UNIDAD 7: GEOMETRÍA EN EL PLANO

Contenido

1. INTRODUCCIÓN

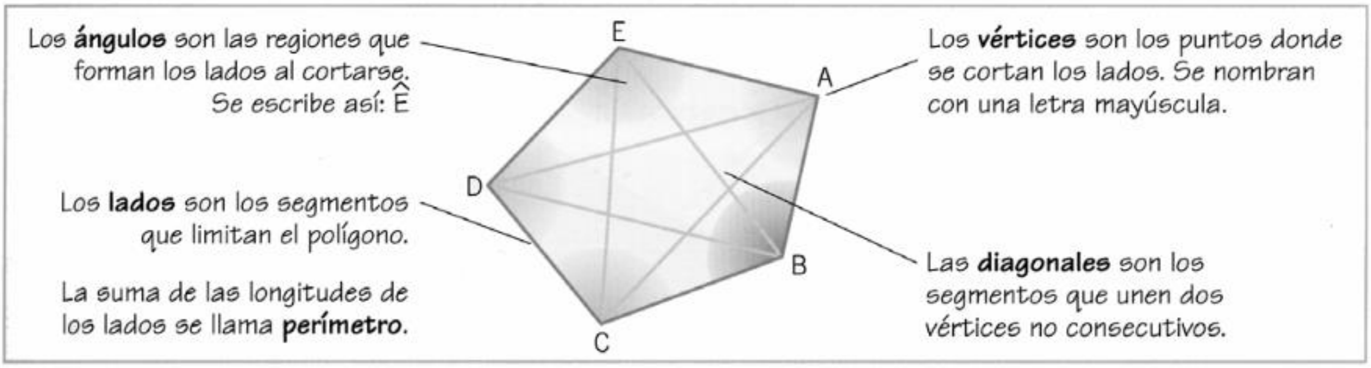
Los **polígonos** son figuras planas cerradas, limitadas por segmentos rectilíneos.

Los elementos de un polígono son los lados, los vértices, los ángulos y las diagonales.

Los **lados** son los segmentos rectilíneos que delimitan al polígono.

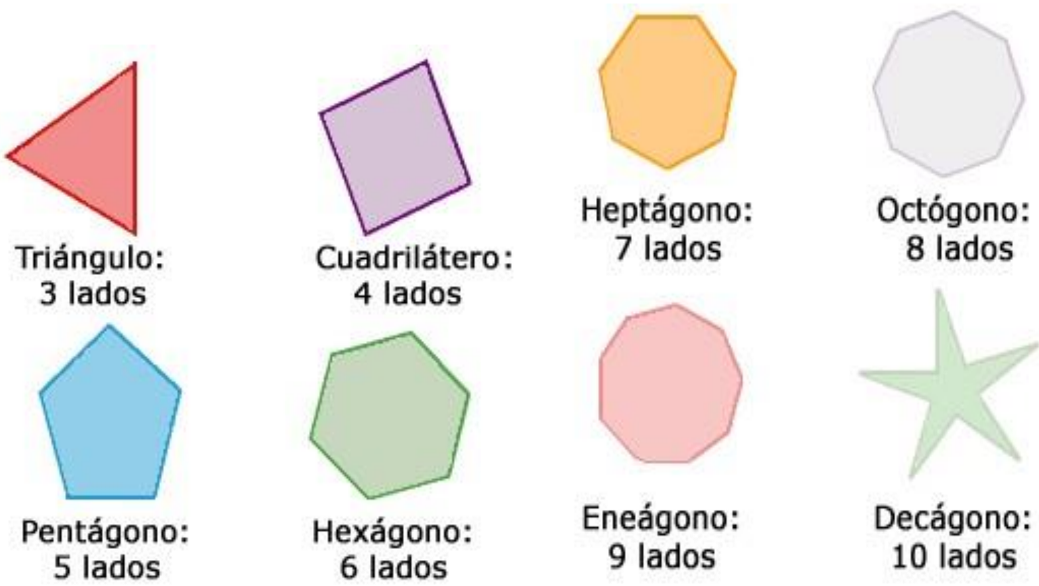
Los **vértices** Son los puntos donde se cortan los lados dos a dos.

Los **ángulos** son las regiones comprendidas entre cada par de lados.



