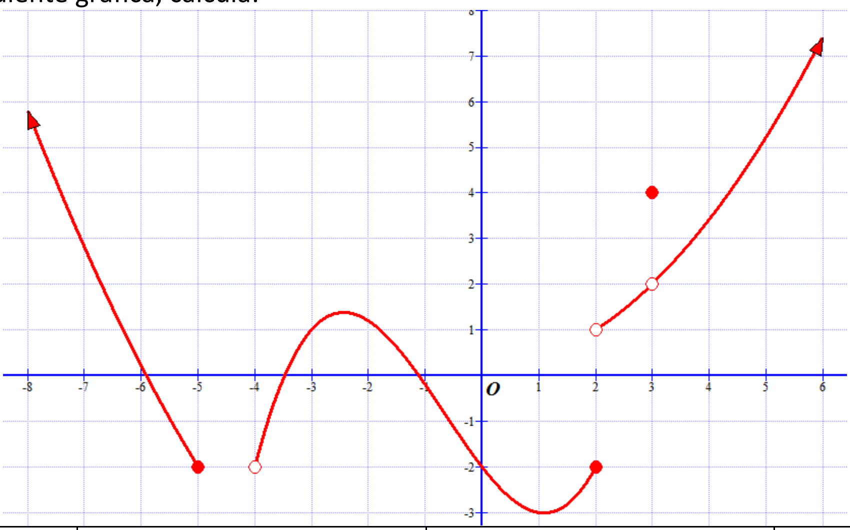
HOJA 1 DE EJERCICIOS
UNIDAD 8: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

Ejercicio 1: Dada la siguiente gráfica, calcula:



a) $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x)$	b) $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x)$	c) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$	d) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$
e) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$	f) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$	g) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$	h) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$
i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$	j) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$	k) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$	l) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
m) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$	n) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$	o) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$	p) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

EJERCICIO 1

a) $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = -2$

c) $\lim\limits_{x \to -5} f(x) \Rightarrow \nexists$

e) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = -2$

g) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -2$

i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$

k) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$

o) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) \Rightarrow \nexists$

d) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) \Rightarrow \nexists$

f) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) \Rightarrow \nexists$

h) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -2$

j) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -2$

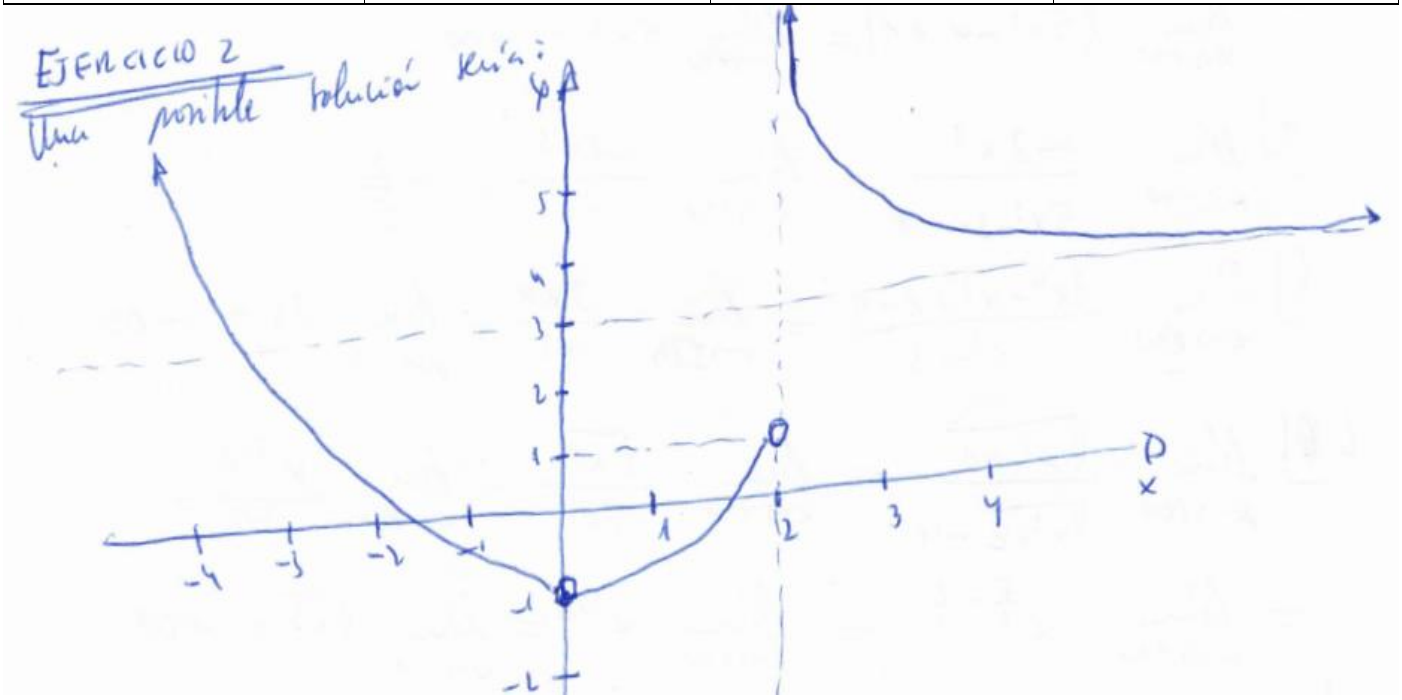
l) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \Rightarrow \nexists$

n) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$

p) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

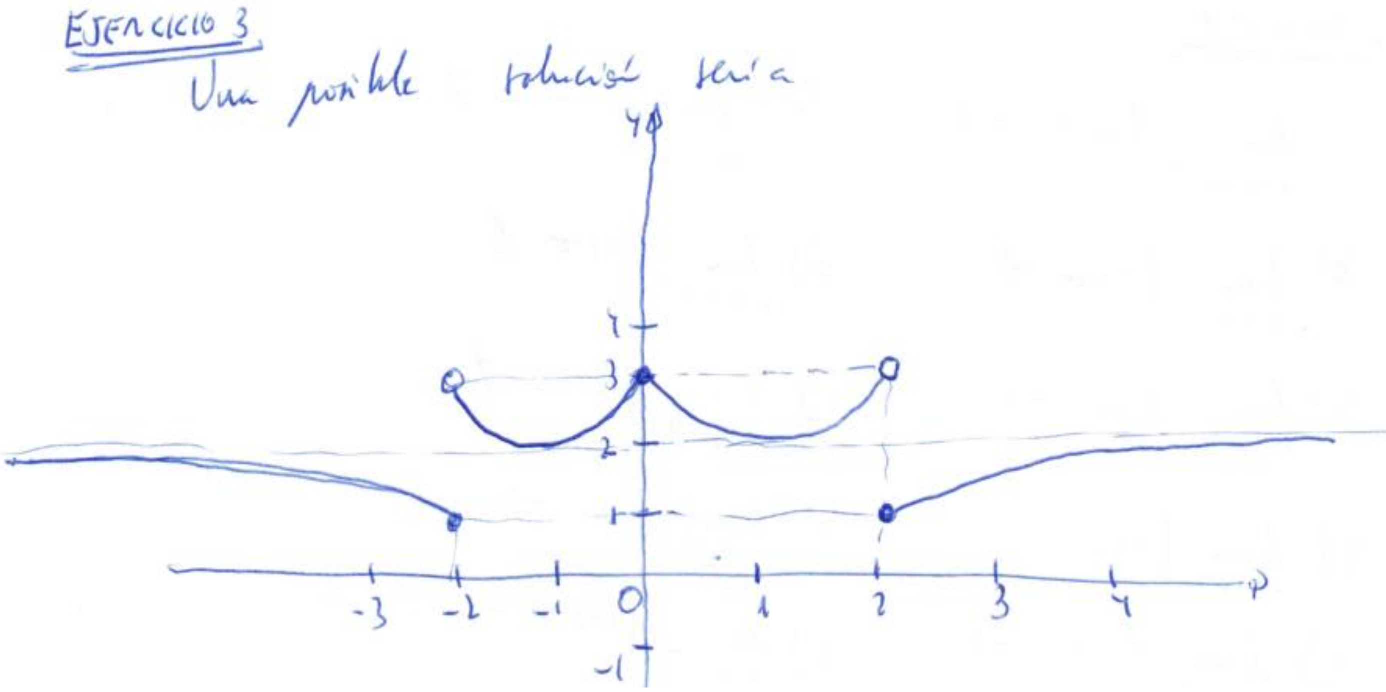
Ejercicio 2: Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes condiciones:

