# HOJA 2 DE EJERCICIOS
## UNIDAD 4: GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO

***Ejercicio 1***: Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(1, –3) y B(2, 0).

1º

$A(1,-3)$ $\quad B(2,0)$ $\quad \vec{AB} = (1,3)$ $\quad m = 3$

Paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3 + 3\lambda \end{cases}$$

Continua

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{3}$$

Pto-pendiente

$$r \equiv y - 0 = 3\cdot(x-2)$$

Explícita

$$r \equiv y = 3x - 6$$

General ó implícita

$$r \equiv 3x - y - 6 = 0$$

***Ejercicio 2***: Calcula el valor de k para que la recta de ecuación $r \equiv 2x - (k+1)y - 4 = 0$ pase por el punto A(1, 1).

2º

$r \equiv 2x - (k+1)y - 4 = 0$

$A(1,1) \in r \Rightarrow 2 - (k+1)\cdot 1 - 4 = 0 \Rightarrow 2 - k - 1 - 4 = 0$

$\Rightarrow \boxed{k = -3}$

***Ejercicio 3***: Halla las ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv x + 3y = 0$

3º

$r \equiv x + 3y = 0$ Hacemos $y = \lambda \Rightarrow x + 3\lambda = 0$

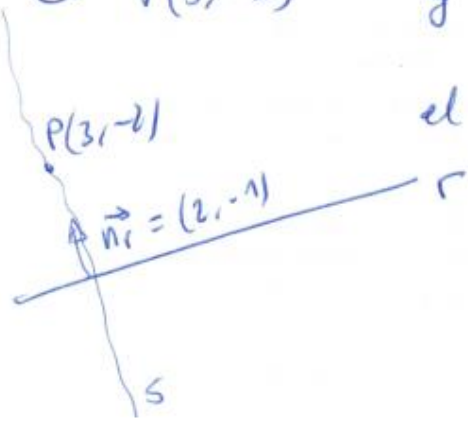
$\Rightarrow x = -3\lambda$

Luego
$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}}$$

***Ejercicio 4***: Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P(3, –2) y es perpendicular a la recta $r \equiv 2x - y + 4 = 0$,

4º $P(3,-2)$ y $\perp$ a $r \equiv 2x - y + 4 = 0$

El vector normal de r, $\vec{n_r} = (2,-1)$, es el director de la recta pedida




$$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \end{cases}}$$

***Ejercicio 5***: Calcula el valor de a para que las rectas r: 2x + ay = 3 y s: 3x + 5y = 1 sean rectas paralelas.

5º $r \equiv 2x + ay - 3 = 0$
$s \equiv 3x + 5y - 1 = 0$

Si $r \parallel s \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{a}{5} \Rightarrow \boxed{a = \frac{10}{3}}$

***Ejercicio 6***: Halla la ecuación implícita de la recta que pasa por P(1, 2) y por el punto de corte de las rectas: $r \equiv x - 2y + 3 = 0$, $s \equiv 2x + y + 1 = 0$.

6º La recta que pasa por P(1,2) y el pto de corte de

$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2y - 3} \\ 2x + y + 1 = 0 \Rightarrow 2\cdot(2y-3) + y - 1 = 0 \Rightarrow 4y - 6 + y - 1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 5y = 7 \Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{5}} \Rightarrow x = \frac{14}{5} - 3 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{5}}$

Luego pasa por $P(1,2)$ y $Q\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right) \Rightarrow \vec{PQ} = \left(-\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right)$ es el vector director

Por comodidad usamos como vector director:
$\vec{u} = -\frac{5}{3}\vec{PQ} = -\frac{5}{3}\left(-\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right) = (2, 1)$

Luego, $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} \Rightarrow x - 1 = 2y - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{r \equiv x - 2y + 3 = 0}$

***Ejercicio 7***: Determina todas las ecuaciones de la recta que pasa por A(2, -5) y tiene pendiente -4.

7º $A(2,-5)$ $m = -4 \Rightarrow$ vector director $\vec{u} = (1, -4)$

Paramétricas
$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -5 - 4\lambda \end{cases}$

Continua
$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+5}{-4}$

Pto-pendiente
$r \equiv y + 5 = -4(x-2)$

Explícita
$r \equiv y = -4x + 3$

General
$r \equiv 4x + y - 3 = 0$

***Ejercicio 8***: ¿Qué rectas son las que tienen pendiente 0? ¿Qué pendiente tienen las rectas verticales?

8º pte = 0 ⇒ son las rectas horizontales, paralelas al eje OX

rectas verticales ⇒ paralelas al eje OY, no tienen pendiente, o se dice que su pendiente es $\infty$

***Ejercicio 9***: Halla la ecuación continua de la recta paralela a la recta $s \equiv 2x - 3y = 0$ y cuya ordenada en el origen es -2.

(9)
$r \equiv 4x + 3y - 6 = 0$
Hallamos el punto de corte con el eje de ordenadas (eje OY)
$\begin{cases} 4x+3y-6=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=2 \Rightarrow Q(0,2)$
s es $\perp$ a r $\Rightarrow$ el vector director de s es el normal de r
$\vec{u_s} = \vec{n}_r = (4,3)$
Luego:
$s \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2+3\lambda \end{cases}$

***Ejercicio 10***: Dada la recta $r \equiv 4x + 3y - 6 = 0$, escribe las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.

(10°) $r \equiv 4x+3y-6=0 \Rightarrow \vec{n_r} = (4,3)$ es el vector director de la recta pedida.
Cortamos r con el eje OY $\begin{cases} 4x+3y-6=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=2 \Rightarrow P(0,2)$
$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2+3\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

***Ejercicio 11***: Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 1+\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2+3\mu \\ y = -1+2\mu \end{cases}$, calcula el punto donde se cortan de dos formas distintas:

a) Usando las ecuaciones paramétricas solamente
b) Usando una en paramétricas y ora en implícita

(11)
a) $r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 1+\lambda \end{cases}$
$s \equiv \begin{cases} x=2+3\mu \\ y = -1+2\mu \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 2+3\mu \\ 1+\lambda = -1+2\mu \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\cancel{\lambda} - 3\mu = 1 \\ \cancel{\lambda} - 2\mu = -2 \end{cases}$
$-5\mu = -1 \Rightarrow \boxed{\mu = +\frac{1}{5}} \Rightarrow \lambda - \frac{2}{5} = -2 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{8}{5}}$

