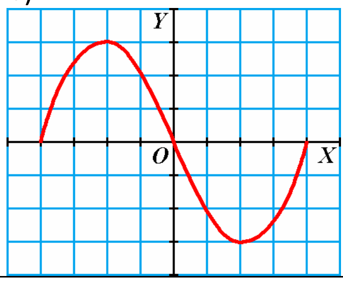
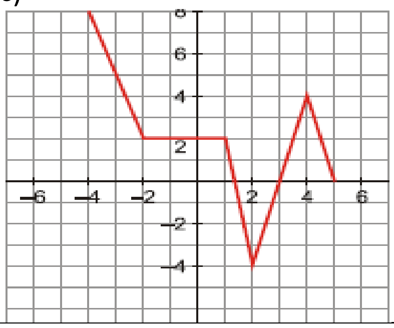
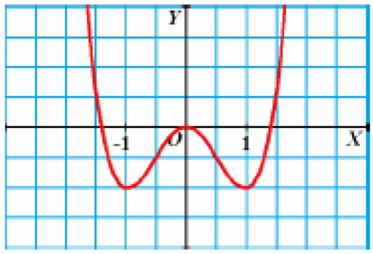
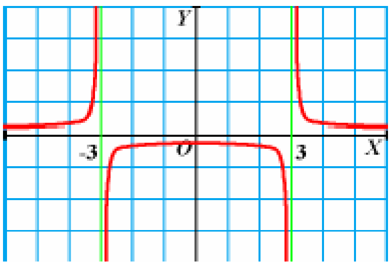
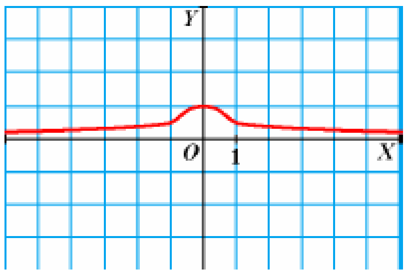
Definición: La imagen o recorrido de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente y (variable que se deduce de la variable independiente). Se representa por $\mathrm{Im}(f)$ o por $\mathrm{Recorr}(f)$.

La imagen se encuentra en el eje de ordenadas o eje OY

Ejercicio 3: Indica el dominio y la imagen de cada una de las siguientes funciones dadas por su representación gráfica:



Ejercicio 4: Halla el dominio y la imagen de las funciones cuya gráfica se representa a continuación:

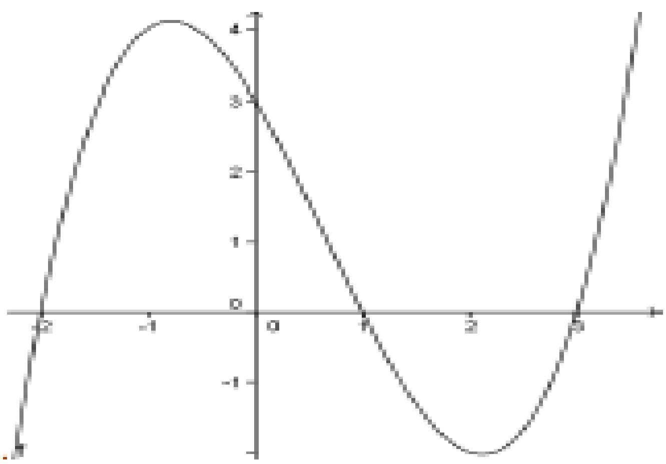
a) 	b) 
c) 	d) 
e) 	f) 

PUNTOS DE CORTE DE UNA FUNCIÓN CON LOS EJES DE COORDENADAS

Son los puntos de intersección de la función con los ejes:

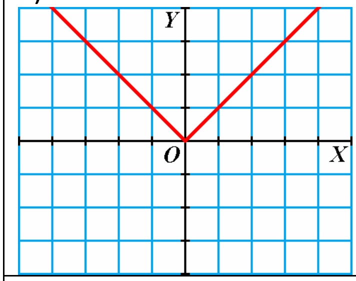
- Con el eje de abscisas (eje OX) son de la forma $(x,0)$, donde el valor x se calcula resolviendo la ecuación $f(x)=0$ o bien si tenemos la gráfica mirar los puntos que pasan por el eje horizontal (OX).
- Con el eje de ordenadas (eje OY) son de la forma $(0,y)$ donde y se obtiene hallando $f(0)$ o bien si tenemos la gráfica ver el punto que pasa por el eje vertical (OY).

Ejemplo: La función siguiente tiene los puntos de corte con el eje de abscisas son: A(- 2,0) B(1,0) C(3,0); y con el eje de ordenadas: D(0,3) como se puede observar en su gráfica .

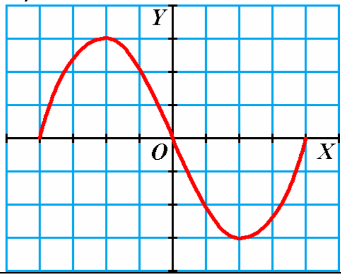


Ejercicio 5: Calcula los puntos de corte de las siguientes funciones con los ejes:

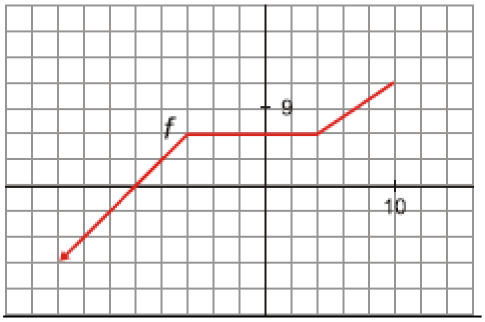
a)



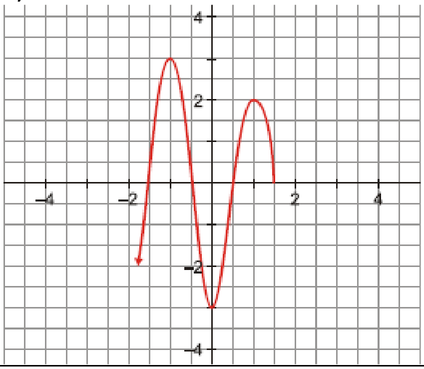
b)



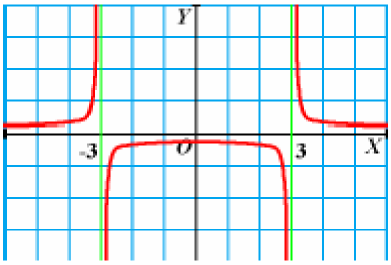
c)



