UNIDAD 11: GEOMETRÍA EUCLÍDEA. PRODUCTO ESCALAR

CONTENIDO

1. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES LIBRES

Definición: Se llama producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se nota por $\vec{u}\cdot\vec{v}$ al nº real que se obtiene de la siguiente forma:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

, es decir, el producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman dichos vectores.

Propiedades del producto escalar:

1: El producto escalar de un vector consigo mismo coincide con el cuadrado de su módulo

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \left|\vec{u}\right|^2 \geq 0$$

2: El producto escalar es conmutativo

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

3: El producto escalar es distributivo respecto a la suma de vectores

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

4: Se cumple que para cualquier nº real λ que:

$$\left(\lambda\cdot\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\left(\lambda\cdot\vec{v}\right) = \lambda\cdot\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$

5: $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

6: Desigualdad de Cauchy-Schwarz

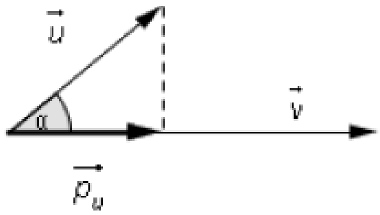
$$\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right| \leq \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|$$

7: Desigualdad de Minkowski

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \leq \left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right|$$

Proyección ortogonal de un vector sobre otro:

Consideremos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que forman entre si un ángulo α. Tenemos el vector proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, $\vec{p}_{\vec{u}}$, como se aprecia en el dibujo:



Podemos calcular el módulo de $\vec{p}_{\vec{u}}$, aplicando la definición de coseno de α al triángulo de la figura:

$$\boxed{\left|\vec{p}_{\vec{u}}\right| = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\cos\alpha\right|}$$

Ahora bien, por la definición de producto escalar tenemos: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cos\alpha \rightarrow \left|\cos\alpha\right| = \dfrac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$, sustituyendo en la expresión anterior, nos queda: $\left|\vec{p}_{\vec{u}}\right| = \left|\vec{u}\right|\cdot\dfrac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} \rightarrow \boxed{\left|\vec{p}_{\vec{u}}\right| = \dfrac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}}$

Expresión analítica del producto escalar

Considerando la base canónica $B_c = \left\{\vec{i} = (1,0,0), \vec{\mathrm{j}} = (0,1,0), \vec{\mathrm{k}} = (0,0,1)\right\}$ y es fácil ver que los productos escalares entre ellos son:

$$\begin{array}{ll} \vec{i}\bullet\vec{i} = 1 & \vec{i}\bullet\vec{j} = \vec{j}\bullet\vec{i} = 0 \\ \vec{j}\bullet\vec{j} = 1 & \vec{i}\bullet\vec{k} = \vec{k}\bullet\vec{i} = 0 \\ \vec{k}\bullet\vec{k} = 1 & \vec{j}\bullet\vec{k} = \vec{k}\bullet\vec{j} = 0 \end{array}$$

Si tenemos dos vectores $\vec{u} = (a,b,c) = a\cdot\vec{i} + b\cdot\vec{j} + c\cdot\vec{k}$ y $\vec{v} = (a',b',c') = a'\cdot\vec{i} + b'\cdot\vec{j} + c'\cdot\vec{k}$, entonces:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(a\cdot\vec{i} + b\cdot\vec{j} + c\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(a'\cdot\vec{i} + b'\cdot\vec{j} + c'\cdot\vec{k}\right)$ = aplicamos la propiedades del producto escalar

$a\cdot a'\cdot\vec{i}\cdot\vec{i} + a\cdot b'\cdot\vec{i}\cdot\vec{j} + a\cdot c'\cdot\vec{i}\cdot\vec{k} + b\cdot a'\cdot\vec{j}\cdot\vec{i} + b\cdot b'\cdot\vec{j}\cdot\vec{j} + b\cdot c'\cdot\vec{j}\cdot\vec{k} + c\cdot a'\cdot\vec{k}\cdot\vec{i} + c\cdot b'\cdot\vec{k}\cdot\vec{j} + c\cdot c'\cdot\vec{k}\cdot\vec{k} = a\cdot a' + b\cdot b' + c\cdot c'$