$Dom(f) = R - \{0,2\}$	$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$		



Ejercicio 3: Representa gráficamente una función que cumpla las siguientes condiciones:

$Dom(f) = R$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$	f es par
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$	$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$		



Ejercicio 4: Calcula los siguientes límites:

a.- $\underset{x\to 0}{lím}\ 2$	Sol: 2	b.- $\underset{x\to+\infty}{lím}\ \frac{3}{x^{12}}$	Sol: 0
c.- $\underset{x\to-\infty}{lím}\ \frac{x}{6+x-x^2}$	Sol:0	d.- $\underset{x\to+\infty}{lím}\,(5x^2-x+1)$	Sol: $+\infty$
e.- $\underset{x\to+\infty}{lím}\ \frac{-2x^3}{5x^3-3x+8}$	Sol:-2/5	f.- $\underset{x\to-\infty}{lím}\ \frac{3x^4-x^3+x-9}{x^3-3}$	Sol: $-\infty$
g.- $\underset{x\to+\infty}{lím}\ \frac{\sqrt{x^2+7}}{2x}$	Sol: 1/2	h.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$	Sol:1
i.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^5+1}}{\sqrt{x^2+2}-4}$	Sol: $+\infty$	j.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$	Sol: 0
k.- $\lim\limits_{x\to 5} \left(\sqrt[3]{x^2+2}-x\right)$	Sol:-2	l.- $\underset{x\to 1}{lim}\ \frac{x^3-6x^2+5x}{x^4-x^3+x-1}$	Sol:-2
m.- $\lim\limits_{x\to-3} \frac{(x+1)^3}{x+3}$	Sol: ∞	n.- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-6}{x^2}$	Sol: $-\infty$
ñ.- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$	Sol: 3/4	o.- $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^4-1}{x^3+1}$	Sol: -4/3
p.- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{2x}$	Sol: -1/4	q.- $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{2x-6}$	Sol: $\frac{1}{4\sqrt{3}}$
r.- $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1}$	Sol: $-\infty$	s.- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$	Sol: 8
t.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$	Sol : 0	u.- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{x+2}-\frac{x^3-1}{x^2+2}\right]$	Sol : -2
v.- $\underset{x\to+\infty}{lím}\ \frac{x}{x-\sqrt{x^2+3x}}$	Sol : $-\infty$	x.- $\underset{x\to+\infty}{lím}\ \frac{\sqrt[5]{3x^2-x+1}}{\sqrt{4x-1}}$	Sol : -0
y.- $\underset{x\to-3}{lim}\ \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}$	Sol : 2	z.- $\underset{x\to 1}{lim}\ \frac{x-\lvert x\rvert}{2x}$	Sol :0

EJERCICIO 4

a) $\lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^{12}} = \frac{3}{+\infty} = 0$

c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{6+x-x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-1}{x} = 0$

d) $\lim_{x\to +\infty} (5x^2-x+1) = \lim_{x\to +\infty} 5x^2 = +\infty$

e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^3}{5x^3-3x+8} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^3}{5x^3} = -\frac{2}{5}$

f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4-x^3+x-9}{x^3-3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4}{x^3} = \lim_{x\to -\infty} 3x = -\infty$

g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+7}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1.$

i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^5+1}}{\sqrt{x^2+2}-4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{5/2}}{x^{2/2}} =$

$= \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{5}{2}-\frac{2}{2}} = \lim_{x\to +\infty} x^{3/2} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^3} = +\infty$

j) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

k) $\lim_{x\to 5} (\sqrt[3]{x^2+2} - x) = \sqrt[3]{25+2} - x = \sqrt[3]{27} - 5 = 3-5 = -2$

l) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-6x^2+5x}{x^4-x^3+x-1} = \frac{0}{0}$ Indet. Descomponemos en factores para que aparezca el factor $(x-1)$ y simplificar.