Luego el punto de corte es: $P\left(1-\left(-\frac{8}{5}\right), 1-\frac{8}{5}\right) = \boxed{P\left(\frac{13}{5}, \frac{-3}{5}\right)}$

b) Pasamos r a implícita:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda = y - 1} \Rightarrow x = 1 - (y-1) \Rightarrow \boxed{r \equiv x + y - 2 = 0}$$

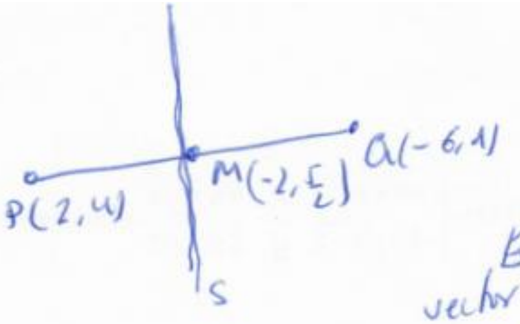
Y usamos $s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = -1 + 2\mu \end{cases}$ con un punto genérico $P(2+3\mu, -1+2\mu) \in r$

$$\Rightarrow (2+3\mu) + (-1+2\mu) - 2 = 0 \Rightarrow 5\mu - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow P\left(2 + \frac{3}{5}, -1 + \frac{2}{5}\right) = \boxed{P\left(\frac{13}{5}, \frac{-3}{5}\right)}$$

***Ejercicio 12***: Halla la ecuación punto pendiente de la recta que es perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ en su punto medio, siendo $P(0,4)$ y $Q(-6,0)$

12)




$$M\left(\frac{2-6}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = M\left(-2, \frac{5}{2}\right)$$

El vector $\overrightarrow{PQ} = (-8, -3)$ es el vector normal de la recta pedida $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u} = (3, -8)$ es el vector director

$\Rightarrow m = \dfrac{-8}{3}$ es la pte

Luego $\boxed{s \equiv y - \frac{5}{2} = -\frac{8}{3} \cdot (x+2)}$

***Ejercicio 13***: Divide el segmento $\overline{PQ}$ en cuatro partes iguales, siendo $P(2,4)$ y $Q(-6,1)$

13)


$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ} \Rightarrow (a-2, b-4) = \frac{1}{4}(-8, -3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2 = -2 \Rightarrow a = 0 \\ b - 4 = -\frac{3}{4} \Rightarrow b = 4 - \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(0, \frac{13}{4}\right)}$$

N es el pto medio del segmento $\overline{PQ}$ ⇒ $N\left(-\frac{6+2}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$

⇒ $\boxed{N\left(-2, \frac{5}{2}\right)}$ (Nota: también se puede calcular de otra forma como $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ )

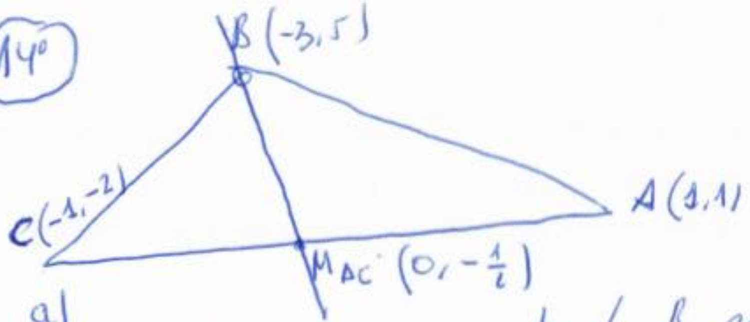
Calculamos ahora R como el punto medio del segmento $\overline{NQ}$

$$R\left(\frac{-2-6}{2}, \frac{\frac{5}{2}+1}{2}\right) = R\left(-4, \frac{7}{4}\right)$$

***Ejercicio 14***: Dado el triángulo de vértice los puntos A(1, 1), B(–3, 5) y C(–1, –2), calcula la ecuación de :

a) La mediana que parte de B.
b) La altura que parte de C.

14º




a) La mediana que parte de B pasa por el pto medio del lado $\overline{AC}$ ⇒ $M_{\overline{AC}}\left(\frac{1-1}{2}, \frac{1-2}{2}\right) = M_{AC}\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

La mediana $m_B$ tiene por vector director $\overrightarrow{BM_{AC}} = \left(0-(-3), -\frac{1}{2}-5\right)$

⇒ $\overrightarrow{BM_{AC}} = \left(3, -\frac{11}{2}\right)$ Por comodidad usaremos $\vec{u} = 2\overrightarrow{BM_{AC}}$ ⇒ $\vec{u} = (6, -11)$

Luego $m_B \equiv \frac{x+3}{6} = \frac{y-5}{-11}$ ⇒ $m_B \equiv -11x - 33 = 6y - 30$

⇒ $\boxed{m_B \equiv 11x + 6y + 3 = 0}$

b) La altura que parte de C, $h_C$, es la recta que es $\perp$ al lado $\overline{AB}$ y pasa por C

Luego $\overrightarrow{AB} = (+4, -4)$ es el vector normal de la altura

Por comodidad tomamos $\vec{n} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (+1, -1)$

Luego $h_C \equiv x - y + D = 0$

Como $C \in h_C \Rightarrow (-1) - (-2) + D = 0 \Rightarrow D = -1$

$\Rightarrow \boxed{h_C \equiv x - y - 1 = 0}$

***Ejercicio 15***: Estudia la posición relativa de las rectas $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{2y-6}{3}$

15º Pasemos r y s a forma general.

$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow y = 1 - 2x \Rightarrow \boxed{r \equiv 2x + y - 1 = 0}$

$s \equiv \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{2y-6}{3} \Rightarrow 3x + 6 = 8y - 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{s \equiv 3x - 8y + 30 = 0}$

Como $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{1}{-8} \Rightarrow$ r y s son secantes.

***Ejercicio 16***: Estudia la posición relativa de las rectas $r \equiv 2x + y - 3 = 0$ y $s \equiv 4x + ky - 6 = 0$ dependiendo del valor de $k$.