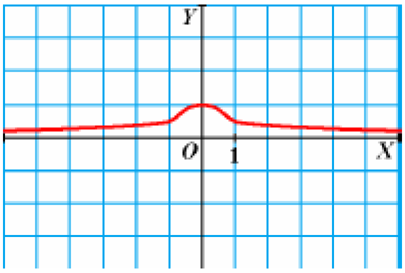
d)



e)

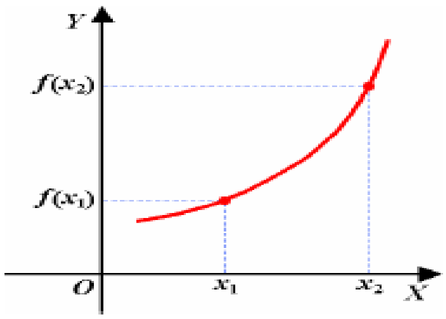


f)



3. CRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

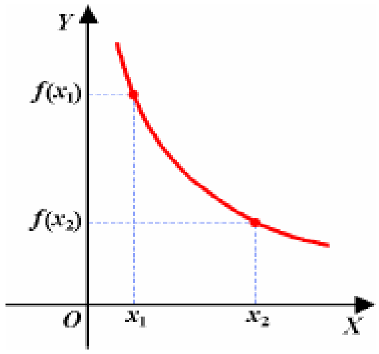
Una función $y = f(x)$ es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente aumenta también la variable dependiente, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$



Función creciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

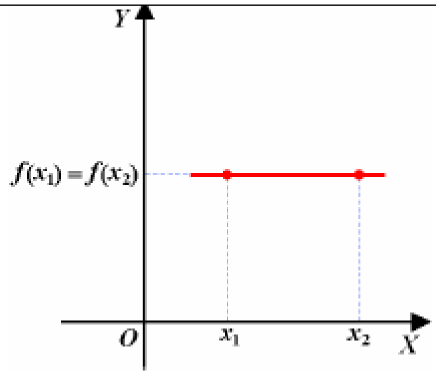
Una función $y = f(x)$ es **decreciente** cuando al aumentar la variable independiente disminuye la variable dependiente, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$



Función decreciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Una función $y = f(x)$ es **constante** cuando al aumentar la variable independiente, la variable dependiente no varía, es decir, si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) = f(x_2)$

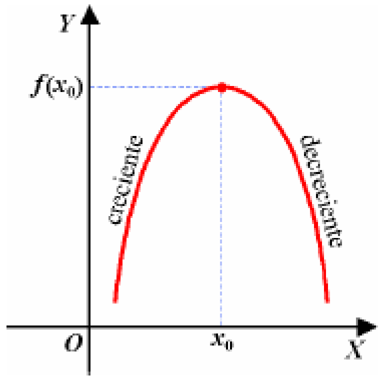


Función constante

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

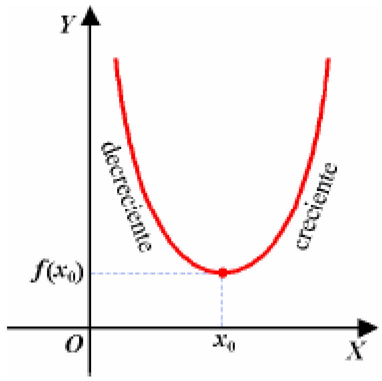
EXTREMOS. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Una función $y = f(x)$ tiene un **máximo relativo** en un punto $x = x_0$ si, en valores próximos a él, a la izquierda de ese punto la función es creciente y a la derecha de ese punto la función es decreciente; esto es, si los valores próximos a él que toma la función son menores.



Máximo en $x = x_0$

El punto x_0 tiene mayor ordenada, $f(x_0)$, que los demás

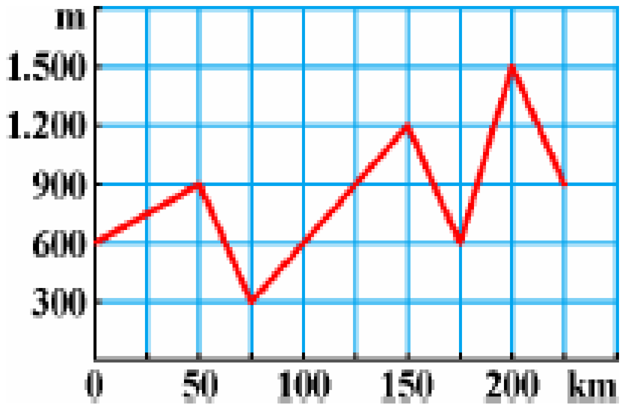
<table>
<tr>
<td>Una función $y = f(x)$ tiene un <u>mínimo relativo</u> en un punto $x = x_0$ si, en valores próximos a él, a la izquierda de ese punto la función es decreciente y a la derecha de ese punto la función es creciente; esto es, si los valores próximos a él que toma la función son mayores.</td>
<td>

Mínimo en $x = x_0$
El punto x_0 tiene menor ordenada, $f(x_0)$, que los demás</td>
</tr>
</table>

No obstante, una función puede presentar varios máximos y mínimos. Para distinguirlos, definimos los siguientes conceptos asociados.

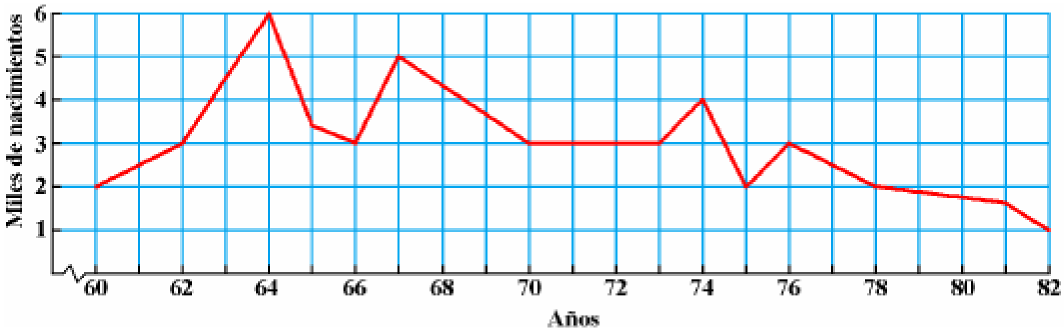
- Una función $y = f(x)$ tiene un máximo (mínimo) absoluto en un punto $x = x_0$ si los valores que toma la función son todos menores (mayores) que su imagen $f(x_0)$.
- Una función $y = f(x)$ tiene un máximo (mínimo) relativo en un punto $x = x_0$ si los valores próximos a él que toma la función son todos menores (mayores) que su imagen $f(x_0)$.

