HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 10: **GEOMETRÍA AFÍN DEL ESPACIO**

Ejercicio 1: Considera los puntos $A(1,1,1), B(2,2,2), C(1,1,0)$ y $D(1,0,0)$,

a) Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos A y B y no corta a la recta determinada por C y D.

b) Halla las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos AB y CD.

a) $A(1,1,1)$ $\quad \vec{CD} = (0,-1,0)$

$\vec{AB}(1,1,1)$

$$\pi(A, \vec{AB}, \vec{CD}): \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x-1-(z-1)=0$$

$$x-1-z+1=0 \; ; \quad \boxed{\pi: x-z=0}$$

b) $\vec{AB} = (1,1,1)$ $\quad PM_{AB} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\vec{CD} = (0,-1,0)$ $\quad PM_{CD} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$

$$r: \left.\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = \frac{3}{2} - t \\ z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2: Sabiendo que las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z = 1 \\ x-y = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2y-z = a \\ 2x+z = a \end{cases}$ se cortan, determina a y el punto de corte.

2 Si r y s se cortan, determine "a" y el pto de corte:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=2 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x-2y-z=a \\ 2x+z=a \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y-z=1 \\ x-y \quad\ \ =2 \\ x-2y-z=a \\ 2x+z=a \end{array}\right\}$$

Debe ser S. C. D. rango $A=3$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 1 & -2 & -1 & | & a \\ 2 & 0 & 1 & | & a \end{pmatrix}$$

$\det(F_1F_2F_3)=$
$=+1+2-1-1=$
$=1$

Debe ser $|A^*|=0$, desarrollando por 4ª fila.

$$-2\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2\cdot(0+4+1-0-2-a)-(-a-2-2+1+4+a)+a\cdot 1=0$$

$$-2(3-a)-(+1)+a=0$$

$$-6+2a-1+a=0$$

$$3a-7=0;\quad a=7/3 \qquad \boxed{a=7/3}$$

Pto corte:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ x-y=2 \\ x-2y-z=7/3 \end{array}\right\}$$

(Suprimo E_4) porque $|A|=1$ (ya lo sabíamos)

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ x-y \quad =2 \\ 3x-6y-3z=7 \end{array}\right\}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=1$$

$|A'|=3|A|=3$

Por Cramer:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix}}{|A'|}=-\frac{4}{3} \qquad x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -6 & -3 \end{vmatrix}}{|A'|}=\frac{14}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 7 \end{vmatrix}}{|A'|}=\frac{-7+\cancel{6}-\cancel{6}+3+12-7}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{P\left(\frac{14}{3},\frac{-4}{3},\frac{1}{3}\right)}$$

Ejercicio 3: Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+z-a = 0 \\ y-az-1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x-y=b$.

a) Determina a y b sabiendo que r está contenida en π.

b) Halla la ecuación de un plano que contenga a r y sea perpendicular a π.

a) El sistema debe ser S.C.I.

$$\left.\begin{aligned} x+z&=a \\ y-az&=1 \\ 2x-y&=b \end{aligned}\right\} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 2 & -1 & 0 & b \end{array}\right)$$

Debe ser $|A|=0$ para que rango $(A)=2=$ rango A^*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-2-a=0$$

$$-2-a=0 \; ; \quad a=-2$$

y debe ser $\det(C_2, C_3 \text{ y } C_4)=0$ para que rango $A^*=2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0-1-0-4-0-b=0$$

$$-1-4-b=0 \; ; \quad b=-5$$

Así que: $\boxed{a=-2,\ b=-5}$

b) $\left.\begin{aligned} x+z-a&=0 \\ y-az-1&=0 \end{aligned}\right\} r \qquad \pi: 2x-y-b=0$

$\vec{n}(2,-1,0) \subset \pi'$

$$\left.\begin{aligned} x&=a-\lambda \\ y&=1+a\lambda \\ z&=\lambda \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &P(a,1,0) \\ &\vec{v}(-1,a,1) \end{aligned}\right\} \subset \pi' \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{array}\right)$$

rango $A=2$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\pi': (x,y,z)=(a,1,0)+\lambda(-1,a,1)+\mu(2,-1,0)$$

si $a=-2$? $\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4: Calcula a sabiendo que los planos $ax+y-7z=-5$ y $x+2y+a^2z=8$ se cortan en una recta que pasa por el punto $A(0,2,1)$ pero que no pasa por el punto $B(6,-3,2)$.