$x^3-6x^2+5x = x\cdot(x^2-6x+5) = x\cdot(x-1)\cdot(x-5)$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -6 & 5 \\ 1 & & 1 & -5 \\ \hline & 1 & -5 & 0 \end{array}$$

$x^4-x^3+x-1 = (x-1)(x^2+1)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego, $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-6x^2+5x}{x^4-x^3+x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\cdot\cancel{(x-1)}(x-5)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x^2+1)} = \frac{-4}{2} = -2$

m) $\lim_{x \to -3} \frac{(x+1)^3}{x+3} = \frac{(-2)^3}{0} = \frac{-8}{0} = ?$ Hacemos los límites laterales

$\lim_{x \to -3^-} \frac{(x+1)^3}{x+3} = \frac{(-2)^3}{0^-} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x \to -3^+} \frac{(x+1)^3}{x+3} = \frac{(-2)^3}{0^+} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to -3} \frac{(x+1)^3}{x+3} = \infty}$

n) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3-6}{x^2} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$

Al estar al cuadrado, siempre será 0^+

ñ) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x} = \frac{0}{0}$ Indet. Descomponemos en factores numerador y denominador

$x^3-1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$x^3+2x^2-3x = x\cdot(x^2+2x-3) = x\,(x-1)(x+3)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Así,

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{x\cdot\cancel{(x-1)}(x+3)} = \frac{3}{1\cdot 4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

o) $\lim_{x \to -1} \frac{x^4-1}{x^3+1} = \frac{0}{0}$ Lo mismo que el anterior

$x^4-1 = (x+1)\cdot(x^3-x^2+x-1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$x^3+1 = (x+1)\cdot(x^2-x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Luego, $\lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^3-x^2+x-1)}{\cancel{(x+1)}\cdot(x^2-x+1)} = \boxed{\frac{-4}{3}}$

p) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{2x} = \frac{0}{0}$ Indeterminación, multiplicamos numerador y denominador por su conjugado

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x})^2-1^2}{2x\cdot(\sqrt{1-x}+1)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-x-1}{2x\cdot(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{x}}{2\cdot\cancel{x}\cdot(\sqrt{1-x}+1)} = \boxed{\frac{-1}{4}}$

q) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{2x-6} = \frac{0}{0}$ Indet., lo mismo del ejercicio anterior.

$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{2x-6} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} =$

$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{x-3}}{2\cdot\cancel{(x-3)}(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{3}}}$

r) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

s) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2} = \frac{0}{0}$, indet. y hacemos lo mismo que en el ejercicio p)

$= \lim_{x\to 2} \frac{x\cdot(x-2)}{\sqrt{x+2}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x\to 2} \frac{x\cdot(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2})^2-2^2} =$

$= \lim_{x\to 2} \frac{x\cdot\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+2}+2)}{\cancel{(x-2)}} = 8$

t) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right) = (+\infty)-(+\infty)$ Indet. Multiplicamos y dividimos por el conjugado

$\parallel$

$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+3}-x)\cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3})^2-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x} =$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = \frac{3}{(+\infty)+(+\infty)} = \frac{3}{+\infty} = \boxed{0}$

u)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-\frac{x^3-1}{x^2+2}\right)\underset{\text{operamos}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2\cdot(x^2+2)-(x+2)\cdot(x^3-1)}{(x+2)\cdot(x^2+2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+2x^2-(x^4-x+2x^3-2)}{x^3+2x+2x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+2x^2+x+2}{x^3+2x^2+2x+1}$$

$$\underset{\text{Tomamos términos dominantes}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3}{x^3}=\boxed{-2}$$

v)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-\sqrt{x^2+3x}}=\frac{+\infty}{(+\infty)-(+\infty)}$$ Indet. Multiplicamos por el conjugado

$$\|$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-\sqrt{x^2+3x}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+3x}}{x+\sqrt{x^2+3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot(x+\sqrt{x^2+3x})}{x^2-(\sqrt{x^2+3x})^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot(x+\sqrt{x^2+3x})}{-3\cancel{x}}=\frac{(+\infty+(+\infty))}{-3}=\boxed{-\infty}$$

x)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{3x^2-x+1}}{\sqrt{4x-1}}=\frac{\infty}{\infty}$$ Indet. Tomamos términos dominantes

$$\|$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{3x^2}}{\sqrt{4x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{x^2}}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{3}\cdot x^{2/5}}{2\cdot x^{1/2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{3}}{2}\cdot x^{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{3}}{2}\cdot x^{-\frac{1}{10}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{3}}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/10}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[10]{x}}=\frac{\sqrt[5]{3}}{2}\cdot\frac{1}{+\infty}=0$$

y) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9} = \dfrac{0}{0}$ Indet, descomponemos:

$x^3+5x^2+3x-9 = (x+3)\cdot(x^2+2x-3)$ $\quad x^3+7x^2+15x+9 = (x+3)\cdot(x^2+4x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 3 & -9 \\ -3 & & -3 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 15 & 9 \\ -3 & & -3 & -12 & -9 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