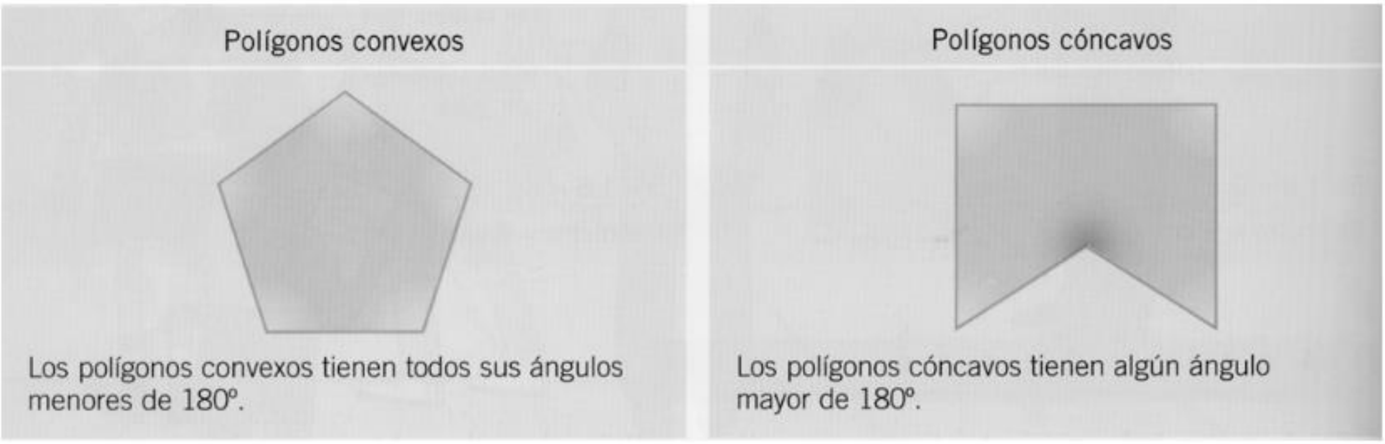
CLASES DE POLÍGONOS

Según su número de lados, los polígonos se llaman:



Los polígonos que tienen todos los lados iguales se llaman **polígonos equiláteros**; si además tienen todos los ángulos iguales se llaman **polígonos regulares**.

También podemos clasificar los polígonos por sus ángulos:

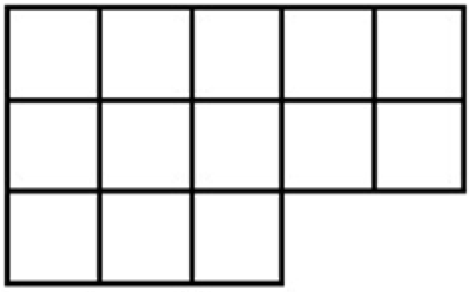


<u>CONCEPTOS DE PERÍMETRO Y AREA DE UNA FIGURA PLANA</u>

Se llama **perímetro** de una figura plana a la longitud del borde de la figura. Es el resultado de sumar la longitud de los lados de un polígono; o es la medida del contorno de la figura; o también, la longitud total de la línea poligonal cerrada.

Se llama **área** de una figura plana a la medida de la superficie que ocupa.

<u>Ejemplo</u>: Si en la figura siguiente cada cuadrado tuviese un centímetro de lado



Su perímetro sería: 5 + 2 + 2 + 1 + 3 + 3 = 16 cm

Su área sería 13 cm² ya que la figura está formada por 13 cuadrados de 1 cm²

2. TRIÁNGULOS

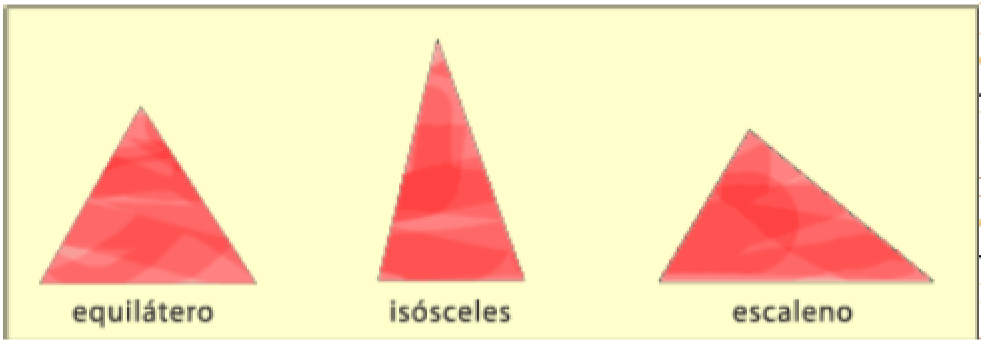
Existen muchos tipos de triángulos y todos ellos se pueden clasificar de dos formas distintas: Por el tamaño de sus lados y por la medida de sus ángulos.

<u>Por el tamaño de sus lados:</u>

Triángulo **equilátero**: tiene sus tres lados iguales, o sea, sus tres lados miden lo mismo.

