EJERCICIOS RESUELTOS DE GEOMETRÍA AFÍN DEL ESPACIO

Ejercicio 1:

Si $\vec{u}(-3, 5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, -2)$, halla las coordenadas:

a) $2\vec{u}$ **b) $0\vec{v}$** **c) $-\vec{u}$**

d) $2\vec{u} + \vec{v}$ **e) $\vec{u} - \vec{v}$** **f) $5\vec{u} - 3\vec{v}$**

a) $2\vec{u} = 2 \cdot (-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$

b) $0 \cdot \vec{v} = (0, 0, 0)$

c) $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$

d) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$

e) $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$

f) $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) - 3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

Ejercicio 2:

Sean los vectores $\vec{x}(1, -5, 2)$, $\vec{y}(3, 4, -1)$, $\vec{z}(6, 3, -5)$, $\vec{w}(24, -26, -6)$. Halla a, b, c para que se cumpla: $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$

$$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$$

$$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$$

$$\left.\begin{aligned} a + 3b + 6c &= 24 \\ -5a + 4b + 3c &= -26 \\ 2a - b - 5c &= -6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solución: $a = 6$, $b = -2$, $c = 4$, es decir, $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$.

Ejercicio 3:

Dados los vectores $\vec{u}(3, 3, 2)$, $\vec{v}(5, -2, 1)$, $\vec{w}(1, -1, 0)$:

a) Halla los vectores $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$.

b) Calcula a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

a) $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (3, 3, 2) - 2(5, -2, 1) + 3(1, -1, 0) = (-4, 4, 0)$

$-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = -2(3, 3, 2) + (5, -2, 1) - 4(1, -1, 0) = (-5, -4, -3)$

b) $(3, 3, 2) = a(5, -2, 1) + b(1, -1, 0) = (5a + b, -2a - b, a)$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 5a + b \\ 3 &= -2a - b \\ 2 &= a \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} b &= -7 \\ b &= -7 \\ a &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \textit{Solución: } a = 2,\ b = -7, \text{ es decir: } \vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}.$$

Ejercicio 4:

Comprueba que no es posible expresar el vector $\vec{x}(3, -1, 0)$ como combinación lineal de $\vec{u}(1, 2, -1)$ y $\vec{v}(2, -3, 5)$. ¿Son linealmente independientes $\vec{x}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad \rightarrow \quad (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= a + 2b \\ -1 &= 2a - 3b \\ 0 &= -a + 5b \end{aligned}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Como } |A'| = 28 \neq 0, \text{ el sistema es incompatible.}$$

Luego **no** es posible expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Como *ran* $(A') = 3$, los tres vectores son linealmente independientes.

Ejercicio 5:

¿Cuáles de los siguientes vectores tienen la misma dirección?

$\vec{a}(1, -3, 2)$ $\quad$ $\vec{b}(2, 0, 1)$ $\quad$ $\vec{c}(-2, 6, -4)$ $\quad$ $\vec{d}(5, -15, 10)$ $\quad$ $\vec{e}(10, -30, 5)$

$\vec{a}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$, pues sus coordenadas son proporcionales.

Ejercicio 6:

Halla, en cada caso, todos los valores de m, n y p tales que $m\vec{u}+n\vec{v}+p\vec{w}=\vec{0}$:

a) $\vec{u}(3,0,1)$, $\vec{v}(1,-1,0)$, $\vec{w}(1,0,1)$

b) $\vec{u}(1,-1,0)$, $\vec{v}(1,1,1)$, $\vec{w}(2,0,1)$

a) $m(3, 0, 1) + n(1, -1, 0) + p(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} 3m + n + p = 0 \\ -n = 0 \\ m + p = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = -2 \neq 0$, la única solución del sistema es: $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$

(Luego $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes).

b) $m(1, -1, 0) + n(1, 1, 1) + p(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} m + n + 2p = 0 \\ -m + n = 0 \\ n + p = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0; \text{ luego } ran(A) = 2.$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -m + n = 0 \\ n + p = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} m = n \\ p = -n \end{array}\right\} \quad \textit{Soluciones: } m = \lambda,\ n = \lambda,\ p = -\lambda$$

Ejercicio 7:

Prueba que los vectores $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$, $(0, 0, 1)$, son linealmente independientes cualesquiera que sean a, b y c.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ para cualquier valor de a, b, c. Por tanto, son linealmente independientes.

Ejercicio 8:

Representa los puntos siguientes: $P(5, 2, 3)$, $Q(3, -2, 5)$, $R(1, 4, 0)$, $S(0, 0, 4)$ y $T(0, 6, 3)$.