<u>Ejemplo</u>: A partir de la siguiente gráfica (muestra el perfil de una etapa de la Vuelta Ciclista a España) estudia el crecimiento y decrecimiento de la función y los máximos y mínimos.



- La función es creciente en los intervalos [0, 50), (75, 150) y (175, 200).
- La función es decreciente en los intervalos (50, 75), (150, 175) y (200, 225].
- Presenta un máximo absoluto en x = 200 (1.500 m es la altitud máxima) y un mínimo absoluto en x = 75 (300 m es la altitud mínima).
- Los máximos relativos los alcanza en los puntos x = 50 (900 m de altitud) y x = 150 (1.200 m de altitud).
- Los mínimos relativos los alcanza en los puntos x = 0 (600 m de altitud), x = 175 (600 m de altitud) y x = 225 (900 m de altitud).

<u>Ejercicio 6</u>: La gráfica siguiente expresa la evolución del número de nacimientos en una ciudad de España.

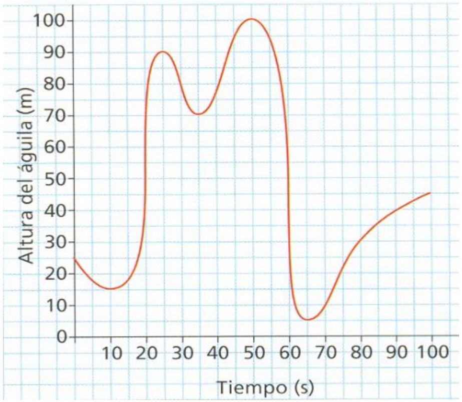


a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del índice de natalidad.
b) ¿En qué período de tiempo permanece constante la natalidad?
c) ¿En qué años se ha conseguido el mayor número de nacimientos? Indica los máximos y mínimos de esta función.

Ejercicio 7: La gráfica siguiente muestra como varía la profundidad del agua en un puerto durante un día cualquiera.

a) ¿A qué horas aumenta la profundidad? ¿Y a qué horas disminuye?
b) ¿A qué hora se produce la profundidad máxima? ¿Y la mínima?
c) Fíjate que de 13 a 20 horas la profundidad aumenta (crece la marea). ¿Aumenta igual de rápido durante todo ese periodo de tiempo?

Ejercicio 8: La gráfica siguiente muestra la altura en metros del vuelo de un águila en función del tiempo:



a) A los 15 s, el águila ¿asciende o desciende?

b) ¿En qué intervalos de tiempo el vuelo es ascendente? ¿En cuáles es descendente?

c) ¿En qué instante alcanza la mínima altura?

d) ¿En qué instante o instantes está el águila a 60m del suelo?

e) ¿Se posa el águila en tierra en algún instante?

4. FUNCIONES POLINÓMICAS

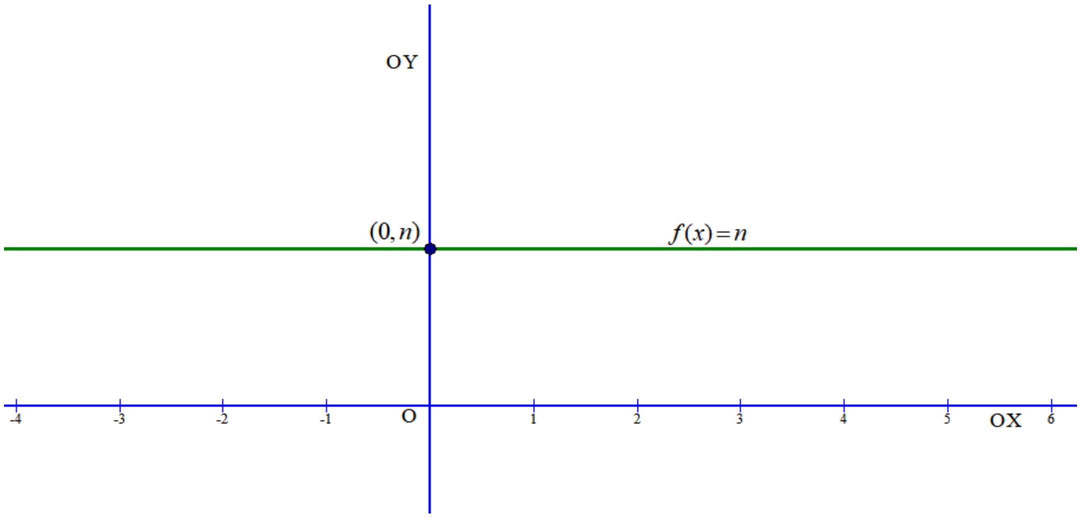
Una **función polinómica** es aquella función que tiene por expresión algebraica un polinomio, es decir, es de la forma $y = P(x)$ donde $P(x)$ es un polinomio.
El dominio de las funciones polinómicas es todo $\mathbb{R}$, es decir, $Dom(y) = \mathbb{R}$
Veamos ejemplo de funciones polinómicas:

- $f(x) = 2$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 0
- $g(x) = 2x + 1$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 1
- $y = x^2 - 4x + 3$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 2
- $h(x) = x^3 - 8$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 3
- $y = x^4 - x^2$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 4

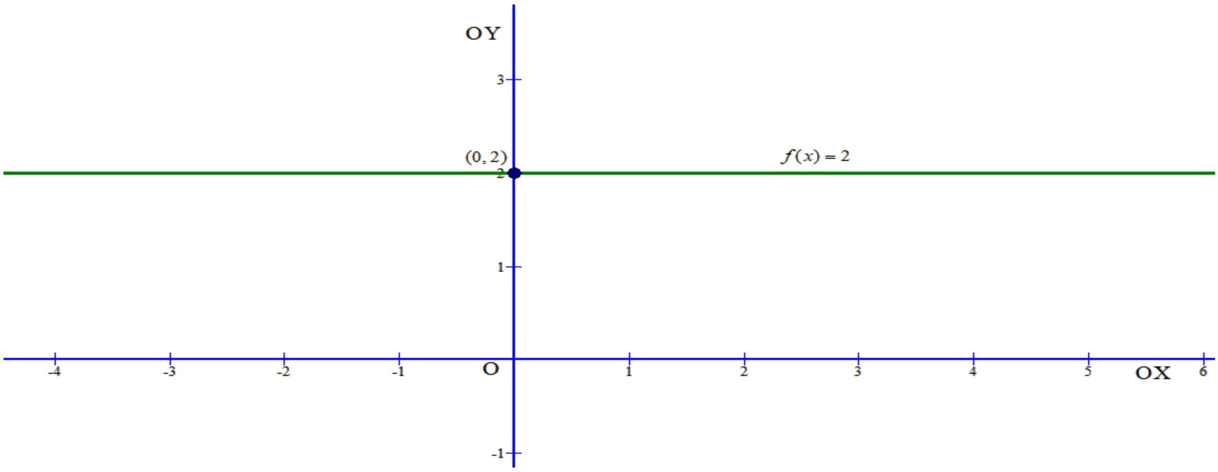
Nosotros vamos a estudiar sólo las de grado 0, 1 y 2.