Triángulo **isósceles**: tiene dos lados iguales, o sea, tiene dos lados que miden lo mismo.

Triángulo **escaleno**: tiene sus tres lados distintos, o sea, sus tres lados tienen medidas distintas.

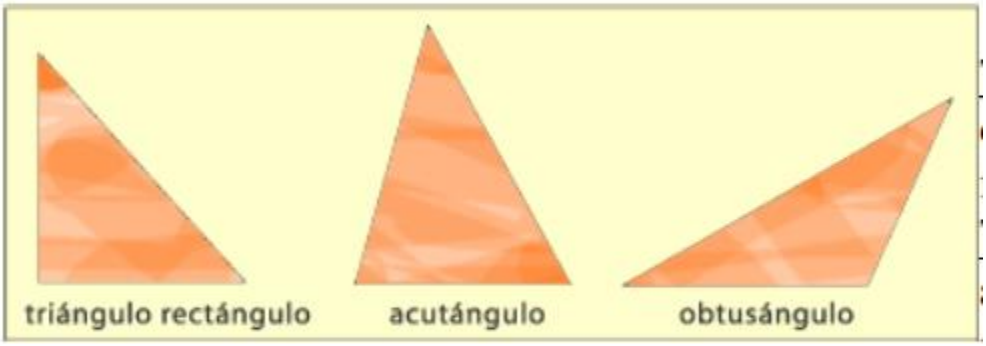


<u>Por la medida de sus ángulos:</u>

Triángulo **rectángulo**: tiene un ángulo de 90º, o sea uno de sus ángulos interiores es un ángulo recto.

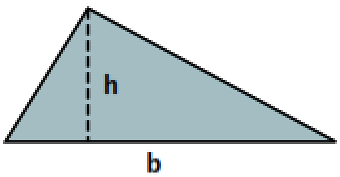
Triángulo **acutángulo**: tiene los tres ángulos agudos, o sea, sus tres ángulos interiores son menores de 90°.

Triángulo **obtusángulo**: tiene un ángulo obtuso, o sea, uno de sus ángulos interiores es mayor que 90°.



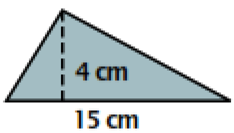
ÁREA DEL TRIÁNGULO

El área del triángulo es igual al semiproducto de la base por su altura.



$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Ejemplo:



$$A = \frac{15 \times 4}{2} = 30\ cm^2$$

IMPORTANTE

TEOREMA DE PITÁGORAS: En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Si a es la hipotenusa y, b y c son los catetos, se cumple:

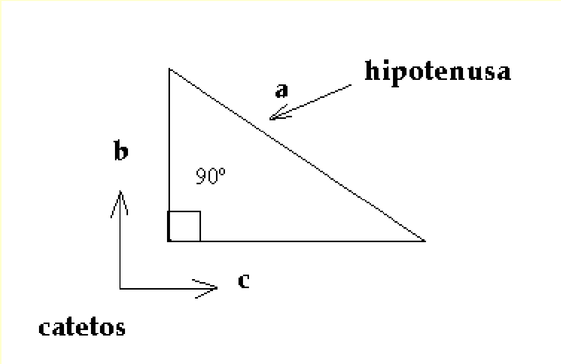
$$a^2 = b^2 + c^2$$

CONCEPTOS PREVIOS

Triángulo rectángulo : Tiene un ángulo de 90º.

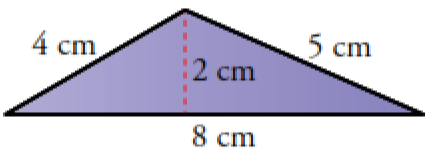
Catetos : Son los lados que forman el ángulo de 90º (perpendiculares).

Hipotenusa : Lado opuesto al ángulo de 90º.



Ejemplo:

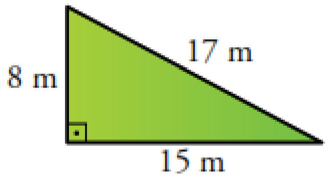
a)



$$A = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

$$P = 8 + 5 + 4 = 17 \text{ cm}$$

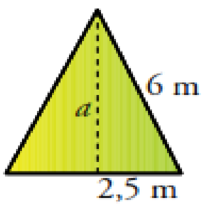
b)



$$A = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60 \text{ m}^2$$

$$P = 15 + 8 + 17 = 40 \text{ m}$$

c)