Por tanto,

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = a\cdot a' + b\cdot b' + c\cdot c'}$$

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{u} = (2,-1,0)$ y $\vec{v} = (-2,-1,5)$, entonces $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 2·(-2) + (-1)·(-1) + 0·5 = -3

2. APLICACIONES DEL PRODUCTO ESCALAR

a: *Módulo de un vector libre*:

Si $\vec{u}=(a,b,c)=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k} \rightarrow$ $\boxed{\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

b: *Vectores unitarios de la misma dirección que uno dado*:

Si $\vec{u}=(a,b,c)$, podemos obtener dos vectores unitarios y en la misma dirección que él, obviamente de sentido opuesto. Estos son:

$$\vec{u}_1=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

$$\vec{u}_2=\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

c: *Ángulo entre dos vectores*

Si tenemos dos vectores $\vec{u}=(a,b,c)$ y $\vec{v}=(a',b',c')$, entonces el ángulo entre ellos:

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} \rightarrow \boxed{\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{a\cdot a'+b\cdot b'+c\cdot c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}}$$

d: *Vectores ortogonales (perpendiculares entre si)*

Dos vectores $\vec{u}=(a,b,c)$ y $\vec{v}=(a',b',c')$ son ortogonales y se nota $\vec{u}\perp\vec{v}$, si y sólo si su producto escalar es 0, $\vec{u}\cdot\vec{v}=a\cdot a'+b\cdot b'+c\cdot c'=0$

e: *Vector normal a un plano*

Como ya sabemos del tema anterior, dado un plano en forma implícita, $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$, el vector normal a ese plano es $\vec{n}=(A,B,C)$

3. ÁNGULOS ENTRE ELEMENTOS DEL ESPACIO

a: *Ángulo entre dos rectas*

Vamos a partir de que de las dos rectas podemos conocer sus vectores directores y también, como es obvio, un punto por donde pasan. Así, sean las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}\text{Pasa por } P(x_1,y_1,z_1)\\ \text{Vector director: } \vec{u}=(a,b,c)\end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases}\text{Pasa por } Q(x_2,y_2,z_2)\\ \text{Vector director: } \vec{v}=(a',b',c')\end{cases}$$

El ángulo que forman las rectas es el mismo que el que forman sus vectores directores, es decir:

$$\cos\left(\widehat{r,s}\right)=\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{a\cdot a'+b\cdot b'+c\cdot c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

A partir de esta expresión deducimos que:

1) $r \perp s \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2) $r \parallel s \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = t \cdot \vec{v}$, es decir, los vectores directores son proporcionales

b: *Ángulo entre dos planos*

Dos planos forman dos ángulos, α y $180^{o} - \alpha$, nosotros siempre nos vamos a quedar con aquél que sea agudo. Además, el ángulo que forman dos planos va a venir dado por el ángulo que forman sus vectores normales, pero teniendo en cuenta que el ángulo será agudo.

Sean dos planos π_1 y π_2, con vectores normales respectivos, $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$, entonces:

$$\cos\left(\widehat{\pi_1, \pi_2}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\vec{n_1}, \vec{n_2}}\right)\right| = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|} = \frac{|A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Así tenemos que:

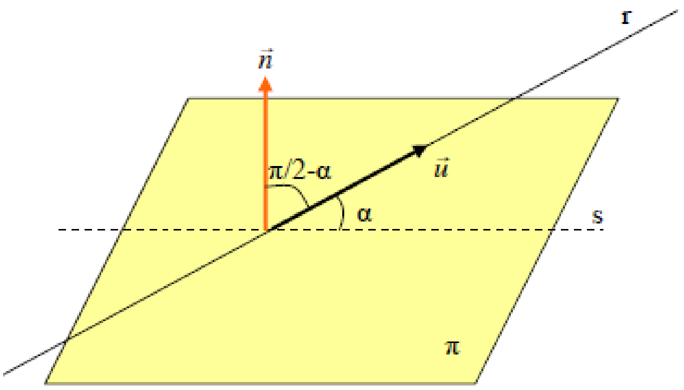
1) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