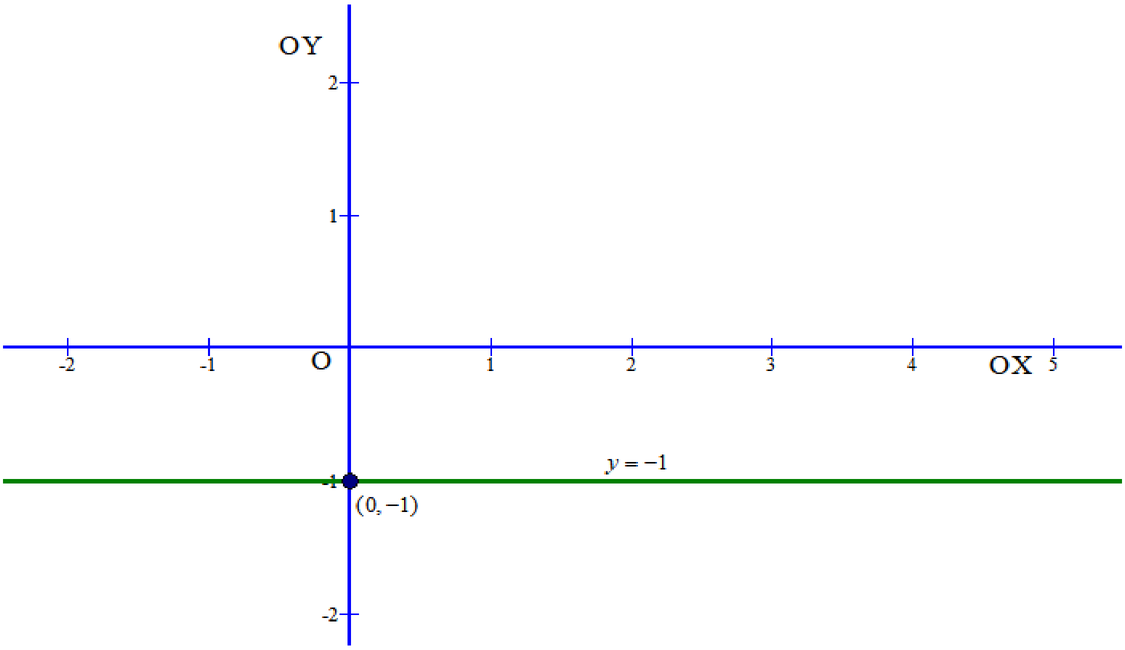
5. FUNCIONES POLINÓMICAS CONSTANTES Y DE PRIMER GRADO

Las **funciones constantes** son aquellas de la forma $f(x)=n$. Su gráfica es una recta paralela el eje OX que pasa por en punto $(0,n)$ como se puede ver en el gráfico adjunto



Ejemplo: Las funciones constantes $f(x)=2$ y $y=-1$ tienen las siguientes gráficas:

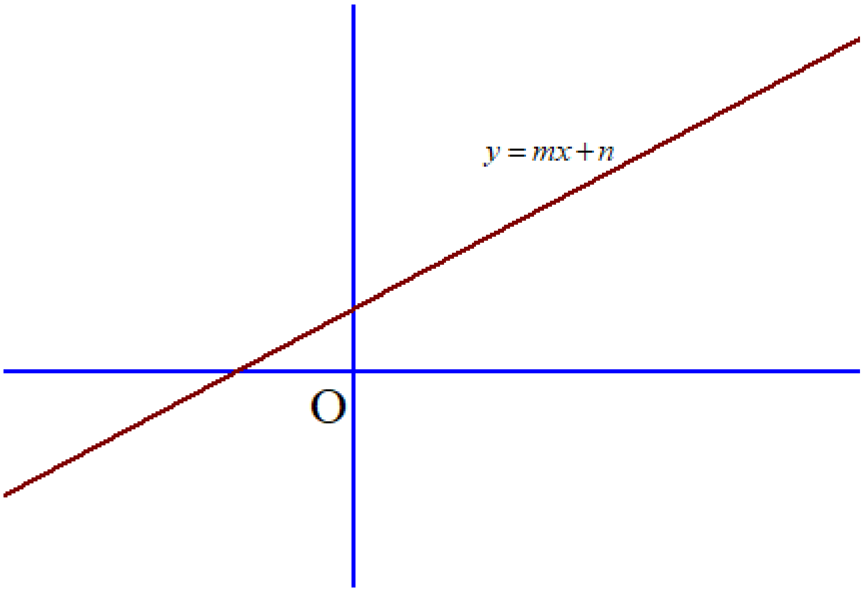




Ejercicio 9: Representa gráficamente las siguientes funciones constantes:

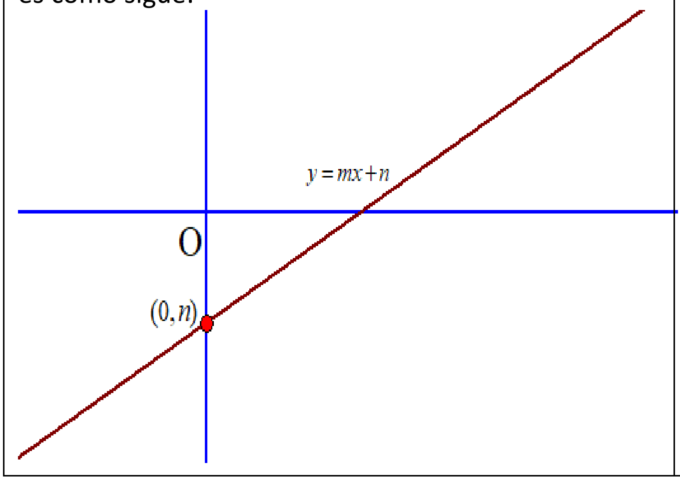
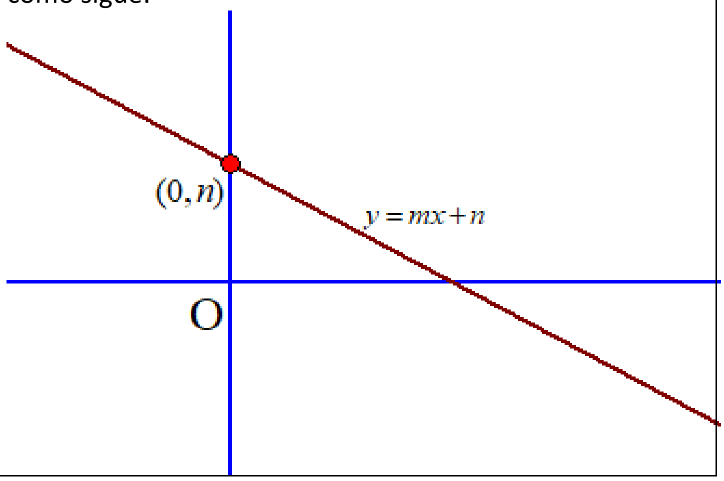
a) $y=3$ b) $f(x)=0$ c) $f(x)=-\dfrac{1}{2}$

Las **funciones polinómicas de primer grado**, también llamadas **funciones afines**, son aquellas cuya ecuación es del tipo $f\left(x\right)=mx+n$. Su representación gráfica es una recta en el plano.



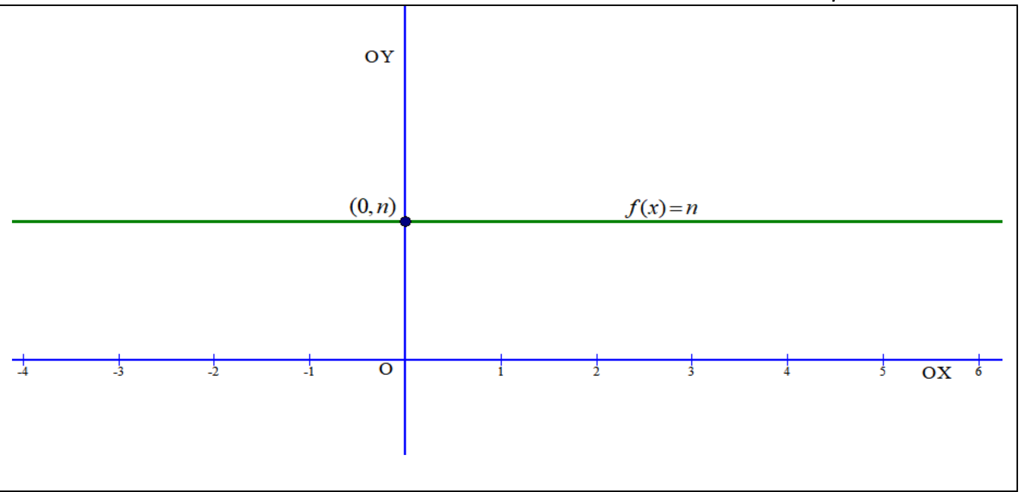
A m se le conoce como **pendiente** de la recta y a n como **ordenada en el origen**.
Como características tenemos:

- Su dominio es todo $\mathbb{R}$
- Pasa por el punto $(0,n)$
- Si $m>0$, es decir, positiva, la gráfica es creciente
- Si $m<0$, es decir, negativa, la gráfica es decreciente

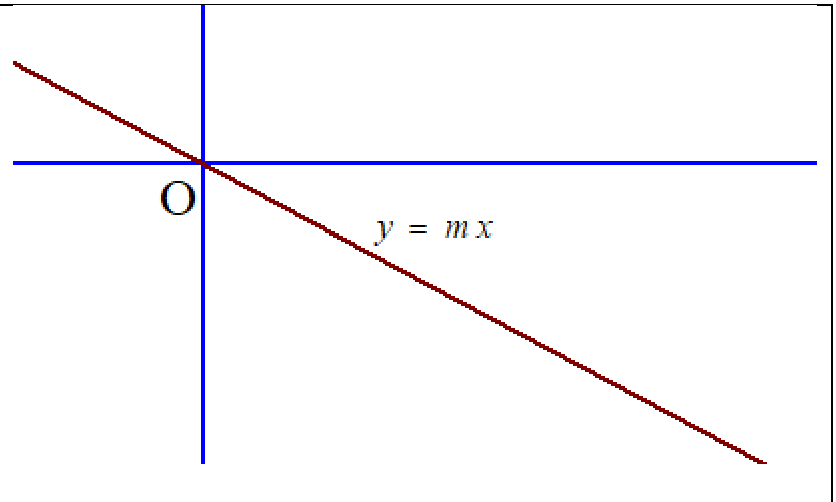
Si $m>0$, es decir, positiva, la gráfica es creciente y es como sigue: 	Si $m<0$, es decir, negativa, la gráfica es decreciente yes como sigue: 

Dentro de las funciones afines podemos distinguir dos casos especiales para una función afín $y=mx+n$:

· Si $m=0$, la función $y=n$ se denomina función constante como ya hemos visto anteriormente. Su gráfica es una recta paralela al eje OX , que pasa por el punto $(0,n)$.



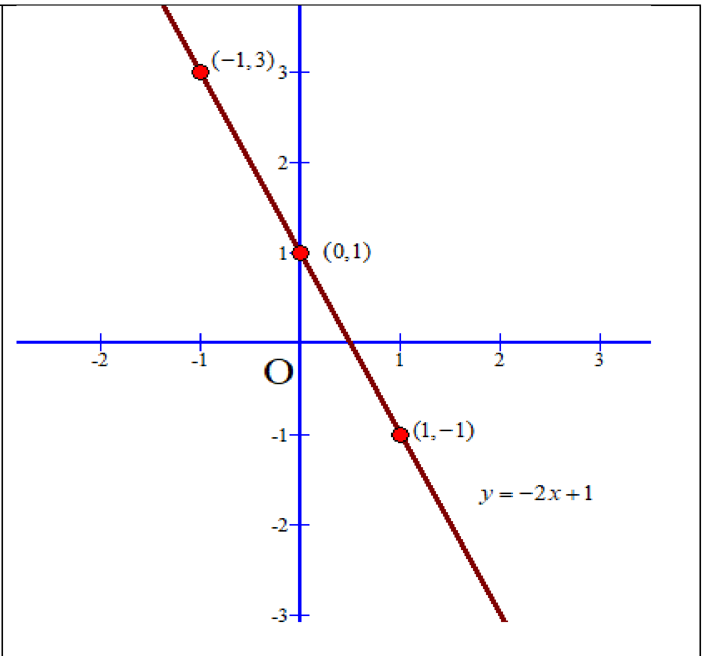
· Si $n=0$, la función $y=mx$ se denomina función lineal y su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el origen de coordenadas $(0,0)$



Para representar este tipo de funciones simplemente hemos de usar una tabla de valores para conocer distintos puntos por donde pasa.