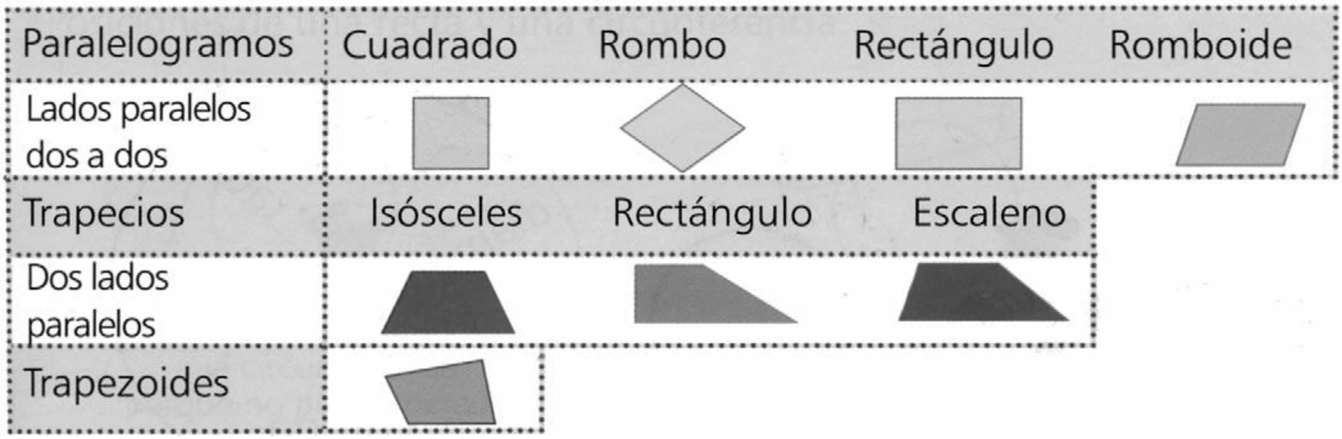
$$a = \sqrt{6^2 - 2,5^2} = \sqrt{29,75} = 5,5 \text{ m}$$

$$A = \frac{5 \cdot 5,5}{2} = 13,75 \text{ m}^2$$

$$P = 2 \cdot 6 + 5 = 17 \text{ m}$$

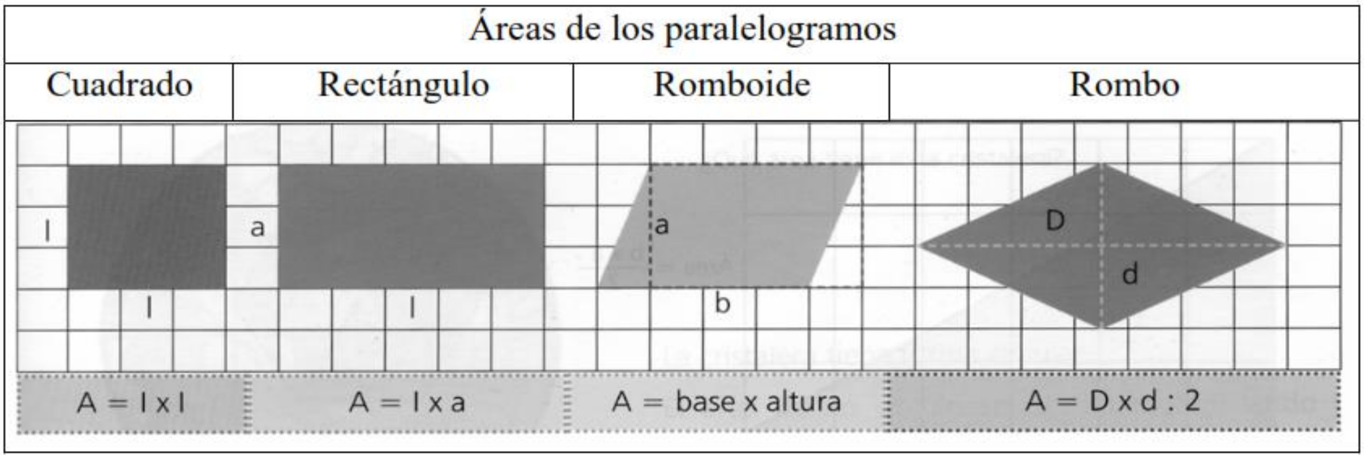
3. CUADRILÁTEROS

Los cuadriláteros son los polígonos de cuatro lados. Se pueden clasificar de la siguiente manera:



A los cuadriláteros se les puede trazar dos diagonales.

Recuerda que la suma de los ángulos de un cuadrilátero equivale a cuatro ángulos rectos, es decir, a 360º.