16º $r \equiv 2x + y - 3 = 0$
$s \equiv 4x + ky - 6 = 0$

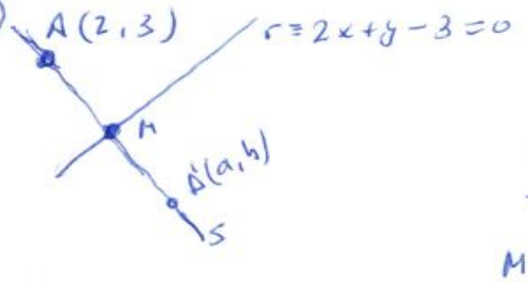
Como $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{k} \Rightarrow \boxed{k = 2}$

Si $k \neq 2 \Rightarrow$ r y s son secantes

Si $k = 2 \Rightarrow \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{-3}{-6} \Rightarrow$ son rectas coincidentes

***Ejercicio 17***: Calcula el punto simétrico del punto A(2,3) respecto de la recta $r \equiv 2x + y - 3 = 0$

17º




Calculemos la recta s que pasa por A y es ⊥ a r.

El vector director de s es $\vec{n_r}$, $\vec{u_s} = (2,1)$

$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$ Ahora calculamos

$M = r \cap s$. Sustituimos s en r:

$2 \cdot (2 + 2\lambda) + (3 + \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 4 + 4\lambda + 3 + \lambda - 3 = 0$

$\Rightarrow 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow M\left(2 - \dfrac{8}{5}, 3 - \dfrac{4}{5}\right)$

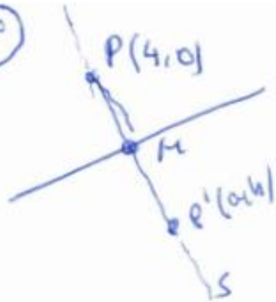
$\Rightarrow M\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$ que es el pto medio del segmento $\overline{AA'}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a+2}{2}, \dfrac{b+3}{2}\right) = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{11}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a+2}{2} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow a + 2 = \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{b+3}{2} = \dfrac{11}{5} \Rightarrow b + 3 = \dfrac{22}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{6}{5} \\ b = +\dfrac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A'\left(-\dfrac{6}{5}, +\dfrac{7}{5}\right)}$

***Ejercicio 18***: Calcula el punto simétrico del punto P(4,0) respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$

18º




$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$ Pasamos r a general ⇒

$y = 1 - 2x \Rightarrow r \equiv 2x + y - 1 = 0$

El vector director de s es el normal de r ⇒ $\vec{u_s} = (2,1)$

⇒ $s \equiv \begin{cases} x = 4 + 2\mu \\ y = \mu \end{cases}$. Sustituimos en r para calcular $M = r \cap s$

$\Rightarrow 2\cdot(4+2\mu) + \mu - 1 = 0 \Rightarrow 8 + 4\mu + \mu - 1 = 0 \Rightarrow 5\mu = -7 \Rightarrow \boxed{\mu = -\frac{7}{5}}$

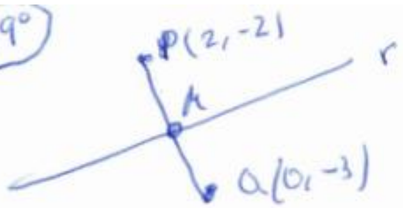
$\Rightarrow M\left(4 - \frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right) = M\left(\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

M es el pto medio del segmento $PP'$ ⇒ $\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 4 = \frac{12}{5} \Rightarrow a = -\frac{8}{5} \\ b = -\frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'\left(-\frac{8}{5}, -\frac{14}{5}\right)}$

***Ejercicio 19***: Si sabemos que el punto Q(0,-3) es el simétrico respecto de una recta del punto P(2,-2), calcula dicha recta.

19º




$\vec{PQ} = (-2,-1)$ es el vector ~~director~~ normal de la recta r pedida ⇒ $r \equiv -2x - y + C = 0$

M, el pto medio del segmento $PQ$, pertenece a r ⇒ $M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{-3-2}{2}\right) = M\left(1, -\frac{5}{2}\right) \in r$

$\Rightarrow -2\cdot 1 - \left(-\frac{5}{2}\right) + C = 0 \Rightarrow C = 2 - \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow r \equiv -2x - y - \frac{1}{2} = 0 \xRightarrow{\cdot(-2)} \boxed{r \equiv 4x + 2y + 1 = 0}$

***Ejercicio 20***: La recta r ≡ 3x + ny - 7 = 0 pasa por el punto A(3,2) y es paralela a la recta s ≡ mx + 2y -13 = 0. Calcula m y n.

20º

$r \equiv 3x + ny - 7 = 0$ pasa por $A(3,2) \Rightarrow 3\cdot 3 + n\cdot 2 - 7 = 0$

$\Rightarrow 9 + 2n - 7 = 0 \Rightarrow \boxed{n = -1}$

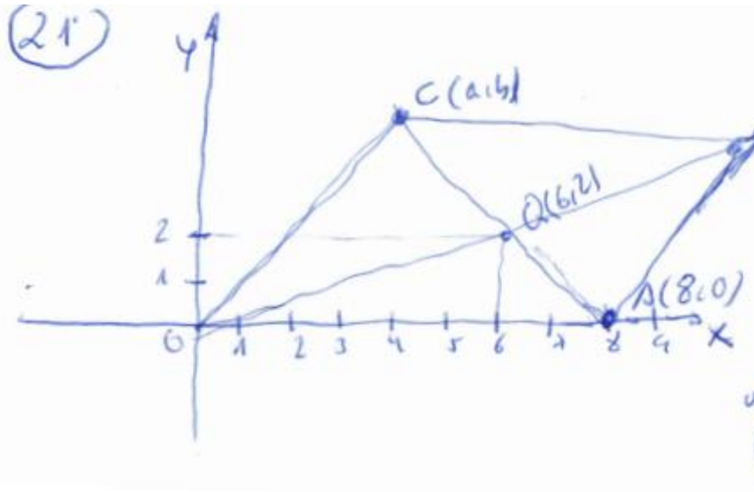
$\Rightarrow r = 3x - y - 7 = 0$

$s \equiv mx + 2y - 13 = 0$ son paralelas $\Rightarrow \frac{3}{m} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \boxed{m = -6}$

***Ejercicio21***: De un paralelogramo se conoce un vértice, A(8, 0), y el punto de corte de las dos diagonales, Q(6, 2). También sabemos que otro vértice se encuentra en el origen de coordenadas. Calcular:

a) Los otros vértices.
b) Las ecuaciones de las diagonales.
c) La longitud de las diagonales.