4

$$\left.\begin{array}{l} ax+y-7z=-5 \\ x+2y+a^2z=8 \end{array}\right\}$$ recta que pase por $A(0,2,1)$ pero no por $B(6,-3,2)$

$A\in r \begin{cases} a\cdot 0+2-7\cdot 1=-5 \\ 0+2\cdot 2+a^2\cdot 1=8 \end{cases}$ $2-7=-5$ no nos da información.

$\Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$

Si $a=2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y-7z=-5 \\ x+2y+4z=8 \end{array}\right\}$ $A\in r$, $B\notin r$

$\begin{cases} 2\cdot 6-3-7\cdot 2=-5 & \text{Sí} \\ 6+2\cdot(-3)+4\cdot 2=8 & \text{Sí} \end{cases}$ luego $B\in r$

así que $a\neq 2$

$\boxed{\text{R: Debe ser } a=-2}$

Ejercicio 5: Considera los tres planos $\pi_1 \equiv x+y+z=1$, $\pi_2 \equiv x-y+z=2$ y $\pi_3 \equiv 3x+y+3z=5$.
¿Se cortan π_1 y π_2? ¿Hay algún punto que pertenezca a los tres planos?

<u>Sol</u>*:*
Estudiemos el sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas determinado por las ecuaciones de los dos planos:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ Como se observa: $rang(A)=rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=2=rang(A^*)=rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}<3=$ nº incóg.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, se trata de un sistema compatible indeterminado (infinatas soluciones), es decir, los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta.

Veamos si los tres planos se cortan en algún punto estudiando el sistema asociado: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ 3x+y+3z=5 \end{cases}$

<u>Rango matriz de coeficientes</u>:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3+3+1+3-1-3=0 \Rightarrow rang(A)\leq 2$$

Como el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, tenemos pues que $rang(A)=2$

<u>Rango matriz ampliada</u>:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ Menores de orden 3: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5+6+1+3-2-5 = -2 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2 \neq rang(A^*) = 3 \Rightarrow$$ Por el teorema de Rouché-Fröbenius, se trata de un sistema incompatible, por tanto, no hay corte entre los tres planos.

Ejercicio 6: Dada la recta r definida por $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3$ y la recta s definida por $\begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.

$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = -z+3 \Rightarrow \left.\begin{matrix} P(1,-1,3) \\ \vec{u}(3,2,-1) \end{matrix}\right\} r$

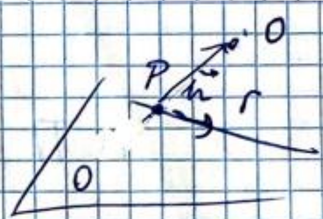
$-z+3 \to \frac{z-3}{-1}$

$s: \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$

$2y + 2 = z$

$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} P'(1,0,2) \\ \vec{v}(0,1,2) \end{matrix}\right\} s$

a) Plano que contiene al origen y a r:



$(0,0,0)$, $\vec{u}(3,2,-1)$, $\vec{OP} = (1,-1,3)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$6x - y - 3z - 2z - x - 9y = 0$

$$\boxed{\pi: 5x - 10y - 5z = 0}$$

b) Plano que contiene a s y es paralelo a r:

$$s\left\{\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right. = 0 \qquad \vec{u}_r \rightarrow$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (z-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-5(x-1)+6y-3(z-2)=0$$

$$-5x+5+6y-3z+6=0$$

$$\boxed{\pi': -5x+6y-3z+11=0}$$

Ejercicio 7: Sean los puntos $A(0,0,1), B(1,0,-1), C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$

a) Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

b) Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.

Sol:

a) Vamos a tomar como vectores directores $\overrightarrow{AB}=(1,0,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,1,-3)$ y por ejemplo el punto por donde pasa $A(0,0,1)$. Así $\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv z-1+2x+3y=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+3y+z-1=0$

b) Si fueran coplanarios, el punto D habría de pertenecer al plano π. Sustituimos D en la ecuación del plano π: $2\cdot 1+3\cdot 2+0-1=7\neq 0 \Rightarrow A,B,C$ y D no son coplanarios.