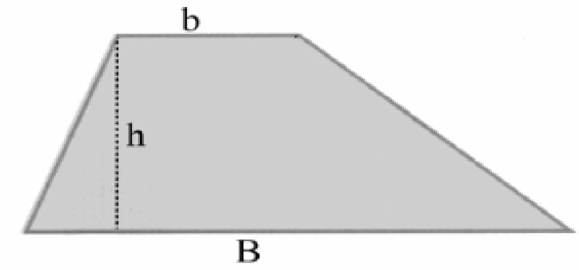
Área del cuadrado = lado x lado = l x l = l^2

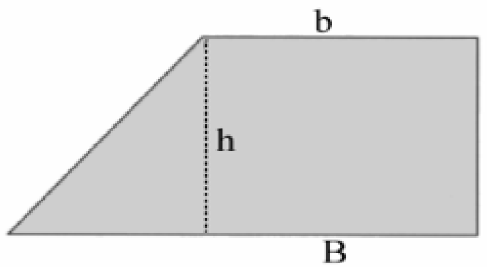
Área del rectángulo = largo x ancho = l x a

Área del romboide = base x altura = b x a

Área del rombo = (diagonal mayor x diagonal menor) : 2 = $\frac{D \times d}{2}$

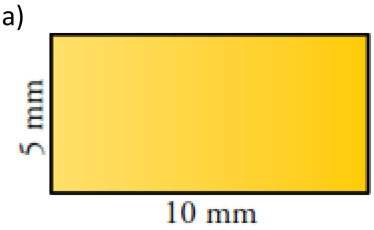
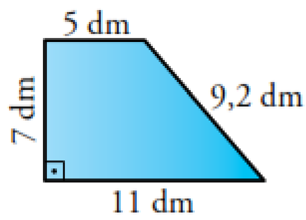
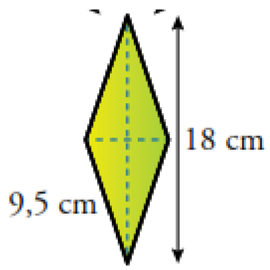
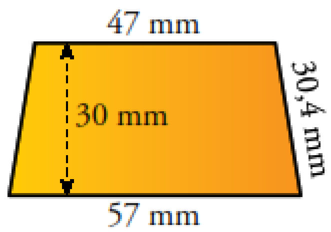
ÁREA DEL TRAPECIO





$$\textbf{Área del trapecio} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \times h}{2} = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Ejemplo:

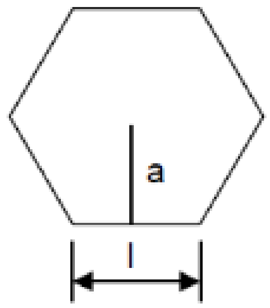
a)  $A = 10 \cdot 5 = 50 \text{ mm}^2$ $P = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 30 \text{ mm}$	b)  $A = \frac{11 + 5}{2} \cdot 7 = 56 \text{ dm}^2$ $P = 11 + 9{,}2 + 5 + 7 = 32{,}2 \text{ dm}$
c)  $A = \frac{18 \cdot 6}{2} = 54 \text{ cm}^2$ $P = 9{,}5 \cdot 4 = 38 \text{ cm}$	d)  $A = \frac{47 + 57}{2} \cdot 30 = 1\,560 \text{ mm}^2$ $P = 57 + 47 + 2 \cdot 30{,}4 = 164{,}8 \text{ mm}$

4. POLÍGONOS REGULARES

Recordemos que un polígono regular es el que tiene todos sus ángulos y lados iguales, por tanto, su perímetro se hallará multiplicando la longitud de un lado por el número de lados.

Se llama **apotema** de un polígono regular al segmento que une el centro del polígono con el punto medio de uno de los lados.

El área de un polígono regular se halla multiplicando su perímetro por su apotema y después se divide este resultado entre dos.



n → Número de lados
l → Lado
p → Perímetro
a → Apotema

$$\boxed{\text{PERIMETRO} = l \times n}$$

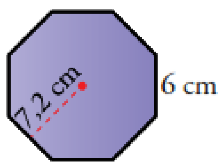
$$\boxed{\text{AREA} = \frac{p \times a}{2}}$$

Ejemplo : Calcular el área de un pentágono regular de 6 cm de lado y 5,8 cm de apotema.