<u>Ejemplo</u>: Vamos a representar gráficamente la función $y=-2x+1$, para ello hacemos una tabla de valores previamente. Ya sabemos que pasa por el punto $(0,1)$ y que es decreciente.

x	y
1	-1
-1	3
0	1



<u>Ejercicio 10</u>: Representa gráficamente las funciones afines siguientes;

a) $y=2x-1$ b) $y=-x+3$ c) $f(x)=2x$

d) $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$ e) $f(x)=-x$ f) $y=x$

g) $f(x)=3x-5$

<u>Ejercicio 11</u>: Ismael va a la frutería y compra plátanos a 1.50 €/Kg. Pero también compra un melón que le cuesta 2 €. Completa la tabla de la compra realizada en la frutería en función de la cantidad de plátanos que compra y da la expresión algebraica de la función coste.

Nº Kg de plátanos	0	1	2	3	5
Coste total					

<u>Ejercicio 12</u>: Calcula los puntos de corte de las siguientes rectas con los ejes coordenadas:

a) $y=2x-6$ b) $y=-x+5$ c) $f(x)=2x$

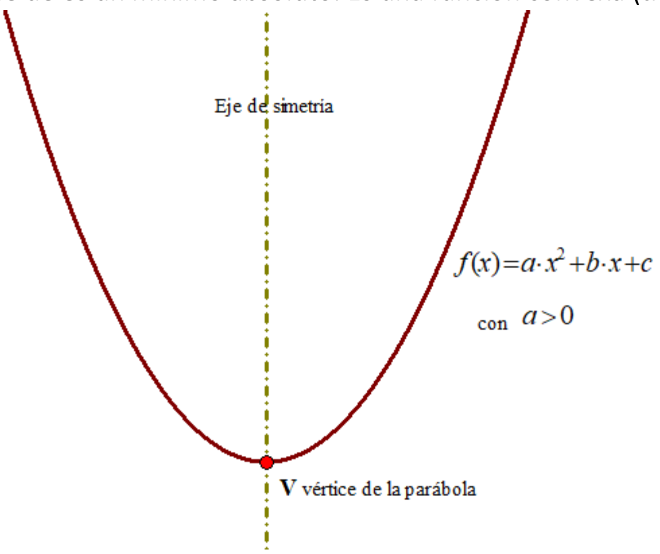
d) $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$

6. FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO (funciones cuadráticas)

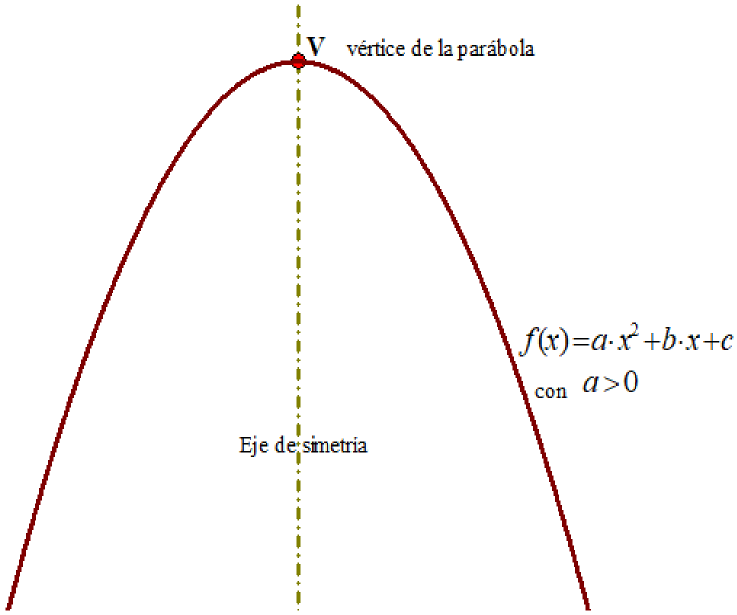
Las funciones polinómicas de segundo grado, también llamadas funciones cuadráticas son aquellas cuya ecuación es del tipo: $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ con $a\neq 0$

Algunas de sus características principales son:

- Su dominio es todo $\mathbb{R}$
- Su gráfica es una parábola, simétrica respecto a eje de simetría que pasa por su vértice.
- Si $a>0$ 0 el vértice de es un mínimo absoluto. Es una función convexa (tiene forma de $\bigcup$)



- Si $a<0$ el vértice es un máximo absoluto. Es una función cóncava (tiene forma de $\bigcap$)

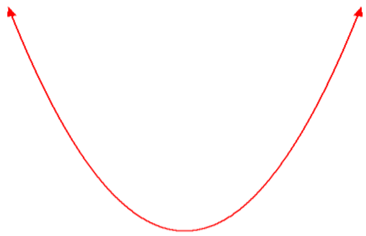


- El vértice de la parábola es $V=\left(\frac{-b}{2a},-\frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}\right)$

Vamos a realizar el proceso de representar una parábola y para ello hay que seguir una serie de pasos que vamos a ver mediante un ejemplo:

Ejemplo: Representa gráficamente la parábola $y=x^2-5x+4$
Vamos a ir viendo paso a paso las características de la parábola

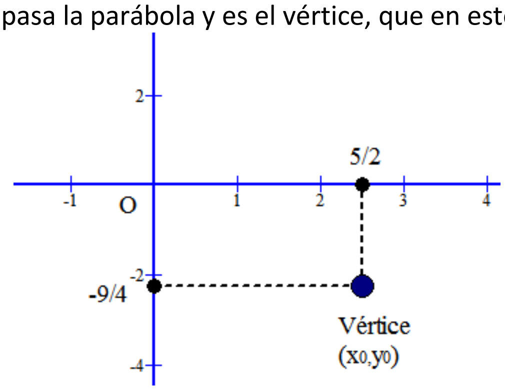
- Curvatura: En este caso tenemos que $a=1$, luego la parábola es convexa