$= \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\cancel{(x+3)}(x^2+2x-3)}{\cancel{(x+3)}(x^2+4x+3)} = \dfrac{0}{0}$ Hacemos otra vez lo mismo

$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$ $\qquad x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ -3 & & -3 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 3 \\ -3 & & -3 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$= \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\cancel{(x+3)}(x-1)}{\cancel{(x+3)}(x+1)} = \dfrac{-4}{-2} = \boxed{2}$

z) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-|x|}{2x} = \dfrac{1-1}{2} = \boxed{0}$

Ejercicio 5: Calcula los siguientes límites:

a.- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-1}{1-x}$	Sol: ∞	b.- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3^x+1}{x^3-6}$	Sol: $+\infty$
c.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x}$	Sol: $+\infty$ (sólo se puede hacer por la derecha)	d.- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{5x^2+x}\right)^{x^2-6x}$	Sol: 0
e.- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x^3}{x+2}-2x\right)$	Sol: $+\infty$	f.- $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}\right)$	Sol: 1
g.- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2-x}$	Sol : -12	h.- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x}$	Sol : $e^{-\frac{4}{3}}$
i: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+x}\right)^{x^2-6x}$	Sol : 0	j : $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right)^{-\sqrt{x}}$	Sol : e^4

k: $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x}{4x-2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$	Sol : $e^{\frac{1}{6}}$			

EJERCICIO 5.

a) $\lim_{x\to 1}\frac{3x-1}{1-x}=\frac{2}{0}$. Hagamos los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-}\frac{3x-1}{1-x}=\frac{2}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 1^+}\frac{3x-1}{1-x}=\frac{2}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{3x-1}{1-x}=\infty$$

b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{3^x+1}{x^3-6}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3^x}{x^3}=+\infty$

c) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x}-x}{x}=\frac{0}{0}$ Indet.

Solo por 0^+, pues $\sqrt{2x}$ no tiene sentido si $x\to 0^-$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2x}-x}{x}\cdot\frac{\sqrt{2x}+x}{\sqrt{2x}+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-x^2}{x\cdot(\sqrt{2x}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}\cdot(2-x)}{\cancel{x}\cdot(\sqrt{2x}+x)}=\frac{2}{0^++0^+}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2-1}{5x^2+x}\right)^{x^2-6x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2}{5x^2}\right)^{x^2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{+\infty}=0$

$\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)^{+\infty}$

pues $\frac{3}{5}<1$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}\right)=(+\infty)-(+\infty)$

$$\| $$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}+1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=$$

$\frac{+\infty}{+\infty}$ Tomamos términos dominants

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+x}=\boxed{1}$$

g) $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{2-x}=\frac{0}{0}$ Descomponemos en factores

$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

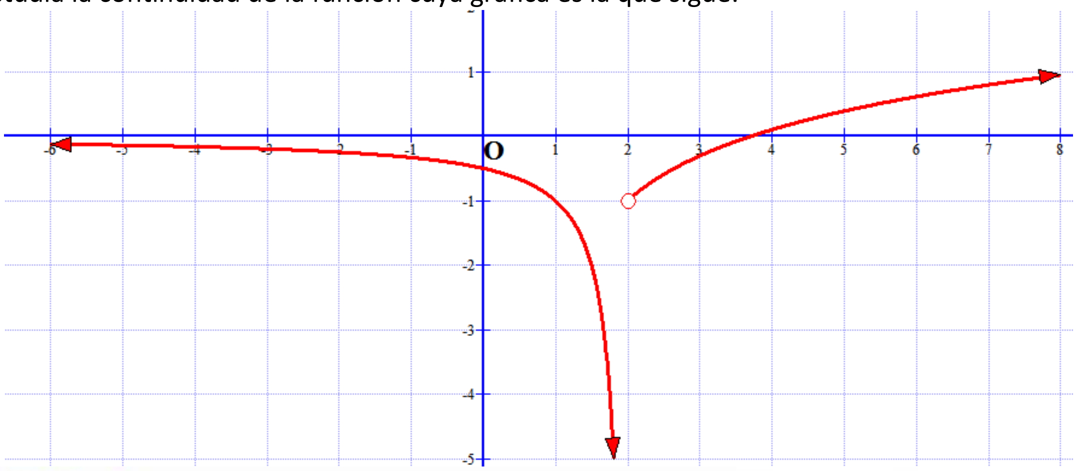
$$\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{-\cancel{(x-2)}}$$

$$=\frac{4+4+4}{-1}=\boxed{-12}$$

e) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x+2}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-2x^2-4x}{x+2}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}2x^2=\boxed{+\infty}$$