Perímetro = 6 x 5 = 30 cm $\text{Área} = \dfrac{30 \text{ cm} \times 5{,}8 \text{ cm}}{2} = 87 \text{ cm}^2$

<u>Ejemplo</u>:

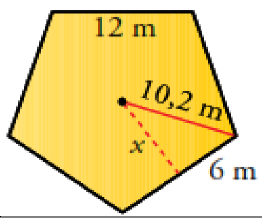
a)



$$A = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7{,}2}{2} = 172{,}8 \text{ cm}^2$$

$$P = 8 \cdot 6 = 48 \text{ cm}$$

b)



$$x = \sqrt{10{,}2^2 - 6^2} = \sqrt{68{,}04} \approx 8{,}2 \text{ m}$$

$$A = \frac{12 \cdot 8{,}2}{2} \cdot 5 = 246 \text{ m}^2$$

$$P = 12 \cdot 5 = 60 \text{ m}$$

5. CIRCUNFERENCIA. CÍRCULO

Se llama **circunferencia** a la línea cuyos puntos están todos a la misma distancia de otro llamado centro.

Se llama **círculo** a la superficie plana que está limitada por la circunferencia.

Es importante no confundir la circunferencia, que es una línea, con el círculo, que es una superficie.

Arco es la parte de circunferencia comprendida entre dos de sus puntos.

Cuerda es un segmento que une dos puntos de la circunferencia.

Radio es un segmento que une el centro de la circunferencia con uno de sus puntos.

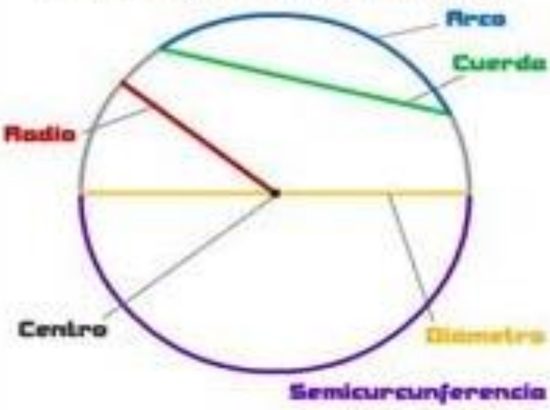
Diámetro es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Mide el doble que el radio.

Un diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales llamadas **semicircunferencias**.

1. LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO

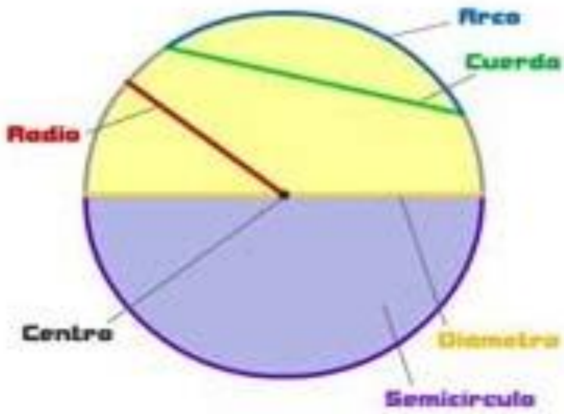
Circunferencia

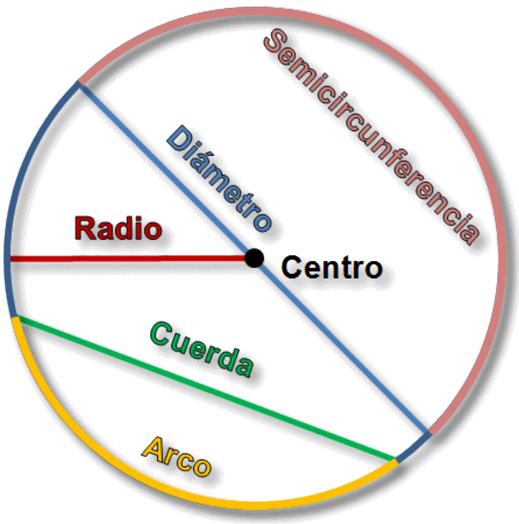
Es una línea curva, cerrada y plana cuyos puntos están a la misma distancia del centro.



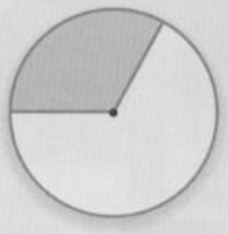
Círculo

Es una figura plana formada por una circunferencia y su interior.