- Vértice: Lo calculamos con $V=\left(\frac{-b}{2a},-\frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}\right)$, teniendo en cuenta que $a=1,\ b=-5$ y $c=4$

  $V=\left(\frac{-(-5)}{2\cdot 1},-\frac{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4}{4\cdot 1}\right)\Rightarrow V=\left(\frac{5}{2},-\frac{9}{4}\right)$

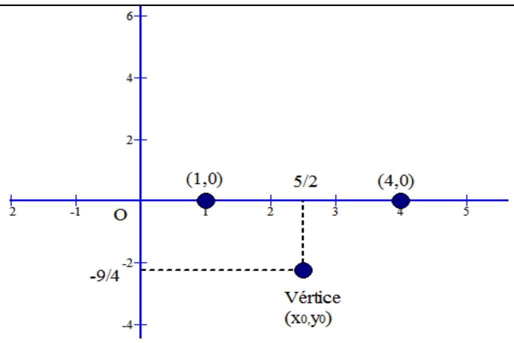
  Ya tenemos un punto por donde pasa la parábola y es el vértice, que en este caso es el mínimo absoluto



Cortes eje OX:

Resolvemos $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow$

$x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$ Por tanto, los puntos de corte son: $(1,0)$ y $(4,0)$



Corte eje OY:

Como sabemos el punto es $(0,c) = (0,4)$

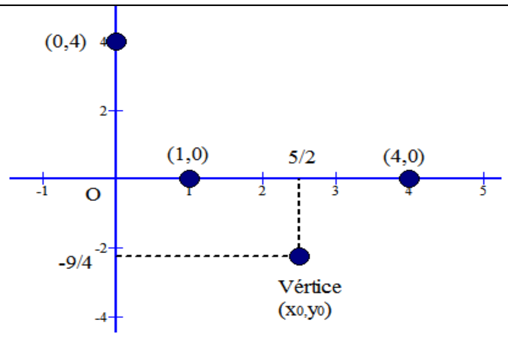
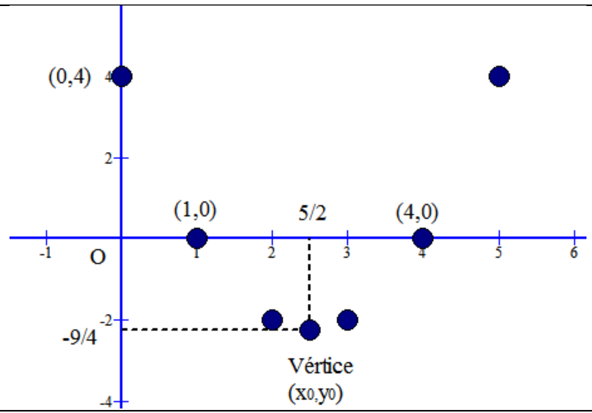
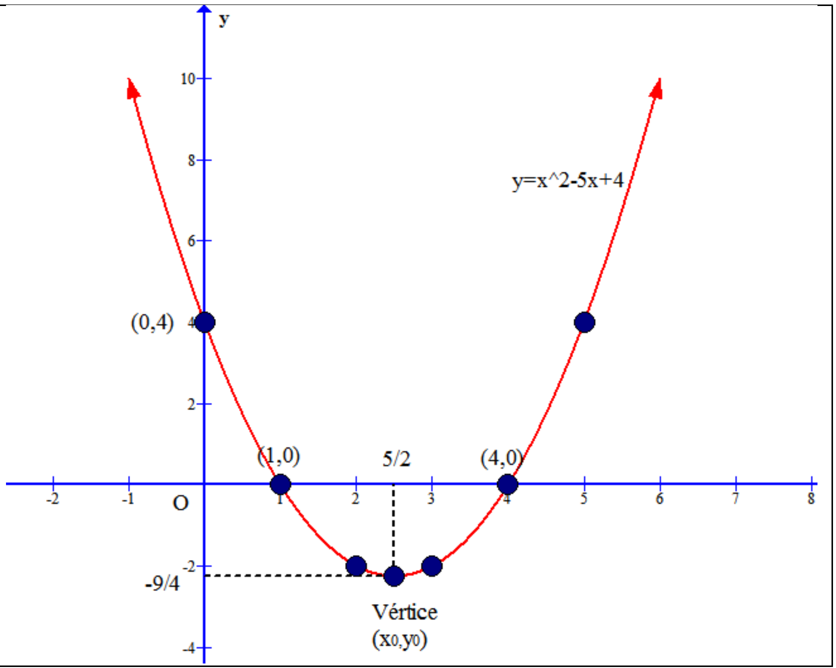


Tabla de valores: En este caso damos pocos valores, pues tenemos suficiente información para dibujarla ya:

x	2	3	5
y	-2	-2	4



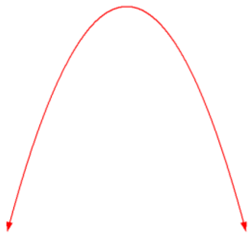
Ya procedemos al dibujarla y nos resulta:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\operatorname{Re}corr(f)=\left[-\frac{9}{4},+\infty\right)$

<u>Ejemplo</u>: Representa gráficamente la parábola $y=-2x^2-1$

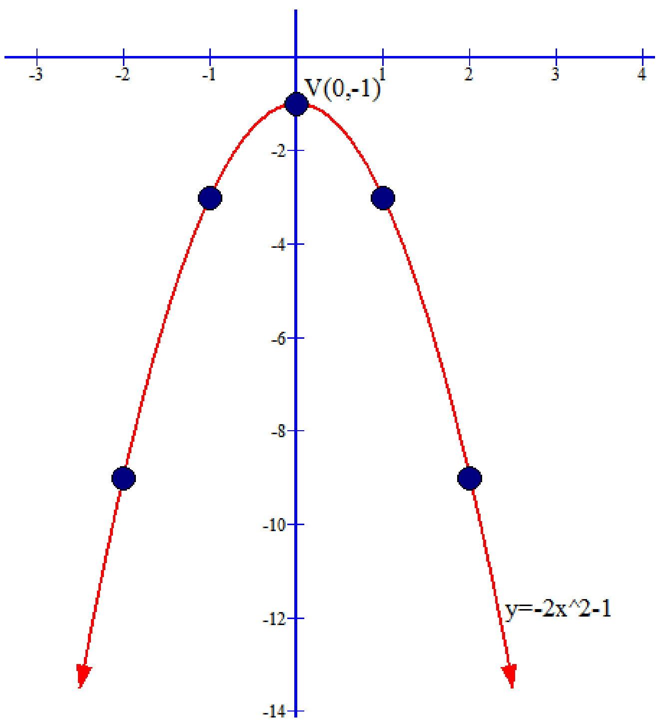
- <u>Curvatura</u>: En este caso tenemos que $a=-2$, luego la parábola es cóncava