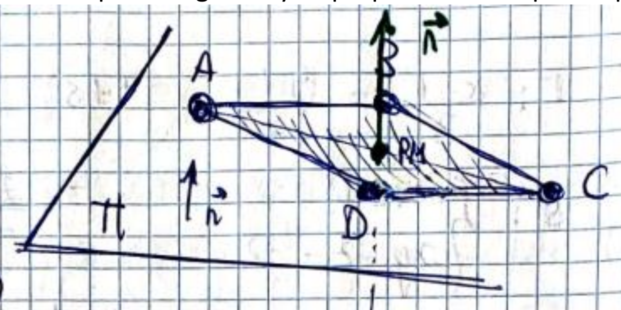
Ejercicio 8: De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos $A(2,-1,0), B(-2,1.0)$ y $C(0,1,2)$. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

(8) ABCD paralelogramo

$A(2,-1,0)$

$B(-2,1,0)$

$C(0,1,2)$ $\quad D(x,y,z)$



(Recta que pasa por el centro del paralelogramo; una diagonal: la que pasa por A y C (No)

$A(2,-1,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(-2,2,2)$

y que es $\perp$ al plano que contiene al paralelogramo)

• π que contiene al paralelogramo: A, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$

$A(2,-1,0)$

$\vec{AB}\,(-4,2,0)$

$\vec{AC}\,(-2,2,2)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$4(x-2)+8(y+1)-4z=0$

$4x-8+8y+8-4z=0$

$\boxed{\pi: 4x+8y-4z=0}$

$\vec{n}=(4,8,-4)$ debe ser el director de r

y $PM=PM_{\vec{AC}}=\left(\frac{2+0}{2},\frac{-1+1}{2},\frac{0+2}{2}\right)=(1,0,1)$

$\boxed{r: \frac{x-1}{4}=\frac{y}{8}=\frac{z-1}{-4}}$

<u>Ejercicio 9</u>: Sean las rectas $r\equiv\begin{cases} x+y-z = 6 \\ x+z = 3 \end{cases}$ y $s\equiv\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{6}=\frac{z}{2}$

a) Determina el punto de intersección de ambas rectas.
b) Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

<u>Sol</u>:

a) Pasamos la recta s a paramétricas: $s\equiv\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-1+6\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$. Consideremos un punto genérico de la recta s a partir de las paramétricas: $A_s(1-\lambda,-1+6\lambda,2\lambda)$ y ahora imponemos que $A_s\in r$, para poder calcular λ.

$\begin{cases} 1-\lambda-1+6\lambda-2\lambda = 6 \\ 1-\lambda+2\lambda = 3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3\lambda=6\Rightarrow\lambda=2 \\ \lambda=2 \end{cases}$ (NOTA: Si hubiesen salido λ distintos, no tendrían punto de corte y por tanto no serían secantes)

El punto de corte es por tanto para $\lambda=2\Rightarrow A(1-2,-1+12,4)=A(-1,11,4)$

b) Para determinar el plano π que contiene a las dos rectas (que existe puesto que son secantes) necesitamos un punto y dos vectores directores. Como punto podemos usar $A(-1,11,4)$ calculado en el apartado anterior o bien $B(1,-1,0)$ que es inmediato a partir de las ecuaciones de s

Los vectores los obtenemos de los vectores directores de las dos rectas. Obviamente $\vec{u_s}=(-1,6,2)$ y calculamos el director de r pasando ésta a paramétricas haciendo $x=\lambda$:

$$r\equiv\begin{cases} \lambda+y-z = 6 \\ \lambda+z = 3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=6-\lambda+3-\lambda\Rightarrow y=9-2\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=9-2\lambda\Rightarrow\vec{u_r}=(1,-2,-1) \\ z=3-\lambda \end{cases}$$

Luego el plano solicitado es, tomando el punto $B(1,-1,0)$:

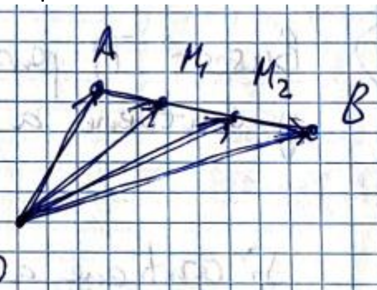
$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -6(x-1)+2(y+1)+2z-6z+4(x-1)-(y+1)=0 \Rightarrow \pi \equiv -2x+y-4z+3=0$$