(21)




a) $Q(6,2)$ es el punto medio del segmento $\overline{AC}$

$$\left(\frac{a+8}{2}, \frac{b}{2}\right) = (6,2) \Rightarrow \begin{matrix} a=4 \\ b=4 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{C(4,4)}$$

$Q(6,2)$, lo mismo pero en el segmento $\overline{OB}$ $\Rightarrow$

$$\left(\frac{c+0}{2}, \frac{d+0}{2}\right) = (6,2) \Rightarrow \begin{matrix} c=12 \\ y=4 \end{matrix} \Rightarrow B(12,4)$$

b) $d_1 \Rightarrow$ diagonal que pasa por O y B

$\vec{OB} = (12,4)$ es el vector director, por comodidad usamos $\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{OB} = (3,1)$

$$\Rightarrow d_1 \equiv \frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{1} \Rightarrow \boxed{d_1 \equiv x-3y=0}$$

$d_2 \Rightarrow$ diagonal que pasa por A y C

$\Rightarrow \vec{AC} = (-4,4)$ es un vector director, por comodidad usamos $\vec{v} = \frac{1}{4}\vec{AC} = (-1,1)$

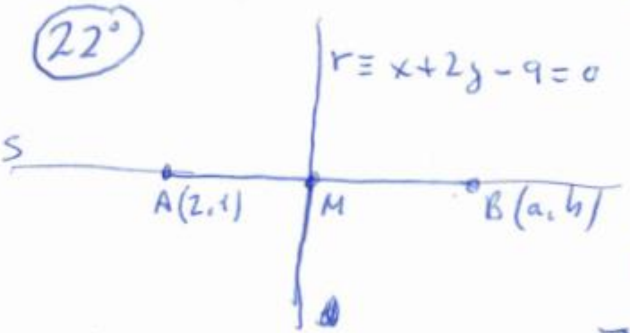
$$\Rightarrow d_2 \equiv \frac{x-8}{-1} = \frac{y}{1} \Rightarrow \boxed{d_2 \equiv x+y-8=0}$$

c) $\text{longitud}(\overline{AC}) = |\vec{AC}| = \sqrt{(-4)^2+(4)^2} = 4\sqrt{2}$

$\text{longitud}(\overline{OB}) = |\vec{OB}| = \sqrt{12^2+4^2} = 4\sqrt{10}$

***Ejercicio 22***: Una recta de ecuación r ≡ x + 2y - 9 = 0 es mediatriz de un segmento AB cuyo extremo A tiene por coordenadas (2,1). Hallar las coordenadas del otro extremo.

22°




B es el simétrico de A respecto de r. Calculamos la recta s que pasa por A(2,1) y ⊥ a r.

$\vec{u}_s = \vec{n}_r = (1,2)$ es el director de s

$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$.

Calculamos $M = r \cap s \Rightarrow (2+\lambda) + 2(1+2\lambda) - 9 = 0 \Leftrightarrow 2+\lambda+2+4\lambda-9 =$

$\Rightarrow 5\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow M(3,3)$ Luego, si $B(a,b)$

M es el pto. medio del segmento $\overline{AB} \Rightarrow \left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+1}{2}\right) = (3,3)$

$\Rightarrow \begin{matrix} a = 4 \\ b = 5 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{B(4,5)}$

***Ejercicio 23***: Halla el ángulo que forman las rectas que tienen por ecuaciones:

a) $r_1 \equiv \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -1 + 3k \end{cases}$ $\qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = -4 - 3k \\ y = 5 + k \end{cases}$

b) $s_1 \equiv x - 2 = \dfrac{y+4}{2}$ $\qquad s_2 \equiv \dfrac{x+4}{\sqrt{3}} = \dfrac{y-1}{-1}$

23°

a) $r_1 \equiv \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -1 + 3k \end{cases} \Rightarrow \vec{d}_{r_1} = (2,3)$ $\Rightarrow$

$r_2 \equiv \begin{cases} x = -4 - 3k \\ y = 5 + k \end{cases} \Rightarrow \vec{d}_{r_2} = (-3,1)$

$\Rightarrow \cos(\widehat{r,s}) = \dfrac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|} = \dfrac{|-6+3|}{\sqrt{4+9}\,\sqrt{9+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\widehat{r,s}) = \arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{130}}\right) \Rightarrow \boxed{(\widehat{r,s}) = 74^\circ\, 44'\, 41.57''}$

b) $s_1 \equiv x-2=\frac{y+4}{2} \Rightarrow \vec{d}_{s_1}=(1,2)$

$s_2 \equiv \frac{x+4}{\sqrt{3}}=\frac{y-1}{-1} \Rightarrow \vec{d}_{s_2}=(\sqrt{3},-1)$

$\Rightarrow \cos(\widehat{s_1,s_2})=\frac{|\vec{d}_{s_1}\cdot\vec{d}_{s_2}|}{|\vec{d}_{s_1}|\cdot|\vec{d}_{s_2}|}=\frac{|\sqrt{3}-2|}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{3+1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(\widehat{s_1,s_2})=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}\cdot 2} \Rightarrow (\widehat{s_1,s_2})=\arccos\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\right)=86^{\circ}33'54''$

***Ejercicio 24***: Una recta es paralela a la que tiene por ecuación r ≡ 5x + 8y - 12 = 0, y dista 6 unidades del origen. ¿Cuál es su ecuación?

(24º)

s paralela a $r \equiv 5x+8y-12=0 \Rightarrow \boxed{s \equiv 5x+8y+C=0}$

y además, $d(O,s)=6 \Rightarrow \frac{|5\cdot 0+8\cdot 0+C|}{\sqrt{5^2+8^2}}=6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|C|}{\sqrt{89}}=6 \Rightarrow |C|=6\sqrt{89} \Rightarrow C=6\sqrt{89}$ ó $C=-6\sqrt{89}$

Hay 2 soluciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} s_1 \equiv 5x+8y+6\sqrt{89}=0 \\ \text{y} \\ s_2 \equiv 5x+8y-6\sqrt{89}=0 \end{array}}$$

***Ejercicio 25***: Calcula los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1-2t \end{cases}$ cuya distancia al punto P(1,0) sea 5.

