UNIDAD 6: SEMEJANZA

Contenido

1 SEMEJANZA EN FIGURAS PLANAS

Dos **figuras** son **semejantes** cuando tienen la misma forma:
- Los *ángulos* correspondientes son todos *iguales*.
- Los *segmentos* correspondientes son *proporcionales*. La razón de proporcionalidad se llama **razón de semejanza**

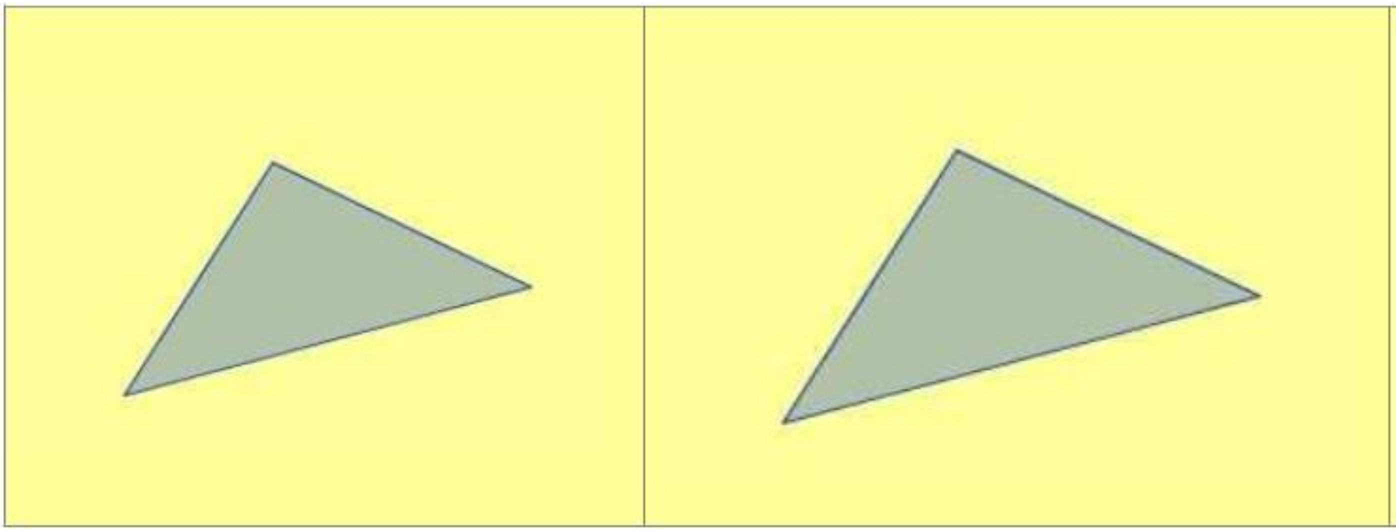
Un polígono está determinado por sus lados y ángulos, por tanto, para que dos polígonos sean semejantes basta con que los **lados correspondientes sean proporcionales** (con el zoom se multiplican todos los lados por el mismo número, la razón de semejanza) **y sus ángulos iguales**.

EJEMPLO DE FIGURAS SEMEJANTES EN LA VIDA CORRIENTE

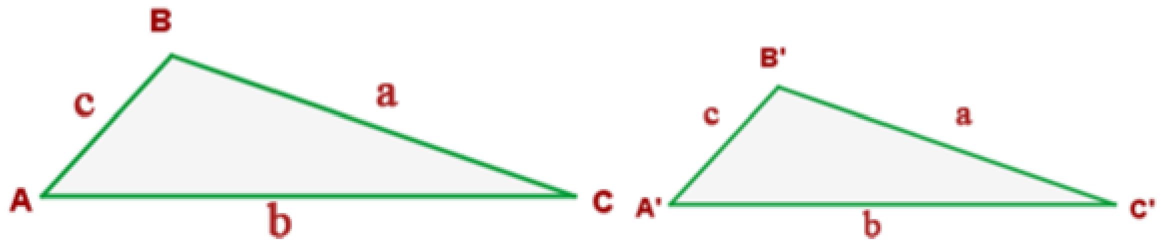
• Fotografías
• Maquetas de monumentos, copias de cuadros famosos, reproducciones de coches, ...
• Planos y mapas

Semejanza de triángulos.