Ejercicio 6: Estudia la continuidad de la función cuya gráfica es la que sigue:



EJERCICIO 6:

f continua en $(-\infty, 2)$ como se observa en la gráfica

f continua en $(2, +\infty)$ " " " "

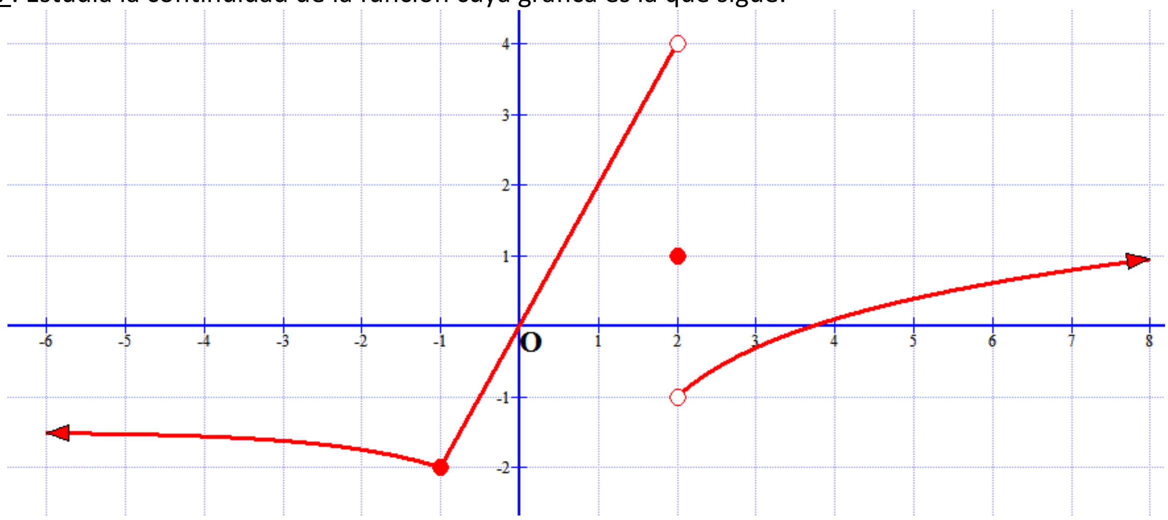
En $x_0=2$, estudiamos su continuidad, que como se observa es discontinua, pero lo vemos:

a) $\nexists f(2) \Rightarrow$ ya por esto no sería continua.

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1$ $\Rightarrow$ f es discontinua en $x_0=2$ de salto infinito

Ejercicio 7: Estudia la continuidad de la función cuya gráfica es la que sigue:



Ejercicio 7.

f continua en $(-\infty,-1)$ como se observa en la gráfica
f continua en $(-1,2)$ " " " "
f continua en $[2,+\infty)$ " " " "

En $x_0=-1$.

a) $\exists f(-1)=-2$
b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-2$
c) Como $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-2$

$\Rightarrow$ f es continua en $x_0=-1$. También se observa en la gráfica que es continua.

En $x_0=2$.

a) $\exists f(2)=1$
b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-1$ $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Rightarrow$ f es discontinua en $x_0=2$ de salto finito y amplitud $|4-(-1)|=$
$=5$

Ejercicio 8: Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & si\ \ x<2 \\ x+1 & si\ \ 2\le x<4 \\ 5 & si\ \ x\ge 4\end{cases}$. Estudia la continuidad y represéntala gráficamente.