(25º) $P(1,0)$

$r \equiv \begin{cases} x=2-t \\ y=1-2t \end{cases} \Rightarrow$ Un punto genérico de r es: $Q(2-t,\ 1-2t)$

Se ha de cumplir que $d(P,Q)=5 \Rightarrow |\vec{PQ}|=5$

$\Rightarrow |(2-t-1,\ 1-2t-0)|=5 \Rightarrow \sqrt{(1-t)^2+(1-2t)^2}=5$

$\Rightarrow \sqrt{1-2t+t^2+1-4t+4t^2}=5 \Rightarrow 5t^2-6t+2=25$

$\Rightarrow 5t^2-6t-23=0 \Rightarrow t=\frac{6\pm\sqrt{36+460}}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{6 \pm \sqrt{496}}{10}$ que no es exacta, extraemos factores y simplificamos $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{16 \cdot 31}}{10} = \dfrac{6 \pm 4\sqrt{31}}{10} = \dfrac{3 \pm 2\sqrt{31}}{5}$

Tenemos dos puntos:

$$Q_1\left(2 - \frac{3+2\sqrt{31}}{5},\ 1 - 2\cdot\frac{3+\sqrt{31}}{5}\right) = Q_1\left(\frac{7-2\sqrt{31}}{5},\ -\frac{1+2\sqrt{31}}{5}\right)$$

$$Q_2\left(2 - \frac{3-2\sqrt{31}}{5},\ 1 - 2\cdot\frac{3-\sqrt{31}}{5}\right) = Q_2\left(\frac{7+2\sqrt{31}}{5},\ -\frac{1+\sqrt{31}}{5}\right)$$

***Ejercicio 26***: Halla la longitud del segmento que determina la recta $r \equiv y+3 = 2(x-1)$ al cortar a los ejes coordenados.

(26)

$r \equiv y+3 = 2(x-1) \Rightarrow r \equiv y+3 = 2x-2$

$\Rightarrow \boxed{r \equiv 2x - y - 5 = 0}$ La recta $r$, la intersectamos con los ejes coordenados $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ OX \equiv y=0 \end{cases} \Rightarrow 2x-5=0$, $x = 5/2$

$\Rightarrow \boxed{A\left(\frac{5}{2}, 0\right)}$

$\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ OY \equiv x=0 \end{cases} \Rightarrow y=-5$

$\Rightarrow \boxed{B(0,-5)}$

Longitud segmento $\overline{AB} = |\vec{AB}| = \left|\left(-\frac{5}{2}, -5\right)\right| = \sqrt{\frac{25}{4}+25}$

$= \sqrt{\dfrac{125}{4}} = \boxed{\dfrac{5}{2}\cdot\sqrt{5}}$

***Ejercicio 27***: Calcula las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas $r \equiv y = 2x$ y $r \equiv \begin{cases} x = -\sigma \\ y = -1+\sigma \end{cases}$

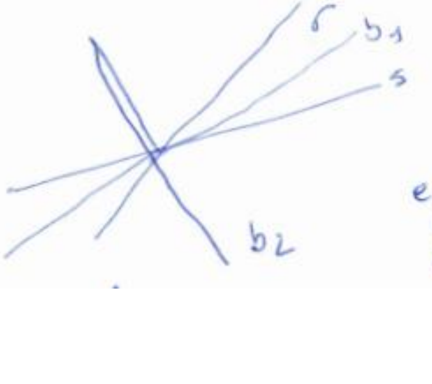
(27)

$r \equiv y = 2x \rightarrow \boxed{r \equiv 2x - y = 0} \Rightarrow \vec{u}_r = (1,2)$

$s \equiv \begin{cases} x = -\sigma \\ y = -1+\sigma \end{cases} \Rightarrow$ la pasamos a implícita $\Rightarrow \sigma = -x$

$\Rightarrow y = -1-x \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{s \equiv x+y+1=0}$




Las bisectrices son los puntos que equidistan (están a la misma distancia) de r y s.

Sea un punto $P(x, y)$ e imponemos que $d(P, r) = d(P, s)$

$$\Rightarrow \frac{|2x-y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow \frac{|2x-y|}{\sqrt{5}} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-y}{\sqrt{5}} = \dfrac{x+y-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = \sqrt{5}x + \sqrt{5}y - \sqrt{5} \\ \boxed{\Rightarrow b_1 \equiv (2\sqrt{2}-\sqrt{5})x - (\sqrt{2}+\sqrt{5})y + \sqrt{5} = 0} \\ \text{ó} \\ \dfrac{2x-y}{\sqrt{5}} = -\dfrac{x+y-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = -\sqrt{5}x - \sqrt{5}y + \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_2 \equiv (2\sqrt{2}+\sqrt{5})x + (\sqrt{5}-\sqrt{2})y - \sqrt{5} = 0}$$

***Ejercicio 28***: Dadas las rectas r ≡ 3x + y - 1 = 0 y s ≡ 2 x + m y -8 = 0, determinar m para que formen un ángulo de 45°.

28°

$$r \equiv 3x + y - 1 = 0 \Rightarrow \vec{u_r} = (-1, 3)$$

$$s \equiv 2x + m \cdot y - 8 = 0 \Rightarrow \vec{u_s} = (2, m)$$

Si forman un ángulo de 45° $\Rightarrow \cos 45° = \dfrac{|\vec{u_r} \cdot \vec{u_s}|}{|\vec{u_r}| \cdot |\vec{u_s}|}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-2+3m|}{\sqrt{(-1)^2+3^2} \cdot \sqrt{2^2+m^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-2+3m|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{m^2+4}} \Rightarrow$$

Elevamos al cuadrado $\Rightarrow$ $\underbrace{\dfrac{2}{4}}_{=\frac{1}{2}} = \dfrac{9m^2 - 12m + 4}{10 \cdot (m^2+4)} \Rightarrow 10(m^2+4) = 18m^2 - 24m + 8$

$$\Rightarrow 10m^2 + 40 = 18m^2 - 24m + 8 \Rightarrow 0 = 8m^2 - 24m - 32$$

$$\xrightarrow{:8} m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} < \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix}}$$

***Ejercicio 29***: Dados el punto P(k, 1) y la recta r: 3x – 4y + 1 = 0, halla el valor de k para que la distancia de P a r sea 3.