Ejercicio 10: Considera los puntos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$.

a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales.

b) Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por A.

a) $\overrightarrow{AB} = (-2,-2,2)$



$OM_1 = (1,2,1) + \frac{1}{3}(-2,-2,2)$

$= (1,2,1) + \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$M_1 \quad (x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_1}$

$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_2}$

$OM_2 = (1,2,1) + \frac{2}{3}(-2,-2,2)$

$= (1,2,1) + \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$M_2 \quad (x,y,z) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$

b) $\pi \perp \overrightarrow{AB}$ y $A \in \pi$. $\quad A(1,2,1)$

$\overrightarrow{AB} = (-2,-2,2)$ es el $\vec{n}$ del plano

$Ax+By+Cz+D=0$

$-2x-2y+2z+D=0$

$A \in \pi \Rightarrow -2\cdot 1 - 2\cdot 2 + 2\cdot 1 + D = 0$

$-2-4+2+D=0 \quad D=$

$\pi \equiv -2x-2y+2z+4=0$

Ejercicio 11: Sean los puntos $A(1,1,1), B(-1,2,0), C(2,1,2)$ y $D(t,-2,2)$

a) Determina el valor de t para que A, B, C y D sean coplanarios.

b) Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por A y B, que contenga al punto C.

Sol:

a) Vamos a calcular el plano que pasa por los puntos A, B y C y después imponemos que D pertenezca a dicho plano y de ahí obtendremos t.

Los vectores directores de ese plano son: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2,1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (1,0,1) \end{cases}$ y tomemos el punto $A(1,1,1)$, luego:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x-1-y+1-z+1+2y-2=0 \Rightarrow \pi \equiv x+y-z-1=0$$

Si $D(t,-2,2)\in\pi \Rightarrow t-2-2-1=0 \Rightarrow t=5$

b) El vector $\overrightarrow{AB}=(-2,1,-1)$ es el vector normal del plano pedido $\Rightarrow \pi \equiv -2x+y-z+M=0$

Como $C(2,1,2)\in\pi \Rightarrow -4+1-2+M=0 \Rightarrow M=5$

El plano pedido es $\pi \equiv -2x+y-z+5=0$

Ejercicio 12: Halla la ecuación del plano que es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+11 = 0 \\ 2y+z-19 = 0 \end{cases}$ y contiene a la recta $s \equiv \begin{cases} x = 1-5\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

Buscar Π paralelo a $r \equiv \begin{cases} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{cases}$

y contiene a $s \equiv \begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

Si contiene a s: $P(1,-2,2)$ y $\vec{u}(-5,3,2)$

$r \equiv \begin{cases} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{cases}$

$z=19-2y$; $z=19-2\lambda$

$y=\lambda$; $x=2y-11$

$x=2\lambda-11$

$r \equiv \begin{cases} x=-11+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=19-2\lambda \end{cases}$ $\quad \vec{u}\,'=(2,1,-2)$

$$\Pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & +1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y+2)\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (z-2)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-8(x-1)-6(y+2)-11(z-2)=0$$

$$-8x+8-6y-12-11z+22=0$$

$$\boxed{-8x-6y-11z+18=0}$$

Ejercicio 13: Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones:

$$x+y=1,\ \ ay+z=0\ \ \text{y}\ \ x+(1+a)y+az=a+1.$$

a) ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común?

b) Para $a=0$, determina la posición relativa de los planos.

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ ay+z=0 \\ x+(1+a)y+az=a+1 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = 0$

$a^2+1-1-a=0$

$a^2-a=0 \quad a(a-1)=0 \ \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$

- Si $a\neq 0, a\neq 1$

Rango $(A)=3=$ Rango(A^*)

S.C.D. $\rightarrow$ se cortarán en un punto.