Dos triángulos van a ser semejantes si tienen la misma forma, es decir si son **exactamente iguales de forma, aunque de diferente tamaño.**



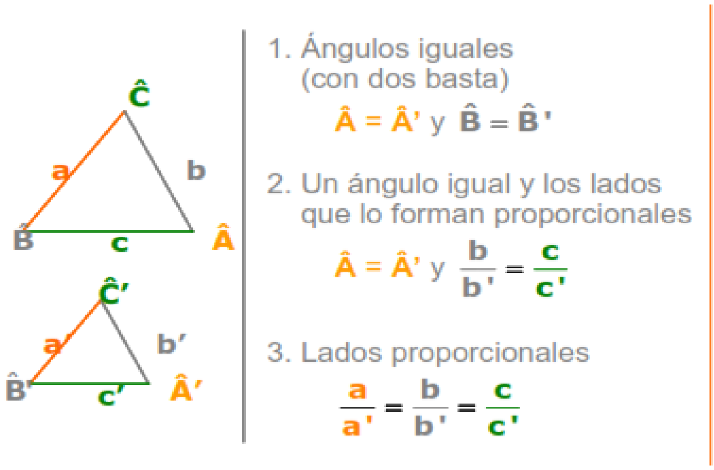
Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales.



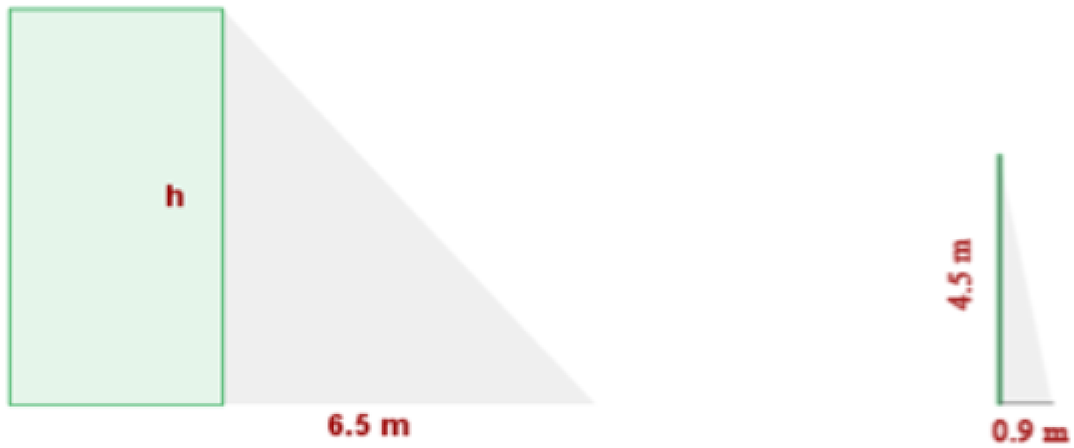
Es decir, $A = A'$, $B = B'$ y $C = C'$ (ángulos iguales) y $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$ siendo r la razón de semejanza.

Propiedad:

Dos triángulos son semejantes si cumplen alguno de los criterios de la derecha, llamados criterios de semejanza



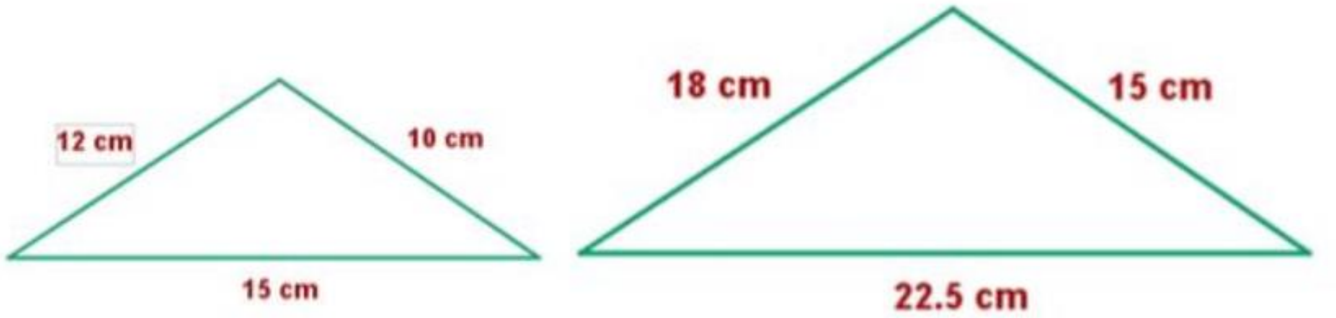
Ejemplo: Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6,5 m a la misma hora que un poste de 4,5 m de altura da una sombra de 0,90 m.