EJERCICIO 8

$f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & si\ \ x<2 \\ x+1 & si\ \ 2\le x<4 \\ 5 & si\ \ x\ge 4\end{cases}$ Se observa claramente que $Dom(f)=\mathbb{R}$

En $(-\infty,2)$, f es continua por ser polinómica
En $(2,4)$, f es continua por ser polinómica
En $(4,+\infty)$, f es continua por ser constante

En $\underline{x_0 = 2}$, veamos que ocurre.

a) $\exists f(2) = 2+1 = 3$

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x^2+3) = -1$
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x+1) = 3$
$\neq \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} f(x) \Longrightarrow$

$\Rightarrow$ f es discontinua en $x_0 = 2$ de salto finito y amplitud 4

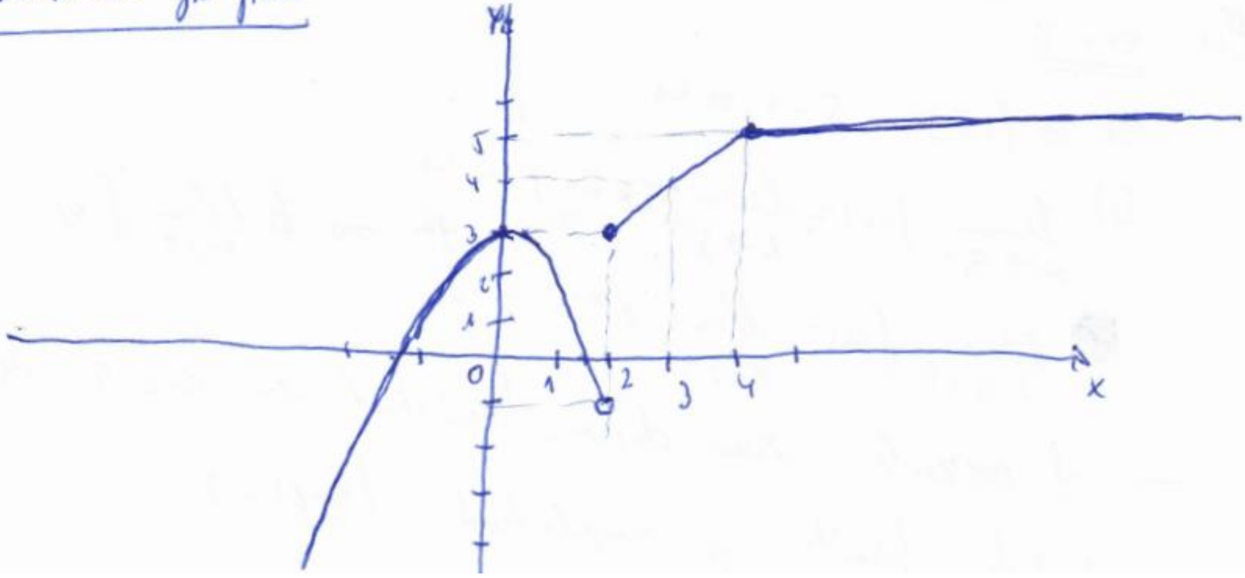
En $\underline{x_0 = 4}$

a) $\exists f(4) = 5$

b) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (x+1) = 5$
$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} 5 = 5$
$\Rightarrow \lim_{x \to 4} f(x) = 5$

Como $f(4) = \lim_{x \to 4} f(x) = 5 \Rightarrow$ f es continua en $x_0 = 4$.

Representación gráfica



Ejercicio 9: Estudia la continuidad de la función indicando, en su caso, los tipos de discontinuidad que presenta:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -2 \le x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ x-1 & 1 < x \le 5 \\ 2^{x-4} & x > 5 \end{cases}$$

Ejercicio 9.

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } -2\le x<1 \\ 3 & \text{si } x=1 \\ x-1 & \text{si } 1<x\le 5 \\ 2^{x-4} & \text{si } x>5 \end{cases}$$

f continua en $(-2,1)$ por ser polinómica
f continua en $(1,5]$ por " "
f continua en $(5,+\infty)$ por ser exponencial.

En $\underline{\underline{x_0=-2}}$, sólo se puede estudiar por la derecha, pues por la izquierda la función no está definida

a) $\exists f(-2)=1-(-2)^2=-3$
b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(1-x^2)=-3 \Rightarrow$ Podemos decir que f es continua por la derecha.

En $\underline{\underline{x_0=1}}$,

a) $\exists f(1)=3$
b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x^2)=0$
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$
c) Como $f(1)\neq \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, podemos decir que f presenta una discontinuidad evitable en $x_0=1$.