- Si $a=0$ rango $(A)=2$

rango $(A^*)=2$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$\qquad\qquad C_2 \ \ C_3 \ \ C_4$

$F_1=F_2$

Así que rango$(A^*)=2$

Tienen en común una recta:

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow z=0$$

$y=\lambda$

$x+y=1$

$x=1-\lambda$

$$r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

- Si $a=1$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

rango $A=2$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\neq 0$

rango $A^*=3$

$\det(C_1,C_2,C_3)=|A|=0$

$\det(C_1,C_2,C_4)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$

$=2-1=1\neq 0$

rango$(A^*)=3$

S.I. Tres planos que se cortan dos a dos, formando un prisma.

b)

Ejercicio 14: Considera el punto $P(1,0,0)$, la recta r definida por $x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ y la recta s definida por $(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0)$.

a) Estudia la posición relativa de las dos rectas.
b) Halla la ecuación del plano que pasando por P es paralelo a r y s .

Sol:

a) Tenemos por los datos que $r\equiv\begin{cases}A_r(3,0,-1)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,2,-2)\end{cases}$ y que $s\equiv\begin{cases}A_s(1,1,0)\\ \overrightarrow{u_s}=(-1,2,0)\end{cases}$

Como $rang(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=rang\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}=2$ (pues no son proporcionales) $\Rightarrow r$ y s se cortan o se cruzan

Tenemos que $\overrightarrow{A_rA_s}=(-2,1,1)$.

Estudiemos ahora el $rang(\overrightarrow{A_rA_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=rang\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

Menores de orden 3: Sólo hay uno $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=2+2+2-8=-2\neq 0\Rightarrow rang(\overrightarrow{A_rA_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=3\Rightarrow r$ y s se cruzan.

b) Si el plano es paralelo a r y s, sus vectores directores son los vectores directores de r y s, y el punto por donde pasa es $P(1,0,0)$, con lo cual:

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ 1 & 2 & -2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow\pi\equiv 2y+2z+2z+4x-4=0\Rightarrow\pi\equiv 4x+2y+4z-4=0\Rightarrow\pi\equiv 2x+y+2z-2=0$$

Ejercicio 15: Considera la recta $r\equiv\begin{cases}x+y+z=1\\ x-2y+3z=0\end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que contiene a r y no corta al eje OZ.
b) Calcula la proyección ortogonal del punto $A(1,2,1)$ sobre la recta r .

a) $z=\lambda$; $\begin{cases}x+y=1-\lambda\\ x-2y=-3\lambda\end{cases}$ $\begin{cases}2x+2y=2-2\lambda\\ x-2y=-3\lambda\end{cases}$

$3x=2-5\lambda$

$x=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\lambda$

$\begin{cases}x+y=1-\lambda\\ -x+2y=+3\lambda\end{cases}$

$3y=1+2\lambda$ $\quad y=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\lambda$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\lambda \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Si π no corta al eje OZ, $(\vec{k}(0,0,1))$ deberá contener la dirección del eje OZ, el vector $\vec{k}(0,0,1)$

Si $\lambda = 1 \Rightarrow P(-1, 1, 1)$

$\vec{u}\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) \parallel (-5, 2, 3)$

$\vec{v} = \vec{k} = (0,0,1)$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$2(x+1) + 5(y-1) = 0$$

$$\boxed{\pi : \ 2x + 5y - 3 = 0}$$

b) Proyección ortogonal de $A(1,2,1)$ sobre r.

$$\begin{cases} \pi : \pi \perp r \text{ y que pase por } A \\ P = \pi \cap r \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} P(-1,1,1) \\ \vec{u}(-5,2,3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi \text{ que pase por } A \text{ y es } \perp r \\ P = \pi \cap r \end{cases} \qquad \vec{n} = \vec{v}_r = (-5, 2, 3)$$

$$-5x + 2y + 3z + D = 0$$

$$A(1,2,1) \in \pi \Rightarrow -5 + 4 + 3 + D = 0$$

$$2 + D = 0$$

$$D = -2$$

$$\pi \equiv -5x + 2y + 3z - 2 = 0$$

$$P = \pi \cap r \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ -5x + 2y + 3z = 2 \end{cases} \qquad P\left(\frac{1}{19}, \frac{11}{19}, \frac{7}{19}\right)$$

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 5F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 8 & 7 \end{array}\right) 3F_3 + 7F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 38 & 14 \end{array}\right)$$