$$\frac{0.9}{6.5} = \frac{4.5}{x} \qquad x = \frac{6.5 \cdot 4.5}{0.9} = 32.5\,\text{m}$$

Ejemplo: Razona si son semejantes los siguientes triángulos:

a)



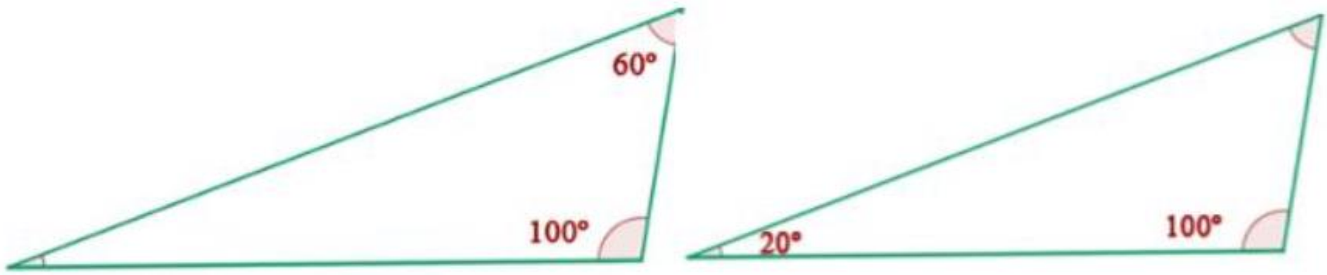
$$\frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{15}{22.5}$$

$10 \cdot 18 = 12 \cdot 15 \qquad 180 = 180$

$10 \cdot 22.5 = 15 \cdot 15 \qquad 225 = 25$

Son **semejantes** porque tienen los **lados proporcionales**.

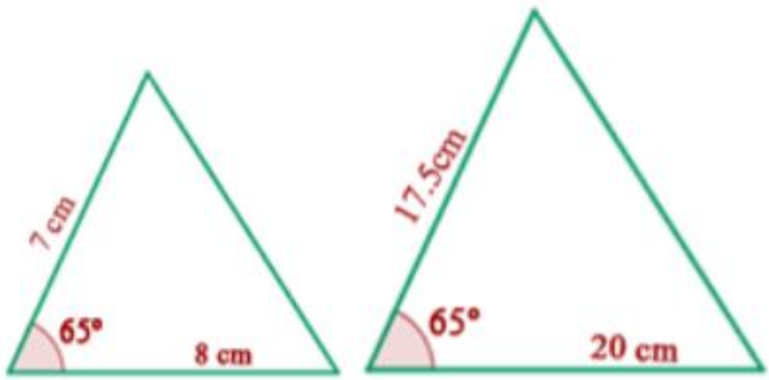
b)



$180^\circ - 100^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

Son **semejantes** porque tienen **dos ángulos iguales**.

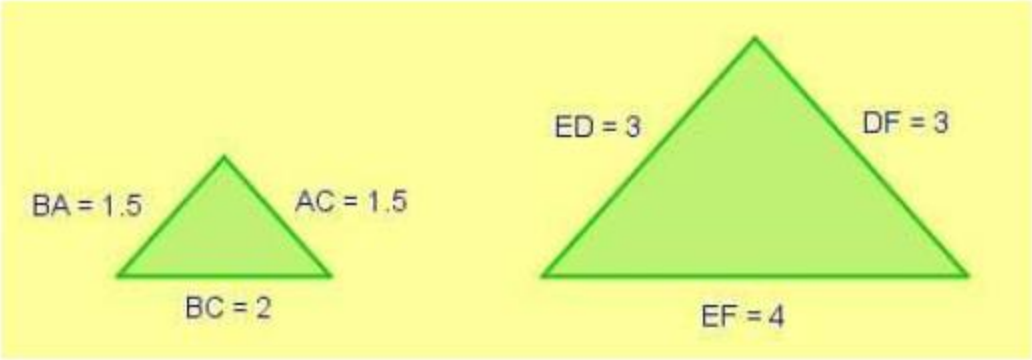
c)