29°

$$P(k, 1) \qquad r \equiv 3x - 4y + 1 = 0$$

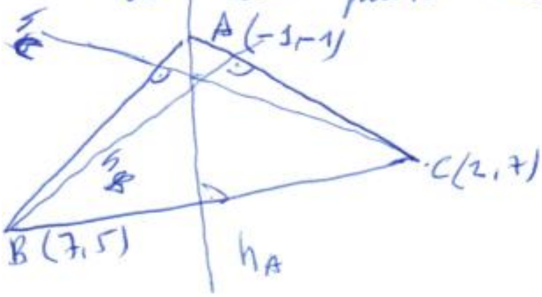
$$d(P, r) = \frac{|3k - 4 + 1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|3k-3|}{5} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |3k - 3| = 15 \Rightarrow \begin{cases} 3k - 3 = 15 \Rightarrow \\ \text{ó} \\ 3k - 3 = -15 \Rightarrow \end{cases} \boxed{\begin{matrix} k = 6 \\ \text{ó} \\ k = -4. \end{matrix}}$$

***Ejercicio 30***: Dado el triángulo A(-1, -1), B(7, 5), C(2, 7); calcular las ecuaciones de las alturas y determinar el ortocentro del triángulo.

30°

Las alturas de un triángulo son las rectas que pasan por un vértice y son ⊥ al lado opuesto. Todas las alturas se cortan en un punto llamado ORTOCENTRO




$h_A$: Altura del vértice $A(-1,-1)$

Su vector normal es $\vec{BC} = (-5, 2)$

$\Rightarrow h_A \equiv -5x + 2y + D = 0$

Como $A \in h_A \Rightarrow -5\cdot(-1) + 2\cdot(-1) + D = 0$

$\Rightarrow 5 - 2 + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = -3}$

$\boxed{h_A \equiv -5x + 2y - 3 = 0}$

$h_B$: Altura del vértice $B(7,5)$

Su vector normal es $\vec{AC} = (3, 8) \Rightarrow h_B \equiv 3x + 8y + D = 0$

Como $B \in h_B \Rightarrow 3\cdot 7 + 8\cdot 5 + D = 0 \Rightarrow 21 + 40 + D = 0 \Rightarrow D = -61$

$\Rightarrow \boxed{h_B \equiv 3x + 8y - 61 = 0}$

$h_C$: altura del vértice $C(2,7)$

Su vector normal es $\vec{AB} = (8, 6)$, que por comodidad tomamos

$\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{AB} = (4, 3) \Rightarrow h_C \equiv 4x + 3y + D = 0$

Como $C \in h_C \Rightarrow 4\cdot 2 + 3\cdot 7 + D = 0 \Rightarrow 8 + 21 + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = -29}$

$\Rightarrow \boxed{h_C \equiv 4x + 3y - 29 = 0}$

Calculemos ahora el ortocentro, H, como intersección de las altura $h_A$ y $h_B$ $\Rightarrow \begin{cases} -5x + 2y - 3 = 0 \\ 3x + 8y - 61 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\xrightarrow{-4E_1} \begin{cases} 20x - 8y + 12 = 0 \\ 3x + 8y - 61 = 0 \end{cases} \xrightarrow{E_2 + E_1} \begin{cases} -5x + 2y - 3 = 0 \\ 23x - 49 = 0 \end{cases}$

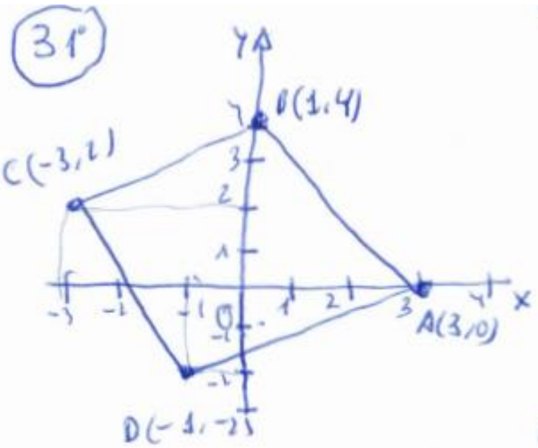
$\Rightarrow \boxed{x = \frac{49}{23}}$ Calculamos ahora "y" de la $E_1$:

$-5\cdot\frac{49}{23} + 2y - 3 = 0 \rightarrow 2y = 3 + \frac{245}{23}$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{157}{23}}$ $\boxed{H\left(\frac{49}{29}, \frac{157}{23}\right)}$

***Ejercicio 31***: Se tiene el paralelogramo ABCD cuyos vértices son A(3, 0), B(1, 4), C(-3, 2) y D(-1, -2). Calcular su área.

31°




Área = base × altura

Tomemos como base el lado $\overline{AB}$

$\Rightarrow$ base $= |\overrightarrow{AB}| = |(2,-4)| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

La altura es la distancia de D ó C a la recta que pasa por AB

Calculamos la recta que pasa por A y B $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2,-4)$

$\Rightarrow r_{AB} \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-4} \Rightarrow -4x+12 = 2y$

$\Rightarrow r_{AB} \equiv 4x+2y-12=0 \Rightarrow \boxed{r_{AB} \equiv 2x+y-6=0}$

Calculamos la altura

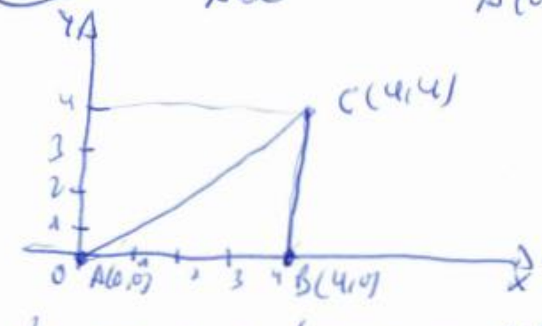
altura $= d(C, r_{AB}) = \frac{|2\cdot(-3)+2-6|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$

Luego, $\boxed{\text{Área} = 2\cdot\cancel{\sqrt{5}}\cdot\frac{10}{\cancel{\sqrt{5}}} = 20\ u^2}$

***Ejercicio 32***: Dado el triángulo ABC, de coordenadas A(0, 0), B(4, 0) y C(4, 4), calcula su área

32°

$\widehat{ABC}$ A(0,0), B(4,0), C(4,4)




Fácilmente se ve que

área $= \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{4\cdot 4}{2} = 8u^2$