E_3: $38z = 14$; $z = \frac{14}{38}$; $z = \frac{7}{19}$

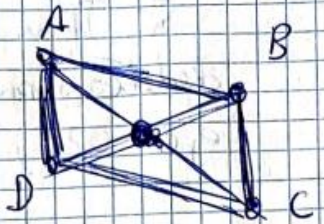
E_2: $-3y + 2z = -1$; $-3y = -1 - 2z$; $y = \frac{1}{3}(1+2z)$

E_1: $x+y+z=1$; $x = 1-y-z$; $x = \frac{1}{19}$ $y = \frac{11}{19}$

Ejercicio 16: Los puntos $A(-2,3,1)$, $B(2,-1,3)$ y $C(0,1,-2)$ son los vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

a) Halla las coordenadas del vértice D.
b) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.
c) Halla la ecuación del plano que contiene a paralelogramo.

(16) $A(-2,3,1)$
$B(2,-1,3)$
$C(0,1,-2)$
$D(x,y,z)$



$\vec{AB} \parallel \vec{DC}$

$\vec{BC} \parallel \vec{AD}$

$d(A,B) = d(C,D)$

$|\vec{AB}|$ $|\vec{CD}|$

a) $\vec{AB} = (4,-4,2)$ $\vec{BC} = (-2,2,-5)$

$\vec{DC} = (x, y-1, z+2)$ $\vec{AD} = (x+2, y-3, z-1)$

PM de la diagonal $\overline{AC}$ debe ser el mismo de la diagonal $\overline{BD}$

$PM = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{1+-2}{2}\right)$

$PM = \left(-1, 2, -\frac{1}{2}\right)$

$PM = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{3+z}{2}\right)$

Igualando ambos puntos, coordenada a coordenada:

$$\left(\frac{x+2}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{3+z}{2}\right) = \left(-1, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

$\frac{x+2}{2} = -1$; $x+2 = -2$; $x = -2-2$ $x = -4$

$\frac{-1+y}{2} = 2$; $-1+y = 4$; $y = 5$ $\boxed{D(-4, 5, -4)}$

$\frac{3+z}{2} = -\frac{1}{2}$; $3+z = -1$; $z = -1-3$; $z = -4$

b) r que pase por B y es ∥ a la diagonal AC

$B(2,-1,3)$; diagonal AC : $\vec{AC}=(2,-2,-3)$

$$\boxed{r:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-3}}$$

c) Π que contiene al paralelogramo ABCD.

$A(-2,3,1)$

$\vec{AB}\ (4,-4,2)$

$\vec{AC}\ (2,-2,-3)$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$(x+2)\cdot\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}-(y-3)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}+(z-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$16(x+2)+16(y-3)=0$$

$$16x+16y+32-48=0$$

$$\boxed{\Pi:\ 16x+16y+16=0}$$

Ejercicio 17: Sea la recta r dada por $\begin{cases} 2x+y-mz=2 \\ x-y-z=-m \end{cases}$ y el plano π definido por $x+my-z=1$.

a) ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos?
b) ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano?
c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano para $m=0$?

Estudiemos el sistema de ecuaciones asociado y después respondemos a los apartados: (lo hacemos de forma resumida)

$$\begin{cases} 2x+y-mz=2 \\ x-y-z=-m \\ x+my-z=1 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -m \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=-m^2+m+2$$. Igualamos a 0: $-m^2+m+2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$

<u>CASO 1</u>: $m\neq -1,-2 \Rightarrow rang(A)=3$ $rang(A^*)=3$ Por R-F es un SCD	<u>CASO 2</u>: $m=-1\Rightarrow$ $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x-y-z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$ $\Rightarrow rang(A)=rang(A^*)=2<3=$nº incógnitas $\Rightarrow$ Por R-F es un SCI	<u>CASO 2</u>: $m=2\Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=2 \\ x-y-z=-2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$ $rang(A)=2$ y $rang(A^*)=3$ (lo hacéis vosotros) $\Rightarrow$ Por R-F es un SI

a) Si π y r son paralelos $\Rightarrow$ π y r no se cortan, es decir, el sistema asociado ha de ser incompatible, luego $m=2$.
b) Si la recta contenida en el plano $\Rightarrow$ el sistema asociado ha de ser compatible indeterminado $\Rightarrow$ $m=-1$.
c) Cuando $m=0$ $\Rightarrow$ el sistema asociado es compatible determinado (una única solución) $\Rightarrow$ π y r se cortan en un solo punto (son secantes)