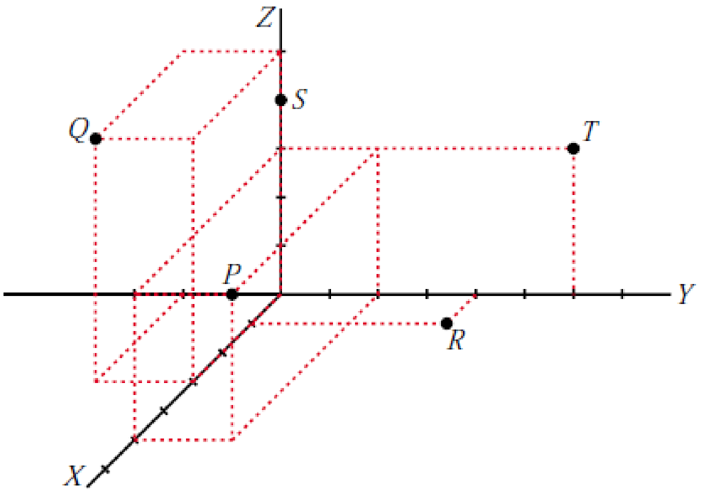
$P(5, 2, 3)$

$Q(3, -2, 5)$

$R(1, 4, 0)$

$S(0, 0, 4)$

$T(0, 6, 3)$



Ejercicio 9:

Dados los puntos $A(1, 7, 3)$, $B(-1, 3, 0)$, $C(3, -4, 11)$ y $D(1, 0, -5)$:

a) Halla las coordenadas de los vectores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$

b) Halla el punto medio de cada uno de los siguientes segmentos: AB, BC, CD, AC, AD

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, -3)$ $\overrightarrow{BC} = (4, -7, 11)$ $\overrightarrow{CD} = (-2, 4, -16)$

$\overrightarrow{DA} = (0, 7, 8)$ $\overrightarrow{AC} = (2, -11, 8)$

b) $M_{AB} = \left(0, 5, \frac{3}{2}\right)$ $M_{BC} = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{11}{2}\right)$ $M_{CD} = (2, -2, 3)$

$M_{AC} = \left(2, \frac{3}{2}, 7\right)$ $M_{AD} = \left(1, \frac{7}{2}, -1\right)$

Ejercicio 10:

Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por:

a) $A(2, 0, 5)$ y $B(-1, 4, 6)$ **b) $M(5, 1, 7)$ y $N(9, -3, -1)$**

c) $P(1, 0, -3)$ y $Q(1, 4, -3)$ **d) $R(0, 2, 3)$ y $S(0, 2, 1)$**

a) Vector dirección: $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$

b) Vector dirección: $\overrightarrow{MN} = (4, -4, -8) \mathbin{//} (1, -1, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 - 2\lambda \end{cases}$

c) Vector dirección: $\overrightarrow{PQ} = (0, 4, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4\lambda \\ z = -3 \end{cases}$

d) Vector dirección: $\overrightarrow{RS} = (0, 0, -2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$

Ejercicio 11:

Obtén las ecuaciones paramétricas, la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por estos puntos: (–5, 3, 7) y (2, –3, 3)

Vector dirección: (2, –3, 3) – (–5, 3, 7) = (7, –6, –4)

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 7\lambda \\ y = -3 - 6\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-3}{-4}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-6} \rightarrow -6x + 12 = 7y + 21 \\ \frac{x-2}{7} = \frac{z-3}{-4} \rightarrow -4x + 8 = 7z - 21 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} 6x + 7y + 9 = 0 \\ 4x + 7z - 29 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 12:

Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en estos apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen:

a) $\begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -5 + \lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 - 6\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

a) $P = (1, 2, -5)$ $\vec{d_1} = (-5, 3, 1)$

$Q = (1, 1, 0)$ $\vec{d_2} = (0, 0, 1)$

$\vec{PQ} = (0, -1, 5)$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{M} \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{matrix}\right); \quad |M'| = -5 \rightarrow ran\ (M') = 3 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) $P = (3, 1, 5)$ $\vec{d_1} = (2, -1, 0)$

$Q = (-1, 3, 5)$ $\vec{d_2} = (-6, 3, 0)$

$\vec{PQ} = (-4, 2, 0)$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{M} \begin{matrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right); \quad ran\ (M) = ran\ (M') = 1 \rightarrow \text{Las dos rectas coinciden.}$$

Ejercicio 13:

Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en estos apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen:

a) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 \end{cases}$

a) $P = (0, 0, 0)$ $\quad \vec{d}_1 = (1, 1, 0)$

$Q = (3, 3, 0)$ $\quad \vec{d}_2 = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = (3, 3, 0)$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right); \quad ran\ (M) = ran\ (M') = 2 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas se cortan.}$$

Hallamos el punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = 3 \\ 0 = \mu \end{array}\right\} \text{Se cortan en el punto } (3, 3, 0).$$

b) $P = (3, -2, 1)$ $\quad \vec{d}_1 = (1, -1, 0)$

$Q = (0, 3, -1)$ $\quad \vec{d}_2 = (-2, 2, 0)$

$\overrightarrow{PQ} = (-3, 5, -2)$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{matrix} \end{array}\right); \quad ran\ (M) = 1; \quad ran\ (M') = 2 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas son paralelas.}$$

Ejercicio 14:

a) Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano que pasa por $P(1, 7, -2)$, $Q(4, 5, 0)$ y $R(6, 3, 8)$.

b) Halla otros tres puntos del plano.

c) Calcula n para que $A(1, n, 5)$ pertenezca al plano.

a) El plano es paralelo a $\overrightarrow{PQ} = (3, -2, 2)$ y a $\overrightarrow{QR} = (2, -2, 8)$ // $(1, -1, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 4 + 3\lambda + \mu \\ y = 5 - 2\lambda - \mu \\ z = 2\lambda + 4\mu \end{cases}$