Lo vamos a hacer analíticamente para comprobar que sale igual

Tomemos como base el lado AB $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ base $= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+0^2} = 4$

y la altura es la distancia de C a la recta del lado AB. Como $\vec{AB}=(4,0) \Rightarrow$ vector director $=\frac{1}{4}\vec{AB}=(1,0)$

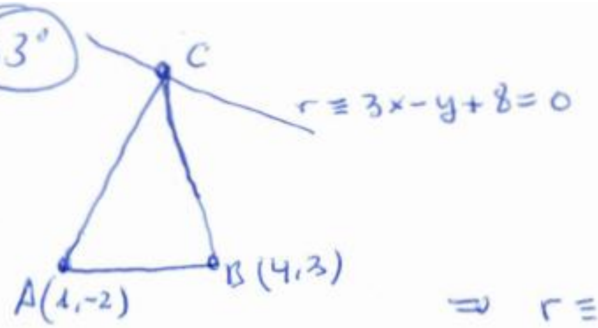
$\Rightarrow \begin{cases}x=0+\lambda\\ y=0+0\cdot\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\lambda\\ y=0\end{cases} \to$ La ecuación es $l_{AB}\equiv \boxed{y=0}$ que como podíamos intuir es el eje OX.

Así, altura $= d(C,l_{AB}) = \frac{|4|}{\sqrt{0^2+1}} = \frac{4}{1} = 4$

Luego Área $=\frac{4\cdot 4}{2} = 8\,u^2$

***Ejercicio 33***: El lado desigual de un triángulo isósceles ABC, tiene por extremos A(1,-2) y B(4,3). El vértice C está en la recta $r\equiv 3x-y+8=0$. Halla las coordenadas de C y el área del triángulo.

33°




Pasamos r a paramétricas. Hacemos $x=\lambda \Rightarrow 3\lambda-y+8=0$

$\Rightarrow y=8+3\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=8+3\lambda\end{cases}$ luego C es de la forma $C(\lambda, 8+3\lambda)$

Ahora, por ser un triángulo isósceles cuyo lado desigual es $\overline{AB}$, entonces $|\vec{AC}|=|\vec{BC}| \Rightarrow |(\lambda-1, 10+3\lambda)|=|(\lambda-4, 5+3\lambda)|$

$\Rightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2+(10+3\lambda)^2}=\sqrt{(\lambda-4)^2+(5+3\lambda)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1+100+60\lambda+9\lambda^2=\lambda^2-8\lambda+16+25+30\lambda+9\lambda^2$

$\Rightarrow 58\lambda+101=22\lambda+41 \Rightarrow 36\lambda=-60 \Rightarrow \lambda=-\frac{60}{36}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{5}{3}} \Rightarrow \boxed{C\left(-\frac{5}{3}, 3\right)}$

Calculamos ahora el área: $\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

Tomamos como base el lado desigual, $|\vec{AB}| = |(3,5)| = \sqrt{9+25}$

$\Rightarrow \boxed{\text{base} = \sqrt{34}}$

Ahora, la altura es la distancia de C a la recta que pasa por A y B. Calculamos la ecuación general de la recta que pasa por A y B. $\left\{ \text{Vector director} = \vec{AB} = (3,5) \text{ y tomamos } A(1,-2) \right.$

$\Rightarrow s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow s \equiv 5x-5 = 3y+6$

$\Rightarrow s \equiv 5x - 3y - 11 = 0$

Luego, $\text{altura} = d(C, s) = \frac{\left|5\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) - 3\cdot 3 - 11\right|}{\sqrt{5^2+(-3)^2}} =$

$= \frac{\left|-\frac{25}{3} - 20\right|}{\sqrt{34}} = \frac{85}{3\cdot\sqrt{34}} \Rightarrow \text{Área} = \frac{\sqrt{34}\cdot\frac{85}{3\sqrt{34}}}{2} = \frac{85}{6}\, u^2$

***Ejercicio 34***: Halla un punto del eje de abscisas que equidiste de las rectas $r \equiv 4x+3y+6=0$ y $s \equiv 3x+4y-9=0$

34º El eje de abscisas es $OX \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$ Un punto genérico es $P(\lambda, 0)$.

Imponemos que esté a la misma distancia de $\left\{ \begin{array}{l} r \equiv 4x+3y+6=0 \\ s \equiv 3x+4y-9=0 \end{array} \right.$

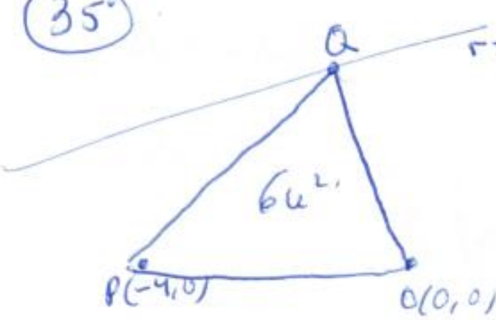
$d(P,r) = d(P,s) \Rightarrow \frac{|4\lambda + 6|}{\cancel{\sqrt{4^2+3^2}}} = \frac{|3\lambda - 9|}{\cancel{\sqrt{3^2+4^2}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4\lambda + 6 = 3\lambda - 9 \Rightarrow \lambda = -15 \\ \text{ó} \\ 4\lambda - 6 = -3\lambda + 9 \Rightarrow 7\lambda = 15 \Rightarrow \lambda = \frac{15}{7} \end{array} \right.$

Hay 2 soluciones: $\left\{ \begin{array}{l} P_1(-15, 0) \\ \text{ó} \\ P_2\left(\frac{15}{7}, 0\right) \end{array} \right.$

***Ejercicio 35***: Halla el punto de la recta $r \equiv 2x - 4y - 1 = 0$ que con el origen de coordenadas y el punto P(-4,0) determina un triángulo de área 6.

35º




$r \equiv 2x - 4y + 1 = 0$. Pasamos r a paramétricas para obtener un punto genérico.