2) $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} = t \cdot \vec{n_2}$ (es decir, los vectores normales son proporcionales)

c: *Ángulo entre recta y plano*

Vamos a calcular este ángulo en función del vector director de la recta y del vector normal del plano. Por tanto sea una recta r de vector director $\vec{\mathrm{u}} = (a, b, c)$ y un plano π cuyo vector normal es $\vec{\mathrm{n}} = (A, B, C)$. Como vemos en el dibujo el ángulo α es el pedido. Y el ángulo $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ es el ángulo que forma la recta con el vector normal. Como además α y $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ son complementarios, tenemos que:

$$sen\left(\widehat{r, \pi}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{n}}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



A partir de esta expresión es fácil ver que:

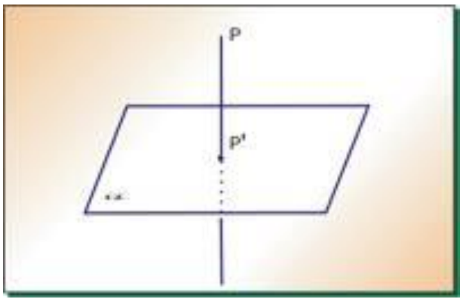
1) $r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

2) $r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} = t \cdot \vec{n}$ (es decir, el vector director de la recta y el normal del plano son proporcionales)

4. PROYECCIONES

a: *Proyección de un punto sobre un plano*

Dado un punto P y un plano π como el de la figura, se trata de conocer la proyección ortogonal de P sobre π, P'

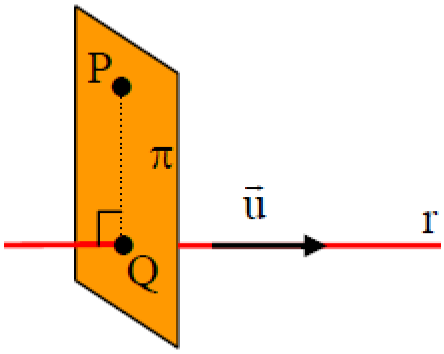


El procedimiento analítico es el siguiente:

- Hallamos la recta r que pasa por P y es perpendicular al plano π, es decir, su vector director es el normal del plano
- El punto P' es la intersección de la recta hallada y el plano π

b: *Proyección de un punto sobre una recta*

Dado un punto P y una recta r como en la figura se trata de conocer la proyección ortogonal de P sobre r, Q.

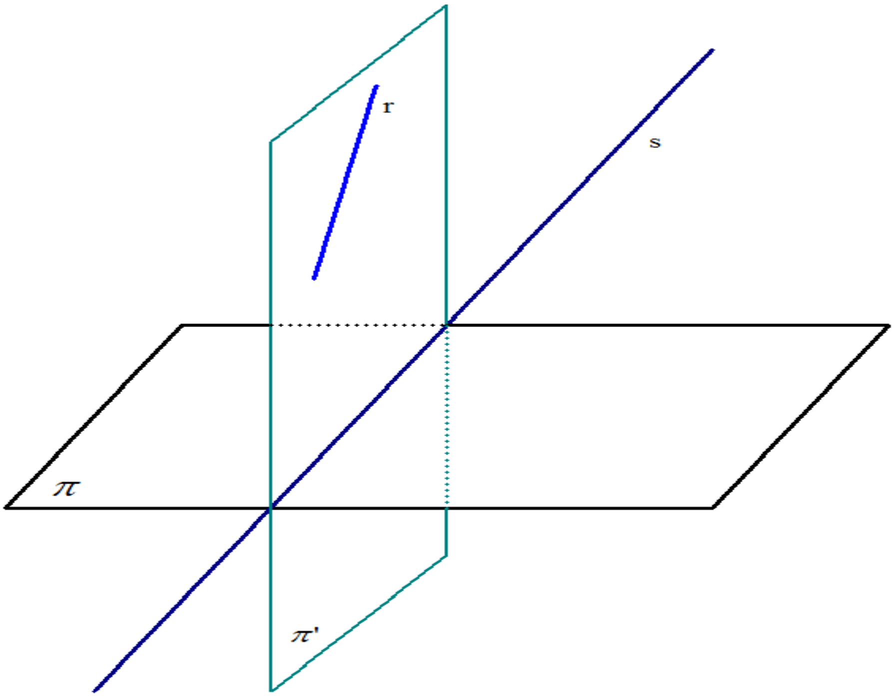


El procedimiento analítico es el siguiente:

- Construimos el plano π que pasa por P y es perpendicular a r (el vector director de la recta, $\vec{u}$, es el vector normal del plano)
- El punto Q pedido es la intersección del plano π hallado y la recta dada r

b: *Proyección de una recta sobre un plano*

Dada una recta r y un plano π, se trata de proyectar ortogonalmente la recta sobre el plano, dando como resultado la recta s

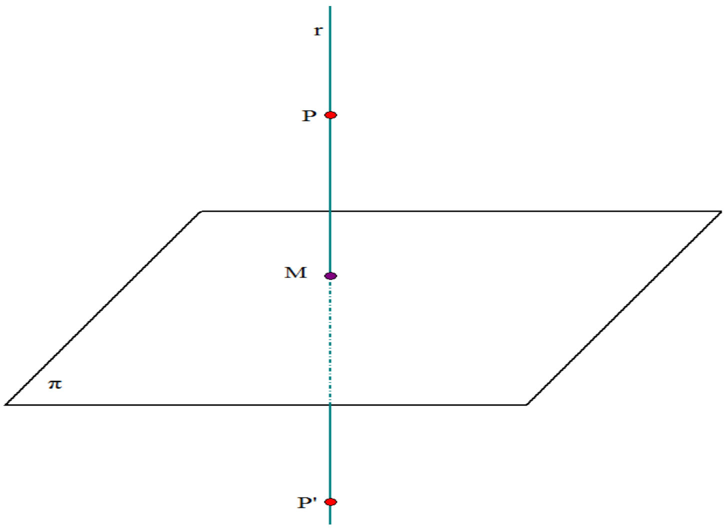


El procedimiento analítico es el siguiente:

- Hallamos el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π (un punto de π' es cualquier punto de r y sus vectores directores serán el director de r y el normal de π)
- La recta proyección s es la intersección de los planos π y π'

5. ELEMENTOS SIMÉTRICOS

a: <u>*Simétrico de un punto respecto de un plano*</u>



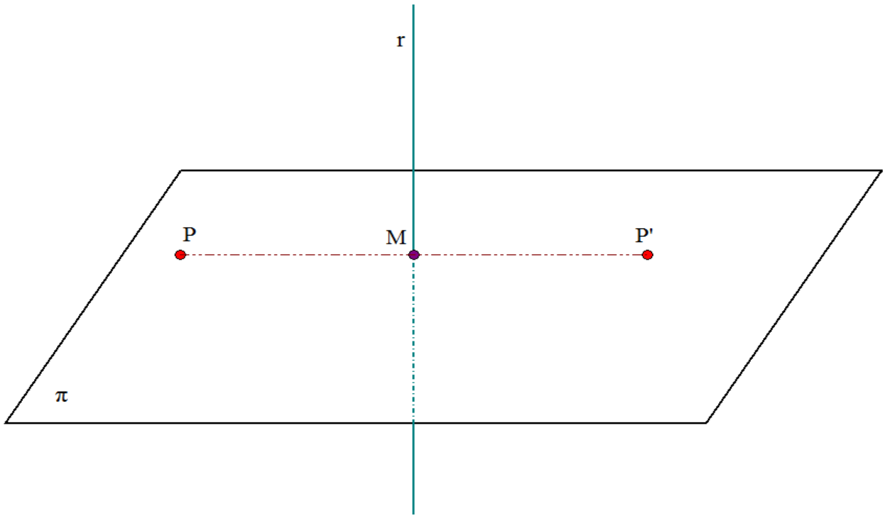
Como vemos en el dibujo, nos dan un punto P y un plano π, y nos piden calcular el simétrico de P respecto de π. El proceso es el siguiente:

- Calculamos la recta r que pasa por P y es perpendicular a π (el vector normal de π es el vector director de r)
- Intersectamos la recta r con el plano π para obtener el punto M
- Calculamos P' usando que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$

b: ***Simétrico de un punto respecto de una recta***

Nos dan como datos un punto P y una recta r, y nos piden calcular P'. El procedimiento es el siguiente:

- Calculamos el plano π que contiene a P y es perpendicular a r (el vector director de la recta r es el normal del plano π)
- Intersectamos el plano π y la recta r para obtener el punto M
- Calculamos P' usando que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$



c: ***Simétrico de un punto respecto de otro punto***

- Este caso es bastante fácil y basta calcular P' usando que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$

6. RECTAS QUE SE APOYAN SOBRE OTRAS DOS RECTAS DADAS

a: ***Recta que se apoya en dos rectas dadas y pasa por un punto determinado***

Se nos pide calcular una recta s que se apoya en dos rectas r_1 y r_2 y pasa por un punto P. El procedimiento analítico es el siguiente:

- Hallamos el plano π_1 que contiene a la recta r_1 y pasa por el punto P
- Hallamos el plano π_2 que contiene a la recta r_2 y pasa por el punto P
- La recta s pedida es la intersección de π_1 y π_2 ($s = \pi_1 \cap \pi_2$)

b: ***Recta que se apoya en dos rectas dadas y es paralela a una dada***

Se nos pide calcular una recta s que se apoya en dos rectas r_1 y r_2 y es paralela a una recta r. El procedimiento analítico es el siguiente:

- Hallamos el plano π_1 que contiene a la recta r_1 y es paralelo a la recta r
- Hallamos el plano π_2 que contiene a la recta r_2 y es paralelo a la recta r
- La recta s pedida es la intersección de π_1 y π_2 ($s = \pi_1 \cap \pi_2$)

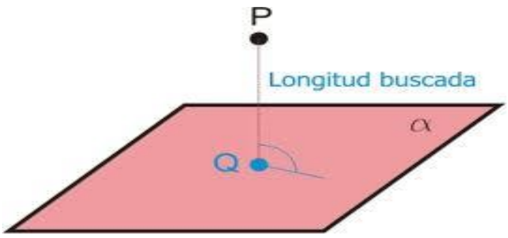
7. DISTANCIAS EN EL PLANO

a: *Distancia entre dos puntos*

Dados dos puntos $A(x,y,z)$ y $B(x',y',z')$, el vector libre que determinan es $\overrightarrow{AB}=(x'-x, y'-y, z'-z)$. Se define la distancia entre los puntos $A(x,y,z)$ y $B(x',y',z')$ como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}=(x'-x, y'-y, z'-z)$ que determinan, y se representa como $d(A,B)$ = $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ = $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$

b: *Distancia de un punto a un plano*

Nos dan un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $\alpha \equiv Ax+By+Cz+D=0$ como vemos en el dibujo



Hay dos formas de calcular la distancia o longitud que separa al punto del plano

1ª forma: Calculando el punto Q de forma análoga a como se calculaba el punto M en el simétrico de un punto respecto de un plano. Una vez obtenido Q tenemos que: $d(P,\alpha)=d(P,Q)$

Este método es más largo que el siguiente, pero es razonado.

2ª forma: Aplicando la fórmula $d(P,\alpha)=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

c: *Distancia entre dos planos paralelos*

Dados dos planos paralelos $\alpha \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\beta \equiv Ax+By+Cz+D'=0$, (¡ojo! Observad que son paralelos y que tienen los mismos coeficientes en las variables). También tenemos dos formas de calcular la distancia entre ellos:

1ª forma: Tomar un punto de uno de ellos y calcular la distancia de ese punto al otro plano

2ª forma: Aplicar la fórmula $d(\alpha,\beta)=\dfrac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$