- <u>Vértice</u>: $x_0=\frac{-0}{2\cdot(-2)}=0$ → $y_0=-1$. Luego $V(0,-1)$
- <u>Corte eje OX</u>: Resolvemos $\begin{cases} y=-2x^2-1 \\ y=0 \end{cases}$ → $-2x^2-1=0$ → No existen soluciones, no hay cortes
- <u>Corte eje OY</u>: Como sabemos el punto es $(0,c)=(0,-1)$. Coincide con el vértice
- <u>Tabla de valores</u>:

x	1	-1	2	-2	3	-3
y	-3	-3	-9	-9	-19	-19

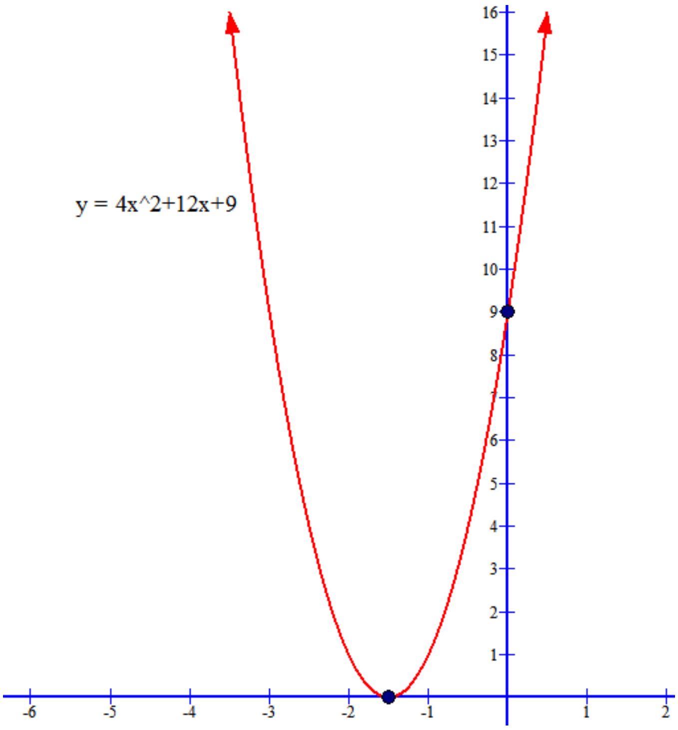
Con los datos anteriores nos debe salir la siguiente gráfica:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -1]$

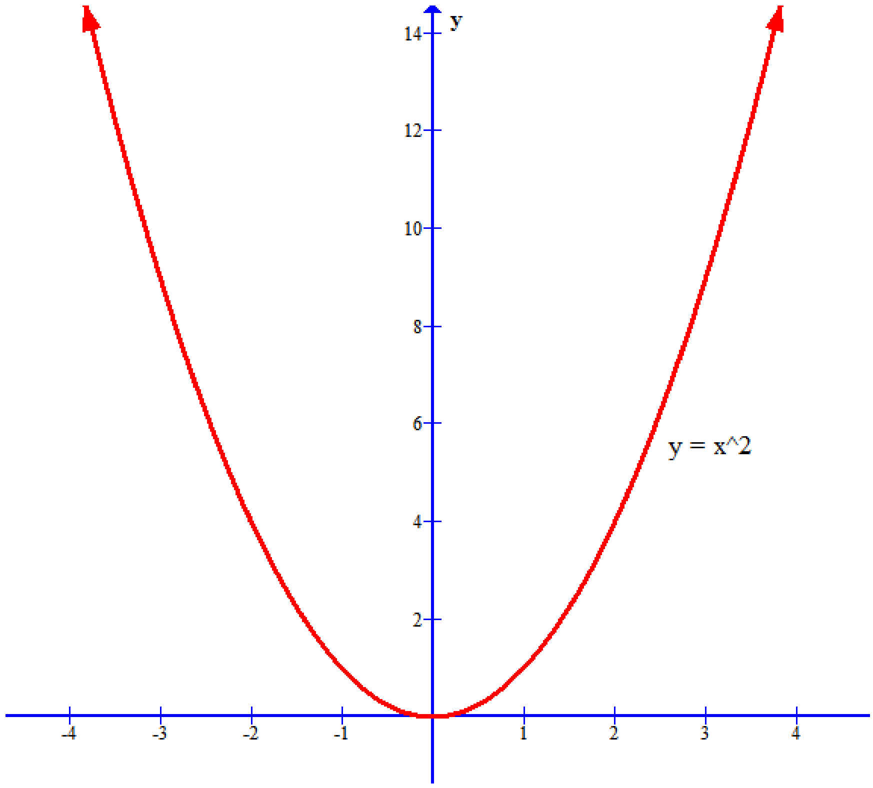
<u>Ejemplo</u>: Lo mismo para $y = 4x^2 + 12x + 9$

Este ejemplo os lo dejo a vosotros el estudio detallado, pero resulta que es convexa, tiene vértice en $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$, que coincide con el único punto de corte con OX y el punto de corte con OY es $(0,9)$. La gráfica es:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\mathrm{Re}\,corr(f) = [0, +\infty)$

<u>NOTA</u>: Hay una parábola especial conocida como parábola canónica que es $f(x) = x^2$, que es la más simple de todas ellas y la más fácil de representar y se suele usar muy a menudo. La gráfica es la siguiente:



Ejercicio 13: Representa gráficamente las funciones afines siguientes;

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 4$ c) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

d) $f(x) = 2x^2 - 8$ e) $y = -2x^2 - x + 2$ f) $y = x^2 + 3$

g) $f(x) = -x^2 + 3x$ g) $f(x) = x^2 + x + 1$ h) $f(x) = -2x^2 + 18$

Ejercicio 14:

a) Representa la parábola $y = x^2 - 2x - 3$
b) Representa la recta $y = x - 5$ en el mismo sistema que la parábola anterior.
c) Calcula los puntos de corte de la recta y la parábola