Ecuación implícita:

Un vector normal al plano es: $(3, -2, 2) \times (1, -1, 4) = (-6, -10, -1) // (6, 10, 1)$

La ecuación es: $6(x-4) + 10(y-5) + 1(z-0) = 0$, es decir: $6x + 10y + z - 74 = 0$

b) $\left(\frac{37}{3}, 0, 0\right)$; $\left(0, \frac{37}{5}, 0\right)$; $(0, 0, 74)$

c) Sustituimos en la ecuación: $6 \cdot 1 + 10 \cdot n + 5 - 74 = 0 \rightarrow 6 + 10n + 5 - 74 = 0$

$10n = 63 \rightarrow n = \frac{63}{10}$

Ejercicio 15:

Estudia la posición relativa del plano y de la recta:

$$\pi: 2x - y + 3z = 8 \qquad r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte de r y π:

$2(2 + 3\lambda) - (-1 + 3\lambda) + 3(-\lambda) = 8$

$4 + 6\lambda + 1 - 3\lambda - 3\lambda = 8 \rightarrow 0\lambda = 3 \rightarrow$ No tiene solución.

La recta y el plano **son paralelos**, pues no tienen ningún punto en común.

Ejercicio 16:

Dados estos tres planos, estudia la posición relativa entre cada dos de ellos:

$$2x - y + 3z = 8 \qquad x + 3y - z = 5 \qquad 2x + 6y - 2z = 5$$

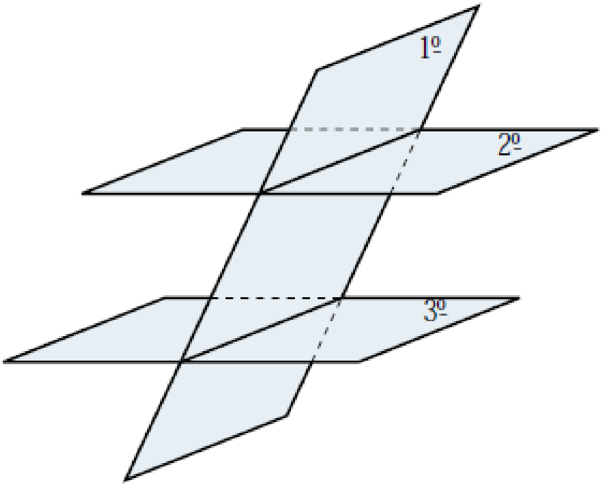
¿Tienen los tres planos algún punto común?

$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 8 \\ x + 3y - z = 5 \end{array}\right\}$ Se cortan en una recta.

$\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 5 \\ 2x + 6y - 2z = 5 \end{array}\right\}$ Son paralelos.

$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 8 \\ 2x + 6y - 2z = 5 \end{array}\right\}$ Se cortan en una recta.

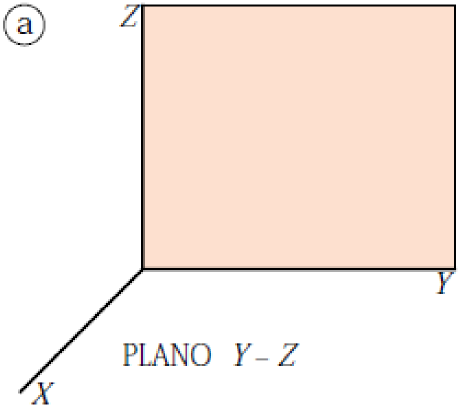
No hay ningún punto común a los tres planos.



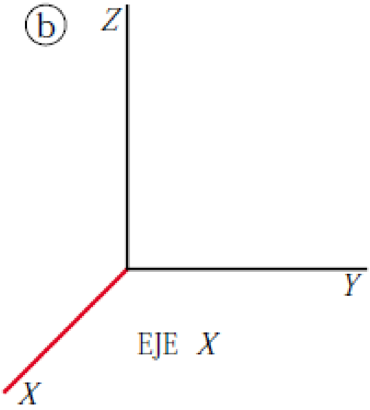
Ejercicio 17:

Escribe las ecuaciones implícitas y paramétricas de las siguientes figuras:

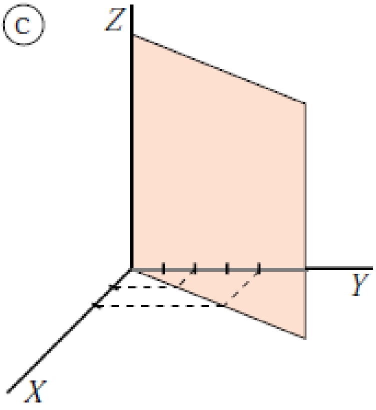
ⓐ



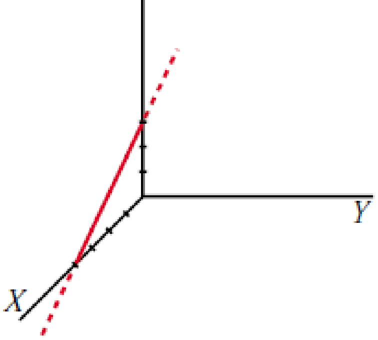
ⓑ



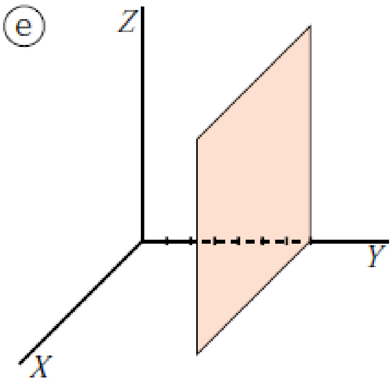
ⓒ



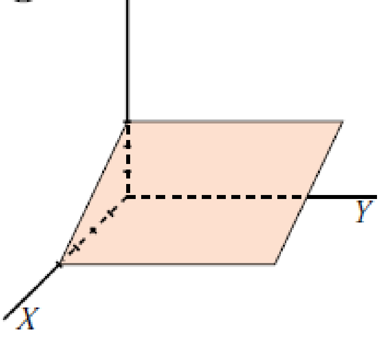
ⓓ



ⓔ



ⓕ



a) x siempre vale 0.

y puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

$$\pi: \ x = 0 \quad \rightarrow \quad \pi: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

b) x puede tomar cualquier valor.

y siempre vale 0.

z siempre vale 0.

$$\text{Eje } X\text{:} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Eje } X\text{:} \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

d) Calculamos la ecuación de la recta en el plano XZ:

r pasa por $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$ → $\overrightarrow{AB} = (-4, 3)$

$$r: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ z = \phantom{4 -{}} 3\lambda \end{cases} \rightarrow \lambda = \frac{z}{3}$$

$$x = 4 - \frac{4}{3}z$$

r: $3x + 4z = 12$ en el plano XZ.

En el espacio XYZ la recta no toma valores en y, por tanto, $y = 0$. Luego la ecuación de la recta r en el espacio XYZ es:

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 4z = 12 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 0 \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

e) x puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

y siempre vale 7.

$$\pi: y = 7 \rightarrow \pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 \\ z = \mu \end{cases}$$

f) y puede tener cualquier valor.

Calculamos la recta que determina el plano π en su intersección con el plano XZ:

r pasa por $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$.

Por el apartado d):

r: $3x + 4z = 12$ en el plano XZ.

Así:

$$\pi: 3x + 4z = 12 \rightarrow \pi: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = \mu \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

c) z puede tomar cualquier valor.

El plano π en su intersección con el plano XY determina la recta r de ecuación:

r: $x - y = 0$

Así, en el espacio XYZ:

$$\pi: x - y = 0 \rightarrow \pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

Ejercicio 18:

Halla los puntos P y Q tales que $\vec{AQ} = \frac{3}{5}\vec{AB}$ y $\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AQ}$, siendo $A(2, 0, 1)$ y $B(5, 3, -2)$.

- Si $Q(x, y, z)$, entonces $\vec{AQ}(x-2, y, z-1)$:

$$\frac{3}{5}\vec{AB} = \frac{3}{5}(3, 3, -3) = \left(\frac{9}{5}, \frac{9}{5}, \frac{-9}{5}\right) = (x-2, y, z-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-2 = \frac{9}{5} \quad \rightarrow \quad x = \frac{19}{5} \\ y = \frac{9}{5} \\ z-1 = -\frac{9}{5} \quad \rightarrow \quad z = \frac{-4}{5} \end{array}\right\} Q\left(\frac{19}{5}, \frac{9}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

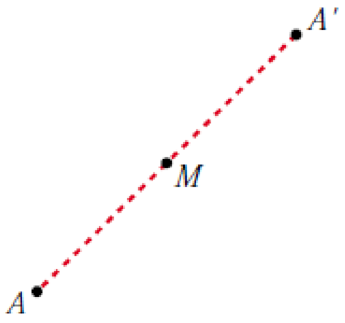
- Si $P(a, b, c)$, entonces $\vec{AP}(a-2, b, c-1)$:

$$\frac{2}{3}\vec{AQ} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\vec{AB} = \frac{2}{5}\vec{AB} = \frac{2}{5}(3, 3, -3) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{-6}{5}\right) = (a-2, b, c-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a-2 = \frac{6}{5} \quad \rightarrow \quad a = \frac{16}{5} \\ b = \frac{6}{5} \\ c-1 = \frac{-6}{5} \quad \rightarrow \quad c = \frac{-1}{5} \end{array}\right\} P\left(\frac{16}{5}, \frac{6}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

Ejercicio 19:

Halla el simétrico del punto $A(-2, 3, 0)$ respecto del punto $M(1, -1, 2)$.



Sea $A'(x, y, z)$ el simétrico de A respecto del punto M.