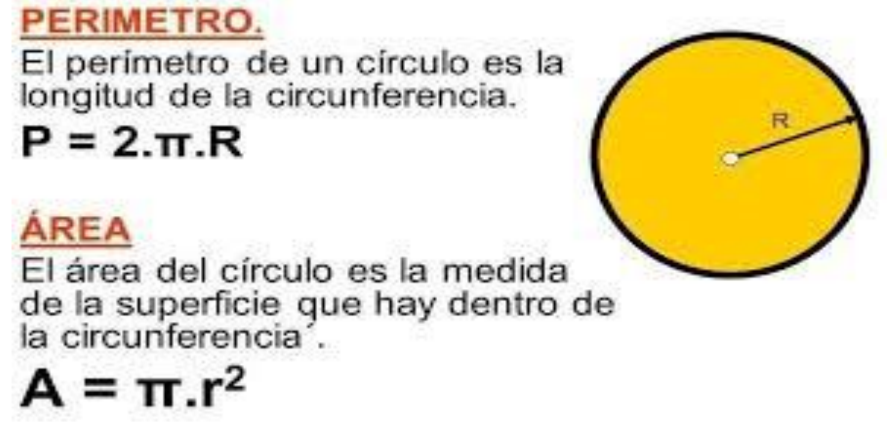


FIGURAS CIRCULARES

Sector circular	Segmento circular	Corona circular
		
Es la parte del círculo limitada por 2 radios y su arco.	Es la parte del círculo limitada por una cuerda y su arco.	Es la región comprendida entre 2 circunferencias que tienen el mismo centro y distinto radio.

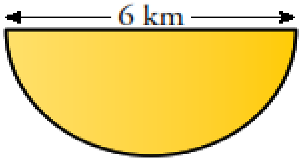
La **longitud de la circunferencia** se halla multiplicando el doble del radio por 3,14 a este número se le conoce con el nombre de π (pi).

El **área del círculo** se halla multiplicando π por el cuadrado del radio.



Ejemplo:

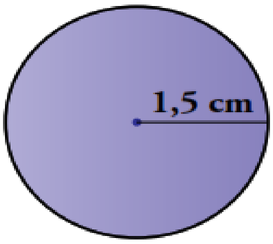
a)



$$A = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} \approx 14{,}13 \text{ km}^2$$

$$P = \frac{2\pi \cdot 3}{2} + 6 \approx 15{,}42 \text{ km}$$

b)



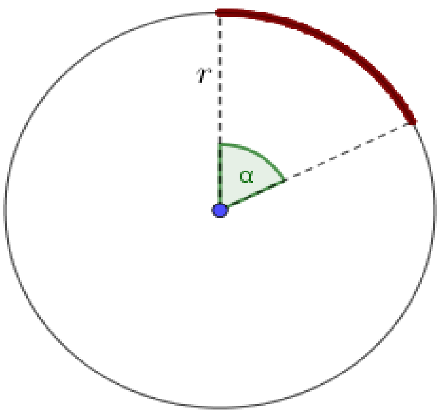
$A = 7{,}07 \text{ cm}^2$

$P = 9{,}42 \text{ cm}$

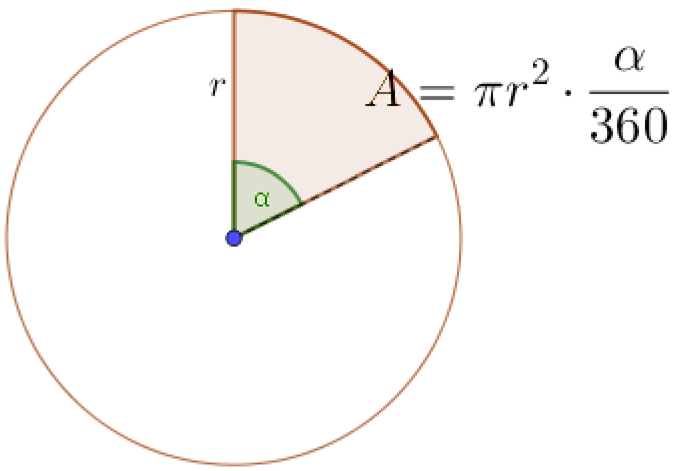
Longitud de un arco de círcunferencia

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360}$$

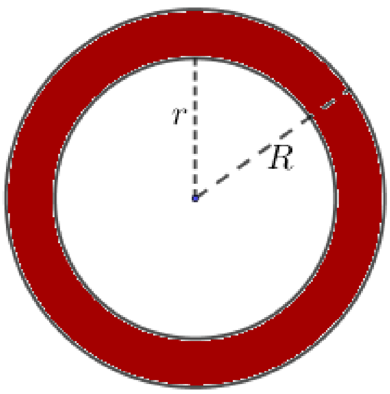
r es el radio y α es el número de grados que abarca el arco