$\frac{20}{17.5} = \frac{8}{7} \qquad 20 \cdot 7 = 17.5 \cdot 8 \qquad 140 = 140$

Son **semejantes** porque tienen **dos lados proporcionales** y **un ángulo igual**.

Ejemplo: Comprueba que los siguientes triángulos son semejantes:



Hemos medido la longitud de los lados, y vemos que los lados del segundo triángulo son el doble que los del primero.

Cuando al dividir cada lado de un triángulo entre el que le corresponde del otro triángulo nos da el mismo número, entonces los triángulos son semejantes.

3:1,5 = 2

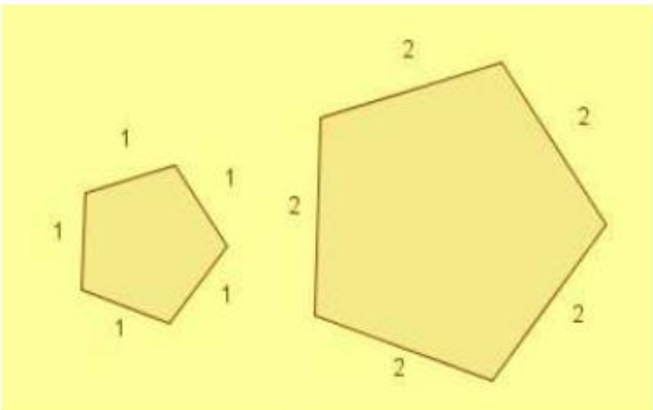
4 : 2= 2

Este número, el 2, recibe el nombre de **razón de semejanza** . El nombre de razón viene porque es sinónimo de división, es decir división y razón es lo mismo.

Semejanza de polígonos.

Para comprobar que dos polígonos son semejantes, lo que hacemos es lo mismo de antes. Nuestra observación es importante, pero debemos hacer una comprobación matemática:
Dividimos las longitudes de cada lado de uno de los polígonos entre los que le corresponden del otro y si obtenemos el mismo resultado, entonces serán semejantes, y ese número será la **razón de semejanza.**

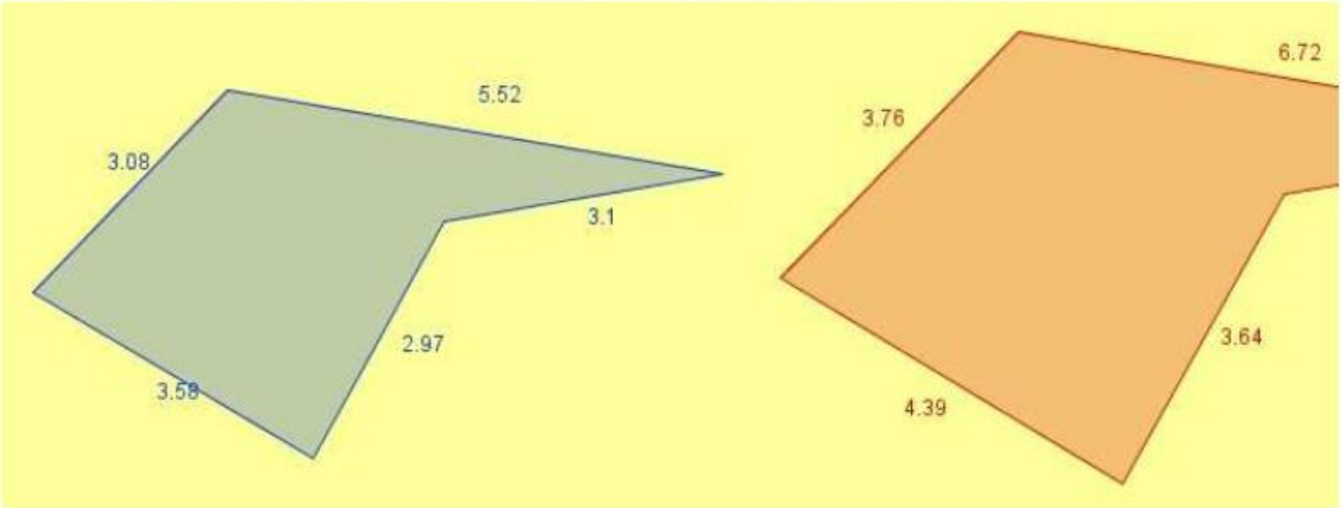
Ejemplo:



Como ves, los pentágonos son iguales, y al dividir cada lado por el que le corresponde, tenemos que la división nos sale 2. La razón de semejanza es 2, y **los pentágonos son semejantes** .

Ejemplo:

Comprueba si las siguientes figuras son semejantes. En tal caso, calcula la razón de semejanzas:



Solución:

Vamos a dividir los lados que se corresponden:

$\frac{6,72}{5,52}=1,2173913;\ \frac{3,75}{3,1}=1,2173913;\ \frac{3,64}{2,97}=1,2173913;\ \frac{4,39}{3,58}=1,2173913;\ \frac{3,76}{3,08}=1,2173913;$ como ves, siempre obtenemos lo mismo, ya que son semejantes. La razón de semejanza es aproximadamente 1,22

Relación entre las áreas y entre los volúmenes de figuras semejantes

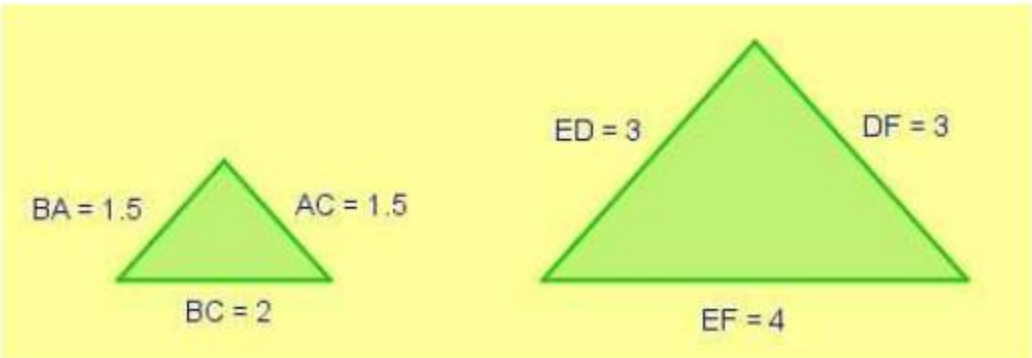
La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al **cuadrado de la razón de semejanza**.

La razón entre los volúmenes de dos figuras semejantes es igual **al cubo de la razón de semejanza.**

Por tanto, si la razón de semejanza entre dos figuras es r , la razón entre sus áreas es r^2 y la razón entre sus volúmenes r^3 .

Ejemplo:

Dados los triángulos:

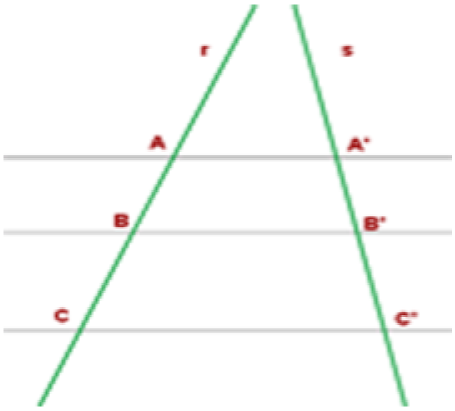


Si nos dicen que el área del triángulo pequeño es 5 m^2, como la razón de semejanza es $r = 2$, tenemos que el área del triángulo grande es: $5 \cdot 2^2 = 20\,\text{m}^2$

2 TEOREMA DE THALES

Teorema de Thales:

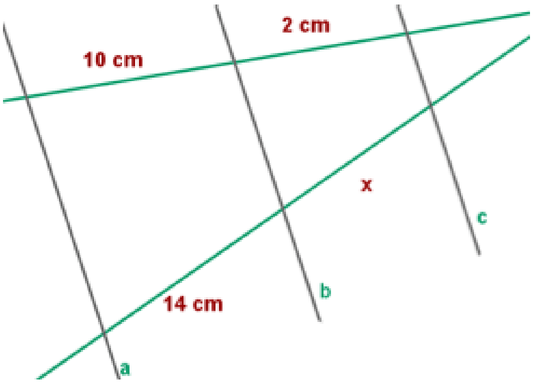
Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

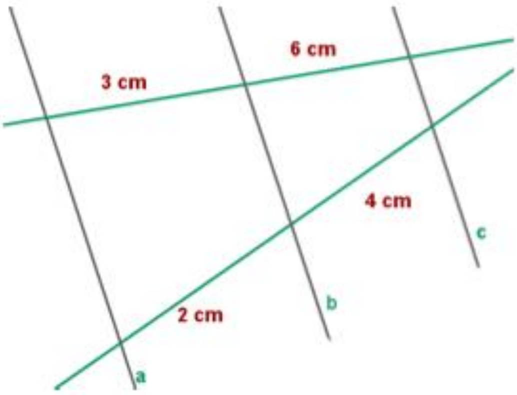
Ejemplo:

1. Las rectas a, b y c son paralelas. Halla la longitud de x.



$$\frac{14}{10} = \frac{x}{4} \qquad x = \frac{14 \cdot 4}{10} = 5.6\ cm$$

2. Las rectas a, b son paralelas. ¿Podemos afirmar que c es paralela a las rectas a y b?

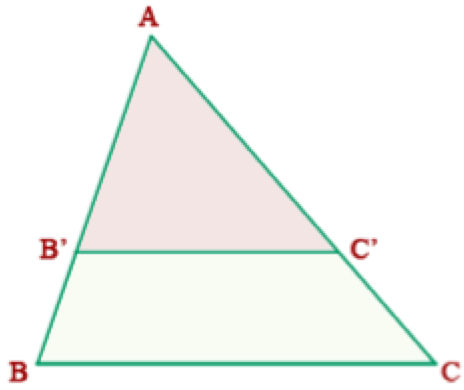


Sí, porque se cumple el **teorema de Thales**.

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \qquad 12 = 12$$

Teorema de Thales en un triángulo

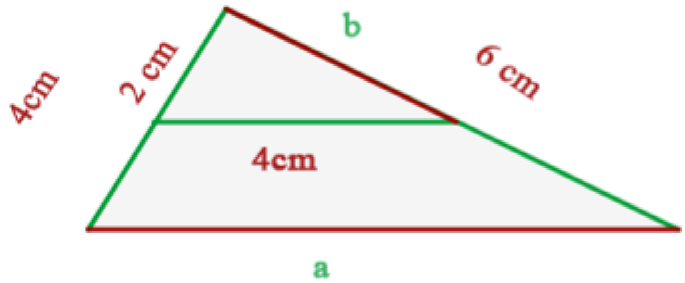
Dado un **triángulo ABC**, si se traza un **segmento paralelo, B'C',** a uno de los **lados** del triangulo, se obtiene otro **triángulo AB'C'**, cuyos **lados** son **proporcionales** a los del **triángulo ABC**.



$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Ejemplo:

Hallar las medidas de los segmentos a y b.

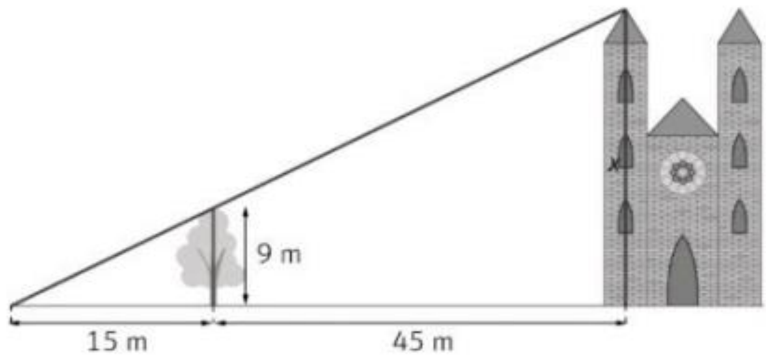


$$\frac{4}{2} = \frac{a}{4} \qquad a = 8\,cm$$

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{b} \qquad b = 3\,cm$$

Ejemplo:

Calcula la altura de la torre de la iglesia.