Como M es el punto medio del segmento AA', entonces:

$$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z}{2}\right) = (1, -1, 2)$$

$$\frac{x-2}{2} = 1 \rightarrow x = 4; \quad \frac{y+3}{2} = -1 \rightarrow y = -5; \quad \frac{z}{2} = 2 \rightarrow z = 4$$

Por tanto: $A'(4, -5, 4)$

Ejercicio 20:

Calcula a y b para que los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, -2)$ y $C(4, a, b)$ estén alineados.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\,(2, -2, -1)\\ \overrightarrow{AC}\,(3, a-2, b+1)\end{array}\right\}\quad \text{Para que estén alineados ha de ser: } \frac{3}{2}=\frac{a-2}{-2}=\frac{b+1}{-1}$$

Por tanto:

$$\frac{a-2}{-2}=\frac{3}{2} \;\rightarrow\; a-2=-3 \;\rightarrow\; a=-1$$

$$\frac{b+1}{-1}=\frac{3}{2} \;\rightarrow\; b=\frac{-3}{2}-1 \;\rightarrow\; b=\frac{-5}{2}$$

Ejercicio 21:

Comprueba si existe alguna recta que pase por los puntos $P(3, 1, 0)$, $Q(0, -5, 1)$ y $R(6, -5, 1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}\,(-3, -6, 1)\\ \overrightarrow{AC}\,(3, -6, 1)\end{array}\right\}$$

Las coordenadas no son proporcionales, luego los puntos **no** están alineados.

Ejercicio 22:

Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-4, 2, 5)$ y es paralela al eje OZ.

Si es paralela al eje OZ, tiene como vector dirección $(0, 0, 1)$.

- *Ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (-4, 2, 5) + \lambda(0, 0, 1)$$

- *Ecuaciones paramétricas:*

$$\left\{\begin{array}{l}x = -4\\ y = \;\;2\\ z = \;\;5+\lambda\end{array}\right.$$

- *Forma continua:*

$$\frac{x+4}{0}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-5}{1}$$

- *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{l}x=-4 \;\rightarrow\; x+4=0\\ y=\;\;2 \;\rightarrow\; y-2=0\end{array}\right\}$$

Ejercicio 23:

Obtén el valor de a para el cual las rectas r y s se cortan, y halla el punto de corte:

$$r: x = y = z - a \qquad\qquad s: \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0}$$

☛ ***En s, divide por 2 el numerador y el denominador de la primera fracción.***

$$r: x = y = z - a \;\rightarrow\; \vec{d}_r(1, 1, 1);\;\; P(0, 0, a)$$

$$s: \frac{x - 1/2}{3/2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0} \;\rightarrow\; \vec{d}_s\left(\frac{3}{2}, -2, 0\right);\;\; P'\left(\frac{1}{2}, -3, 2\right)$$

$$PP'\left(\frac{1}{2}, -3, 2 - a\right)$$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 3/2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{matrix}}_{M}\quad \begin{matrix} 1/2 \\ -3 \\ 2-a \end{matrix}\right) \;\rightarrow\; ran\ (M) = 2$$

Para que las rectas se corten, ha de ser $ran\ (M') = 2$, es decir, $|M'| = 0$:

$$|M'| = \frac{7a - 21}{2} = 0 \;\rightarrow\; a = 3$$

Para hallar el punto de corte, escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mu \\ y = -3 - 2\mu \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mu \\ \lambda = -3 - 2\mu \\ 3 + \lambda = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1 = -3 - 2\mu \;\rightarrow\; \mu = -1 \\ \lambda = -1 \end{array}$$

Sustituyendo $\lambda = -1$ en las ecuaciones de r (o $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $(-1, -1, 2)$.

Ejercicio 24:

Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

$$r: \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad s: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(4, 1, -1) \\ \vec{d}_s(m, 3, n) \end{array}\right\}$$ Las coordenadas han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{1} = \frac{n}{-1} \quad \rightarrow \quad m = 12, \quad n = -3$$

(El punto $P(0, 1, -3) \in s$; pero $P \notin r$, luego las dos rectas son paralelas si $m = 12$ y $n = -3$).

Ejercicio 25:

Calcula m y n para que los planos: $\alpha: mx + y - 3z - 1 = 0$ y $\beta: 2x + ny - z - 3 = 0$ sean paralelos. ¿Pueden ser coincidentes?

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha(m, 1, -3) \\ \vec{n}_\beta(2, n, -1) \end{array}\right\}$$ Las coordenadas han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{n} = \frac{-3}{-1} \quad \rightarrow \quad m = 6, \quad n = \frac{1}{3}$$

Así, quedaría:

$$\begin{cases} \alpha: 6x + y - 3z - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 6x + y - 3z - 1 = 0 \\ \beta: 2x + \frac{1}{3}y - z - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 6x + y - 3z - 9 = 0 \end{cases}$$

Los planos son paralelos, no coincidentes. No pueden ser coincidentes pues los términos independientes no son proporcionales a los anteriores.

Ejercicio 26:

Determina la ecuación del plano que contiene al punto $P(2, 1, 2)$ y a la recta:

$$x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$$

Si contiene a la recta, contendrá al punto $Q(2, 3, 4)$ y será paralelo a $\vec{d}(1, -1, -3)$.

También será paralelo a $\overrightarrow{PQ}(0, 2, 2) \mathbin{//} (0, 1, 1)$.

Un vector normal al plano es: $(1, -1, -3) \times (0, 1, 1) = (2, -1, 1)$

La ecuación del plano es: $2(x - 2) - (y - 1) + (z - 2) = 0$

$$2x - y + z - 5 = 0$$

Ejercicio 27:

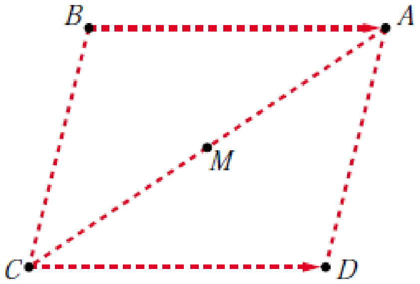
¿Son coplanarios los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 1, 0)$ y $D(-1, 2, 1)$?