En $\underline{\underline{x_0=5}}$

a) $\exists f(5)=5-1=4$
b) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}(x-1)=4$
$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} 2^{x-4}=2$ $\neq \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$\Rightarrow f$ presenta una discontinuidad en $x_0=5$ de salto finito y amplitud $|4-2|=2$

Ejercicio 10: Calcula el valor de *k* para que la siguiente función sea continua en $\Re$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<5 \\ 4x+k & si \quad x\geq 5 \end{cases}$$

EJERCICIO 10

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<5 \\ 4x+k & \text{si } x\geq 5 \end{cases}$$

f continua en $(-\infty, 5)$ por ser polinómica

f continua en $(5, +\infty)$ por " "

Luego, sólo nos queda ver en $x_0=5$ e imponer que sea continua

a) $\exists f(5) = 4\cdot 5+k = 20+k$

b) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} (x^2-1) = 24$

$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} (4x+k) = 20+k$

Para que sea continua en $x_0=5$

$20+k=24$

$\Rightarrow \boxed{k=4}$

Ejercicio 11: Calcula los valores de a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & \text{si} & x\leq 1 \\ 4x^2+ax+b & \text{si} & 1\leq x<2 \\ 3x+b & \text{si} & x\geq 2 \end{cases}$$

EJERCICIO 11

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & \text{si } x\leq 1 \\ 4x^2+ax+b & \text{si } 1<x<2 \\ 3x+b & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

Sólo se puede plantear problemas de continuidad en los puntos donde f cambia de definición, que son en los puntos $x_0=1$ y $x_0=2$

En $x_0=1$

a) $\exists f(1) = a-2$

b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax^2-2x) = a-2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (4x^2+ax+b) = 4+a+b$

Para que sea continua

$a-2=4+a+b$

$\Rightarrow \boxed{b=-6}$

En $x_0 = 2$

a) $\exists f(2) = 3\cdot 2+b = 6+b$

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(4x^2+ax+b\right) = 16+2a+b$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(3x+b\right) = 6+b$

Para que sea continua

$6+b = 16+2a+b$

$\Rightarrow 2a = -10$

$\Rightarrow \boxed{a=-5}$

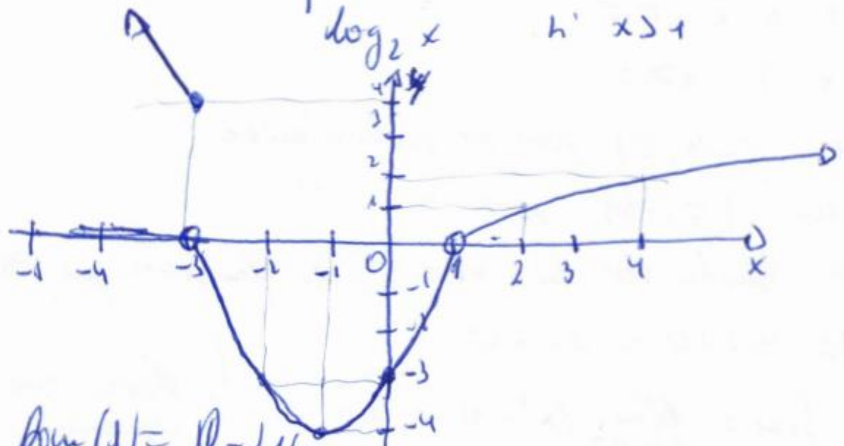
Ejercicio 12: Dada la función: $f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \le -3 \\ x^2+2x-3 & si \quad -3 < x < 1 \\ \log_2 x & si \quad x > 1 \end{cases}$

a) Representarla gráficamente
b) Señala su dominio y su recorrido o imagen.
c) Estudia su continuidad en $x=-3$ y en $x=1$

EJERCICIO 12

$f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \le -3 \\ x^2+2x-3 & si \quad -3 < x < 1 \\ \log_2 x & si \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

a)



b) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$Im(f) = [-4, +\infty)$

c) En $\underline{\underline{x_0 = -3}}$

a) $\exists f(-3) = 4$

b) $\lim_{x \to -3^-} (1-x) = 4$

$\lim_{x \to -3^+} (x^2+2x-3) = 0$ $\Rightarrow \nexists \lim_{x \to -3} f(x)$ $\Rightarrow$ f es discontinua en $x=-3$ de salto finito y amplitud 4.

En $\underline{\underline{x_0 = 1}}$

a) $\nexists f(1) \Rightarrow$ con esto ya f no puede ser continua

b) $\lim_{x \to 1^-} (x^2+2x-3) = 0$

$\lim_{x \to 1^+} \log_2 x = 0$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f es discontinua de tipo evitable en $x_0 = 1$