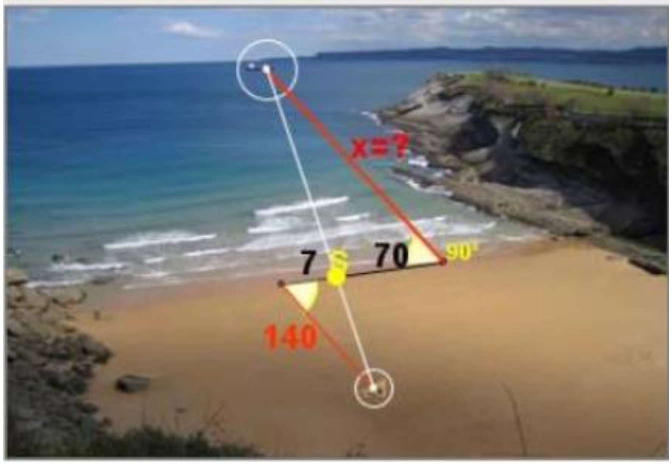


Los triángulos de la figura son semejantes, por lo que:

$$\frac{60}{15} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 9}{15} = 36$$

La altura de la torre de la iglesia es 36 m.

Ejemplo: Para calcular la distancia desde la playa a un barco se han tomado las medidas de la figura. Calcula la distancia al barco.



Tenemos que los dos triángulos son semejantes por ser rectángulos y en el punto S tener el mismo ángulo. Luego:

$$\frac{x}{140}=\frac{70}{7}\Rightarrow x=\frac{140\cdot 70}{7}\Rightarrow x=1400\text{ m}$$

3 ESCALAS

Una **escala** es la relación matemática que existe entre la realidad y el dibujo que de ella se hace sobre un plano, es decir, se escriben en forma de razón donde el antecedente indica el valor del plano y el consecuente el valor de la realidad. Por ejemplo, si tenemos 1:20 o 1/20 dado en metros significa que cada metro del mapa son 20 metros en la realidad. Otro ejemplo, si tenemos 1:500000 dados en centímetros tenemos que cada centímetro del mapa, en la realidad son 500000 centímetros, es decir, 5 kilómetros.

Las escalas se clasifican dependiendo de la relación en el antecedente y el consecuente pueden ser:

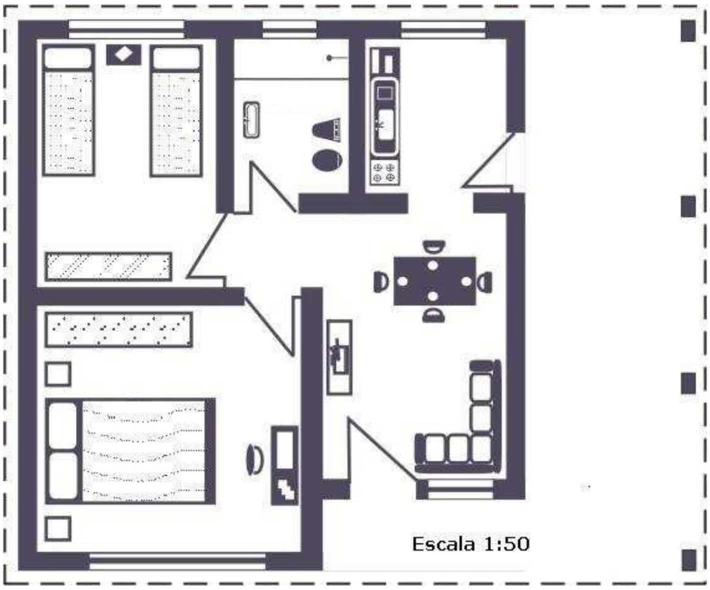
i. Escalas de ampliación, si el antecedente es más grande que el consecuente. Ejemplos: 100:1, 20:1, 5:1, 2:1. Por ejemplo, para representar objetos muy pequeños, como una célula.

ii. Escala natural, si el antecedente y el consecuente coinciden plenamente, es decir, 1:1. En este caso se representa en tamaño real.

iii. Escala de reducción, si el antecedente es más pequeño que el consecuente. Ejemplos: 1:2, 1:5, 1:10, 1:20, 1:50, 1:100. Por ejemplo, un mapa o un plano de la planta de una casa.