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1,\ 1,\ 0) \\ \overrightarrow{AC} = (1,\ 1,\ 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-2,\ 2,\ 1) \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Los puntos *no* son coplanarios.

Ejercicio 28:

Los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(4, -1, -3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla el vértice D y el centro del paralelogramo.



Sea $D(x, y, z)$ el otro vértice:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \quad \rightarrow \quad (-1,\ 3,\ -3) = (x - 4,\ y + 1,\ z + 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 4 = -1 \ \rightarrow \ x = 3 \\ y + 1 = 3 \ \rightarrow \ y = 2 \\ z + 3 = -3 \ \rightarrow \ z = -6 \end{array}\right\} \ D(3,\ 2,\ -6)$$

Si M es el centro del paralelogramo, es el punto medio de $\overrightarrow{AC}$:

$$M = \left(\frac{4+1}{2},\ \frac{-1+3}{2},\ \frac{-3-1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2},\ 1,\ -2\right)$$

Ejercicio 29:

Calcula b para que las rectas r y s se corten. ¿Cuál es el punto de corte?

$$r:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2} \qquad\qquad s:\ \frac{x}{4} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

$\overrightarrow{d}_r(2,\ -3,\ 2);\ \ P(1,\ -5,\ -1)$

$\overrightarrow{d}_s(4,\ -1,\ 2);\ \ P'(0,\ b,\ 1)$

$\overrightarrow{PP'}(-1,\ b+5,\ 2)$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix}}_{M}\ \begin{matrix} -1 \\ b+5 \\ 2 \end{matrix}\right) \quad \rightarrow$$

Para que las rectas se corten, ha de ser $|M'| = 0$ (para que $ran\ (M) = ran\ (M') = 2$).

$$|M'| = 4b + 44 = 0 \quad \rightarrow \quad b = -11$$

Para hallar el punto de corte, escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 4\mu \\ y = -11 - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 2\lambda = 4\mu \\ -5 - 3\lambda = -11 - \mu \\ -1 + 2\lambda = 1 + 2\mu \end{array}\right\}$$ Restando la 3ª ecuación a la 1ª: $2 = -1 + 2\mu$

$$\mu = \frac{3}{2} \qquad \lambda = \frac{4\mu - 1}{2} = \frac{5}{2}$$

Sustituyendo $\lambda = \frac{5}{2}$ en las ecuaciones de r (o $\mu = \frac{3}{2}$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $\left(6, \frac{-25}{2}, 4\right)$.

Ejercicio 30:

¿Se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas r y s?

$$r\colon \frac{x-1}{2} = y = z + 1 \qquad s\colon \left\{\begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas:

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(1, 0, -1)$

$\vec{d}_s(2, 1, 1)$

Las dos rectas tienen la misma dirección. Además, $P(1, 0, -1) \in r$, pero $P \notin s$ puesto que: $\left\{\begin{array}{l} 2\lambda = 1 \;\to\; \lambda = 1/2 \\ -1 + \lambda = 0 \;\to\; \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{array}\right.$

Por tanto, las rectas son paralelas. Luego *no* se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas r y s.

Ejercicio 31:

Dada la recta $r\colon \left\{\begin{array}{l} 3x + ay + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{array}\right.$

a) Halla, para cada valor de a, las ecuaciones paramétricas de r_a.

b) Discute la existencia de valores de a para que la recta r_a esté incluida en el plano $x + y + z = 1$.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + z = 1 - ay \\ 2x - 2z = 6 - 6y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x + z = 1 - ay \\ x - z = 3 - 3y \end{array}\right\}$ Sumando: $4x = 4 - (a + 3)y$

$$x = 1 - \frac{a+3}{4}y$$

$$z = x - 3 + 3y = 1 - \frac{a+3}{4}y - 3 + 3y = -2 + \frac{9-a}{4}y$$

$$r_a\colon \left\{\begin{array}{l} x = 1 - (a + 3)\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -2 + (9 - a)\lambda \end{array}\right.$$

b) $x + y + z = 1$

$1 - (a+3)\lambda + 4\lambda - 2 + (9-a)\lambda = 1$

$1 - a\lambda - 3\lambda + 4\lambda - 2 + 9\lambda - a\lambda = 1$

$(10 - 2a)\lambda = 2$

$10 - 2a = 0 \quad \rightarrow \quad 10 = 2a \quad \rightarrow \quad a = 5$

- Si $a = 5$ → La recta es paralela al plano.
- Si $a \neq 5$ → La recta y el plano se cortan en un punto.

Por tanto, no existen valores de a para los que la recta esté contenida en el plano.

Ejercicio 32:

Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 3, 2)$ y $B(-2, 5, 0)$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$

El plano será paralelo a $\overrightarrow{AB}(-3, 2, -2)$ y a $\overrightarrow{d}(-1, 1, -3)$.