Área del sector circular



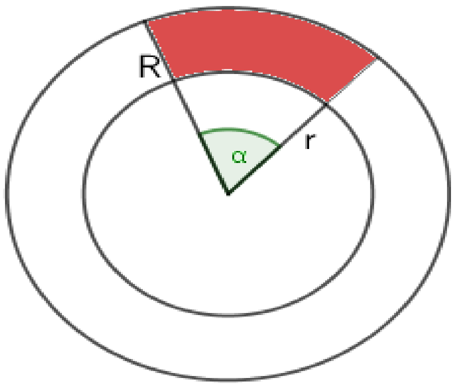
Área de la corona circular



$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Restamos al área del círculo grande, el área del círculo pequeño
R: radio de la circunferencia grande
r: radio de la circunferencia pequeña

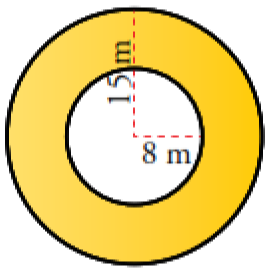
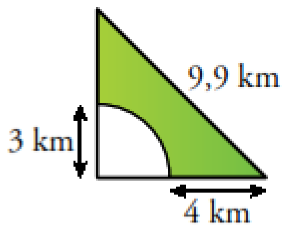
Área del trapecio circular



$$A = \pi(R^2 - r^2) \cdot \frac{\alpha}{360}$$

R: radio de la circunferencia grande
r: radio de la circunferencia pequeña
α: grados del ángulo que abarca

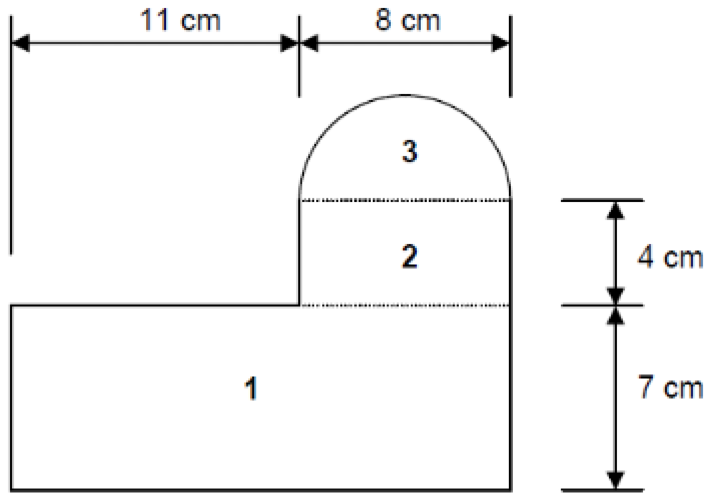
<u>Ejemplo</u>:

a)	b)
	
$A = \pi \cdot 15^2 - \pi \cdot 8^2 \approx 505{,}54 \text{ m}^2$	$A = \frac{7 \cdot 7}{2} - \frac{\pi \cdot 3^2}{4} \approx 17{,}43 \text{ km}^2$
$P = 2\pi \cdot 15 + 2\pi \cdot 8 \approx 144{,}44 \text{ m}$	$P = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3}{4} + 4 + 4 + 9{,}9 \approx 22{,}61 \text{ km}$

AREAS DE FIGURAS COMPLEJAS

Para hallar el área de figuras complejas hay que dividirlas en otras más sencillas, de las cuales sepamos calcular su área.

<u>Ejemplo</u>: Calcular el área de la siguiente figura:

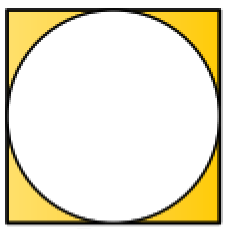


Dividimos la figura en tres partes y calculamos el área de cada una de las partes:

1. Área del rectángulo = 19 x 7 = 133 cm²
2. Área del rectángulo = 8 x 4 = 32 cm²
3. Área del medio círculo = $\frac{3{,}14 \ x \ 16 \ cm^2}{2}$ = 25,12 cm²

Para hallar el área total de la figura sumamos las tres áreas ⇨ Área total = 133 + 32 + 25,12 = 190,12 cm2

Ejemplo: Halla el área y el perímetro de la región sombreada:



$A = 7^2 - \pi \cdot 3{,}5^2 \approx 10{,}53 \text{ mm}^2$

$P = 7 \cdot 4 + 2\pi \cdot 3{,}5 \approx 49{,}98 \text{ mm}$

Ejemplo:

Halla el área de la parte coloreada sabiendo que el diámetro de la circunferencia grande es de 6 cm.

Radio circunferencia grande: $R = 3$ cm

Radio circunferencias pequeñas: $r = 1$ cm

$A = \pi \cdot 3^2 - 7 \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi \approx 6{,}28 \text{ cm}^2$