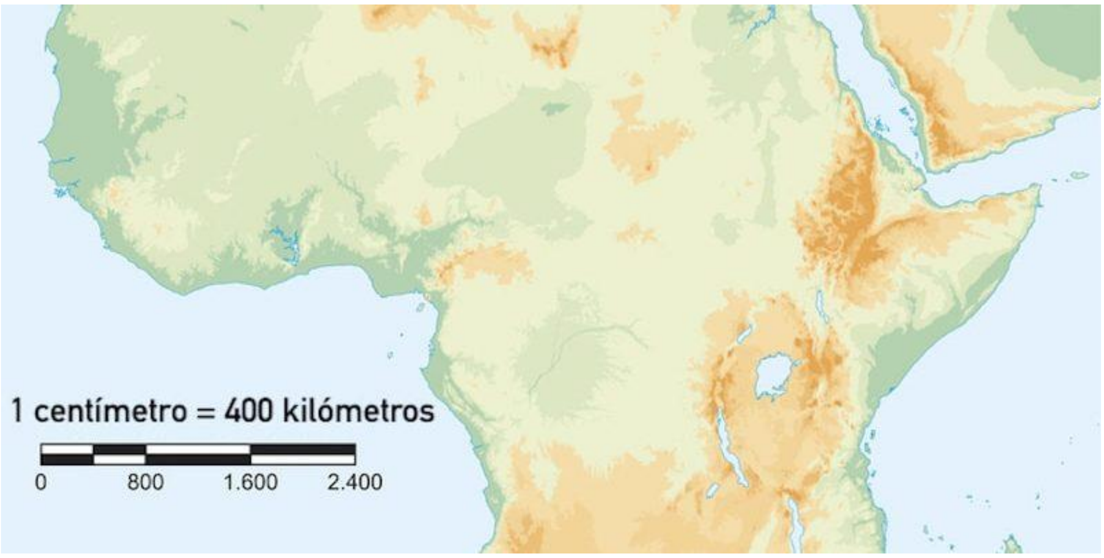
Las escalas pueden de tres tipos dependiendo de cómo se representa la realidad en el mapa.

i. **Escala numérica**, la relación entre el antecedente y el consecuente tienen las mismas unidades. Por ejemplo, teniendo 1:6000 si está en el plano a 1 metro en la realidad estarán a 6000 metros, y así con cualquier unidad que tomemos.



ii. **La escala textual o unidad por unidad**, es la igualdad expresa de dos longitudes: la del mapa (antecedente) y la de la realidad (consecuente). Ejemplos: 1 cm = 4 km; 2 cm = 500 m.

iii. **La escala gráfica,** es la representación dibujada de la escala unidad por unidad, donde cada segmento muestra la relación entre la longitud de la representación y el de la realidad. Un ejemplo de ello sería:



En este dibujo anterior tenemos la escala textual y la escala gráfica.

Como cuanto menor sea la relación entre el antecedente y el consecuente, el plano será más detallado. Depende de lo que se quiera representar desde los planos de una casa hasta representar toda la tierra o el sistema solar.

<u>Ejemplo</u>:

1. Si en un plano de una ciudad, dos localidades están separadas por 25 cm. ¿Cuál sería la distancia entre las dos, si la escala del plano es 1:50000?

Solución:

Si 1 cm en el plano → 50000 cm reales
25 cm en el plano → X

$$X = \frac{25\ cm * 50000\ cm}{1\ cm} = 1.250.000\ cm\ que\ equivalen\ a\ 12{,}5\ Km$$

Ejemplo:

2. Un alumno va a realizar un plano de su habitación a escala 1:20. Si su habitación tiene 5m de largo. ¿Cuánto deberá medir el plano?

Solución:

Si 1 cm en el plano → 20 cm reales
X → 5 m (500 cm) reales

$$X = \frac{1\ cm * 500\ cm}{20\ cm} = 25\ cm\ que\ equivalen\ a\ 0{,}25\ m$$