Un vector normal al plano es: $(-3, 2, -2) \times (-1, 1, -3) = (-4, -7, -1) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{n}(4, 7, 1)$

El plano es: $4(x-1) + 7(y-3) + 1(z-2) = 0$

$4x + 7y + z - 27 = 0$

Ejercicio 33:

Halla la ecuación del plano que contiene a la recta

$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ **y es paralelo a:** $s: \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-3}$

El plano será paralelo a $\overrightarrow{d_r}(3, -1, 1)$ y a $\overrightarrow{d_s}(5, 2, -3)$.

Un vector normal al plano será: $\overrightarrow{n} = (3, -1, 1) \times (5, 2, -3) = (1, 14, 11)$

Un punto del plano es $(2, -1, 0)$.

Por tanto, el plano es: $1(x-2) + 14(y+1) + 11(z-0) = 0$

$x + 14y + 11z + 12 = 0$

Ejercicio 34:

Dado el plano $\pi: 2x - 3y + z = 0$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$, halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

El plano será paralelo a $(2, -3, 1)$ y a $(1, -1, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(2, -3, 1) \times (1, -1, 2) = (-5, -3, 1) \quad \rightarrow \quad \vec{n}(5, 3, -1)$

El punto $(1, 2, -1)$ pertenece al plano.

La ecuación del plano es: $5(x-1) + 3(y-2) - 1(z+1) = 0$

$$5x + 3y - z - 12 = 0$$

Ejercicio 35:

Estudia la posición de los siguientes planos:

$$\textbf{a)} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{array} \right. \quad \textbf{b)} \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + z - 4 = 0 \end{array} \right. \quad \textbf{c)} \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{a)} \quad \left. \begin{array}{r} x + 2y - z = 3 \\ 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \quad M' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}_{M} \left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right. \right)$$

$|M| = 8 \quad \rightarrow \quad ran\ (M) = ran\ (M') = 3 \quad \rightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.

$$\text{b)} \quad \left. \begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + z = 4 \end{array} \right\} \quad M' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}}_{M} \left| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} \right. \right)$$

La 3ª columna es $-1 \cdot 2$ª; y la 4ª columna se obtiene sumando la 1ª y la 3ª.

Luego $ran\ (M) = ran\ (M') = 2 \quad \rightarrow$ Los tres planos se cortan en una recta.

$$\text{c)} \quad \left. \begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = -4 \end{array} \right\} \quad M' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{array}}_{M} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -4 \end{array} \right. \right)$$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ y $|M| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (M) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (M') = 3$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

Ejercicio 36:

Dados los planos $mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$, halla m para que sean:

a) Paralelos.

b) Perpendiculares.

a) Las coordenadas de $(m, 2, -3)$ y de $(2, -4, 6)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \quad \rightarrow \quad m = -1$$

b) $(m, 2, -3) \cdot (2, -4, 6) = 2m - 8 - 18 = 2m - 26 = 0 \quad \rightarrow \quad m = 13$

Ejercicio 37:

Sean la recta $r: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y el plano $ax - y + 4z - 2 = 0$.

a) Calcula el valor de a para que r sea paralela al plano.

b) ¿Existe algún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano?

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (3, -1, 1) \times (2, 0, -1) = (1, 5, 2)$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (a, -1, 4)$.

a) Para que r sea paralela al plano, $\vec{d}$ y $\vec{n}$ han de ser perpendiculares:

$(1, 5, 2) \cdot (a, -1, 4) = a - 5 + 8 = a + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = -3$

b) Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ deberían tener sus coordenadas proporcionales.

Como $\frac{5}{-1} \neq \frac{2}{4}$, no es posible; es decir, *no* existe ningún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano.

Ejercicio 38:

Halla la ecuación de la recta paralela a $r: \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$ que pase por el punto de intersección de la recta $s: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$ con el plano $\pi: x - y + z = 7$.

Un vector dirección de la recta es: (1, 0, 2) × (0, 1, 3) = (–2, –3, 1) // (2, 3, –1)

Escribimos la recta s en forma paramétrica para hallar el punto de corte de s y π:

$$s: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\pi: \ x - y + z = 7 \\ &1 + 4\lambda + 3 - 2\lambda - 2 + 3\lambda = 7 \\ &5\lambda = 5 \ \rightarrow \ \lambda = 1 \end{aligned}$$

El punto de corte de s y π es (5, –1, 1).

Por tanto, la recta que buscamos es:

$$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Ejercicio 39:

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano que pasa por el origen y por los puntos $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 2, 1)$.

Un vector normal al plano es: $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = (1, 1, 1) \times (1, 2, 1) = (-1, 0, 1)$

Este vector es un vector dirección de la recta que buscamos.

Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 40:

Estudia las posiciones relativas del plano: $\pi: x + ay - z = 1$ y de la recta: $r: \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ según los valores de a.

$$\left.\begin{aligned} &\pi: \ x + ay - z = 1 \\ &r: \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}}_{M}$$

$$|M| = -a^2 + a + 2 = 0 \ \rightarrow \ a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = -1$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$ planos paralelos. La recta es paralela al plano.

- Si $a = 2$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ La 1ª ecuación se obtiene restándole a la 2ª la 3ª.

Por tanto, la recta está contenida en el plano.

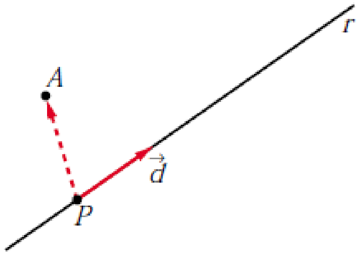
- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ → La recta y el plano se cortan en un punto.

Ejercicio 41:

Calcula la ecuación del plano que determinan el punto $A(1, 0, 1)$ y la recta:

$$r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de la r es: $\vec{d} = (1, 1, -1) \times (2, -1, 2) = (1, -4, -3)$



Obtenemos un punto de r haciendo $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y - z + 1 = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } z + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z = -1 \\ y = 2z = -2 \end{array}$$

$P(0, -2, -1)$

El plano es paralelo a $\vec{d}(1, -4, -3)$ y a $\overrightarrow{PA}(1, 2, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(1, -4, -3) \times (1, 2, 2) = (-2, -5, 6) \,//\, (2, 5, -6)$

La ecuación del plano es: $2(x - 1) + 5(y - 0) - 6(z - 1) = 0$

$$2x + 5y - 6z + 4 = 0$$

Ejercicio 42:

Estudia la posición de los siguientes planos según los valores de m:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1 + m)y + mz = m + 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1 + m)y + mz = m + 1 \end{array}\right\} M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1 + m & m \end{matrix}}_{M} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ m + 1 \end{matrix}\right)$$

$$|M| = m^2 - m = 0 \begin{array}{l} \nearrow m = 0 \\ \searrow m = 1 \end{array}$$

- Si $m = 0$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ El 1º y el 3º son el mismo plano; el 2º los corta. Por tanto, se cortan en una recta.

- Si $m = 1$, queda:

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{M} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ y } |M| = 0 \;\rightarrow\; ran\,(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(M') = 3$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ $\rightarrow$ $ran\,(M) = ran\,(M') = 3$. Los planos se cortan en un punto.

Ejercicio 43:

Halla la ecuación de la recta r que pasando por el punto $P(2, 0, -1)$ corta a las rectas:

$$s_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \qquad s_2: \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$s_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \qquad s_2: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La recta r está determinada por los siguientes planos:

α: contiene a la recta s_1 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

β: contiene a la recta s_2 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Así, $r: \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 44:

¿Cuáles son las ecuaciones implícitas de la recta $\frac{x-4}{0}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{2}$?

$$\begin{cases} x-4=0 \\ y+3=0 \end{cases}$$

Ejercicio 45:

¿Qué posición relativa deben tener dos rectas para que determinen un plano?

Paralelas o secantes.

Ejercicio 46:

Sean π_1 y π_2 dos planos paralelos y r_1 y r_2 dos rectas contenidas en π_1 y π_2, respectivamente. ¿Podemos asegurar que r_1 y r_2 son paralelas?

No. Pueden ser paralelas o cruzarse.

Ejercicio 47:

Las rectas r y s se cruzan. Si hallamos el plano que contiene a r y es paralelo a s, y el plano que contiene a s y es paralelo a r, ¿cómo son entre sí esos planos?

Paralelos.

Ejercicio 48:

Indica qué condición deben cumplir a, b, c y d para que el plano $ax+by+cz+d=0$ sea:

a) Paralelo al plano OXY.

b) Perpendicular al plano OXY.

c) Paralelo al eje Z.

d) No sea paralelo a ninguno de los ejes.

a) $a=b=0,\ \ c\neq 0,\ \ d\neq 0$

b) $c=0$

c) $c=0,\ \ d\neq 0$

d) $a\neq 0,\ \ b\neq 0,\ \ c\neq 0$

Ejercicio 49:

Dados el plano π: $ax + y + z + 1 = 0$ y las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \qquad r_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

Calcula el valor de a para que los puntos de corte del plano con cada una de las rectas estén alineados.

☛ ***Halla, en función de a, los puntos de corte P, Q y R. Expresa después la dependencia lineal entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$.***

Hallamos los puntos de corte del plano con cada una de las tres rectas:

π con r_1: $\quad a + 2z + 1 = 0 \rightarrow z = \dfrac{-1-a}{2}$

$$P\left(1, \frac{-1-a}{2}, \frac{-1-a}{2}\right)$$

π con r_2: $\quad 2a + 3z + 1 = 0 \rightarrow z = \dfrac{-1-2a}{3}$

$$Q\left(2, \frac{-2-4a}{3}, \frac{-1-2a}{3}\right)$$

π con r_3: $\quad 3a + 4z + 1 = 0 \rightarrow z = \dfrac{-1-3a}{4}$

$$R\left(3, \frac{-3-9a}{4}, \frac{-1-3a}{4}\right)$$

Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ han de tener sus coordenadas proporcionales:

$$\overrightarrow{PQ}\left(1, \frac{-1-5a}{6}, \frac{1-a}{6}\right); \ \overrightarrow{QR}\left(1, \frac{-1-11a}{12}, \frac{1-a}{12}\right)$$

$$\frac{-1-5a}{6} = \frac{-1-11a}{12} \rightarrow -2-10a = -1-11a \rightarrow a = 1$$

$$\frac{1-a}{6} = \frac{1-a}{12} \rightarrow a = 1$$

Por tanto, $a = 1$.