Hacemos $y = \lambda \Rightarrow 2x - 4\lambda + 1 = 0$
$\Rightarrow 2x = -1 + 4\lambda \Rightarrow x = -\frac{1}{2} + 2\lambda$

Luego $r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases} \Rightarrow Q\left(-\frac{1}{2} + 2\lambda, \lambda\right)$

Como base tomamos $|\vec{OP}| = |(-4,0)| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$

y la altura es la distancia de Q a la recta que pasa por O y P, que obviamente es el eje $OX \equiv y = 0$

$$\text{altura} = d(Q, OX) = \frac{|\lambda|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |\lambda|$$

Como $\text{Área} = \dfrac{4 \cdot |\lambda|}{2} = 6 \Rightarrow |\lambda| = 3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \text{ó} \\ \lambda = -3 \end{cases}$

Hay 2 soluciones: $\boxed{\begin{cases} Q_1\left(-\frac{1}{2} + 6, 3\right) = Q_1\left(\frac{11}{2}, 3\right) \\ \text{ó} \\ Q_2\left(-\frac{1}{2} - 6, -3\right) = Q_2\left(-\frac{13}{2}, -3\right) \end{cases}}$

***Ejercicio 36***: De todas las recta que pasan por el punto A(1,2), halla la pendiente de aquellas cuya distancia al origen es 1.

36º

Las rectas que pasan por A(1,2) son en forma punto-pendiente:

$r \equiv y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow r \equiv y - 2 = mx - m \Rightarrow$

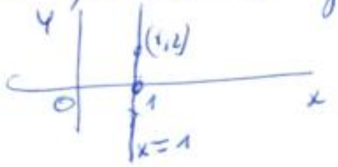
$\Rightarrow r \equiv mx - y + 2 - m = 0$

Imponemos $d(O, r) = 1 \Rightarrow \dfrac{|m\cdot 0 - 0 + 2 - m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{|2-m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Rightarrow |2-m| = \sqrt{m^2+1} \Rightarrow (2-m)^2 = \left(\sqrt{m^2+1}\right)^2$

$\Rightarrow 4 - 4m + \cancel{m^2} = \cancel{m^2} + 1 \Rightarrow -4m = -3 \Rightarrow \boxed{m = \frac{3}{4}}$

__NOTA__: Hay otra recta, la $s: x = 1$ que tiene pendiente $\infty$, que pasa por $A(1,2)$ y su distancia a $O(0,0)$ es $1$.

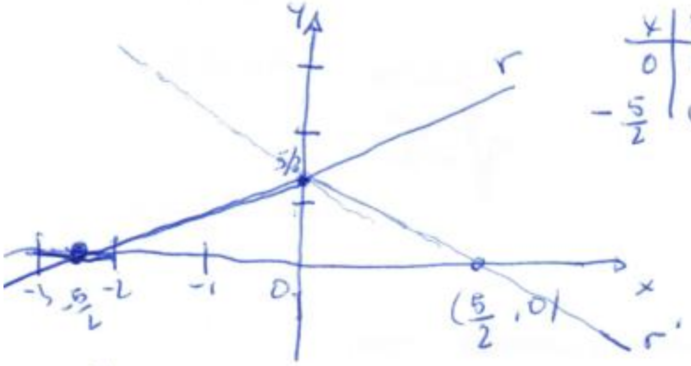



pero como su pte. no es un nº real, no la consideramos

***Ejercicio 37***: Dada la recta $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$, halla la ecuación de la recta simétrica de $r$ respecto del eje OY.

37º) $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$ Dibujamos la recta haciendo una tabla de valores

| x | y |
|---|---|
| 0 | 5/3 |
| $-\frac{5}{2}$ | 0 |




$r'$ es la recta que nos piden

$r'$ pasa por $A\left(0, \frac{5}{3}\right)$ y $B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right)$

luego $r' \equiv \dfrac{x - 5/2}{5/2} = \dfrac{y}{-5/3} \Rightarrow r' \equiv -\frac{5}{3}x + \frac{25}{6} = \frac{5}{2}y$

$\Rightarrow r' \equiv -10x + 25 = 15y \Rightarrow r' \equiv 10x + 15y - 25 = 0$

$\Rightarrow \boxed{r' \equiv 2x + 3y - 5 = 0}$

***Ejercicio 38***: Escribe, en una sola ecuación dependiente de un parámetro, todas la rectas paralelas a $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$ y elige, de entre ellas, la que pasa por P(-1,3)

38º) $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{s \equiv 2x - 3y + C = 0}$ son todas las rectas paralelas a $r$.

La que pase por $P(-1, 3) \Rightarrow 2\cdot(-1) - 3\cdot 3 + C = 0 \Rightarrow C = 11$

$\Rightarrow \boxed{s_1 \equiv 2x - 3y + 11 = 0}$

***Ejercicio 39***: Halla las bisectrices de las rectas $r \equiv 3x - 2y = -2$ y $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$ y comprueba que son perpendiculares.

(39)

$r \equiv 3x - 2y = -2 \Rightarrow \boxed{r \equiv 3x - 2y + 2 = 0}$

$s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \Rightarrow \lambda = y - 1 \end{cases} \Longrightarrow s \equiv x = 2y - 2 \Rightarrow \boxed{s \equiv x - 2y + 2 = 0}$

Tomemos un punto $P(x, y)$, y en las bisectrices se ha de cumplir que: $d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \dfrac{|3x - 2y + 2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|x - 2y + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x - 2y + 2}{\sqrt{13}} = \dfrac{x - 2y + 2}{\sqrt{5}} \\ \text{ó} \\ \dfrac{3x - 2y + 2}{\sqrt{13}} = -\dfrac{x - 2y + 2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y + 2\sqrt{5} = \sqrt{13}x - 2\sqrt{13}y + 2\sqrt{13} \\ \text{ó} \\ 3\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y + 2\sqrt{5} = -\sqrt{13}x + 2\sqrt{13}y - 2\sqrt{13} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 \equiv (3\sqrt{5} - \sqrt{13}) \cdot x + (2\sqrt{13} - 2\sqrt{5})y + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{13} = 0 \\ \text{ó} \\ b_2 = (3\sqrt{5} + \sqrt{13})x + (-2\sqrt{13} - 2\sqrt{5})y + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{13} = 0 \end{cases}$$

que son las ecuaciones de las bisectrices.

Tomemos los vectores directores de cada una de ellas

$\vec{d}_{b_1} = \left(-(2\sqrt{13} - 2\sqrt{5}),\ 3\sqrt{5} - \sqrt{13}\right) = \left(2\sqrt{5} - 2\sqrt{13},\ 3\sqrt{5} - \sqrt{13}\right)$

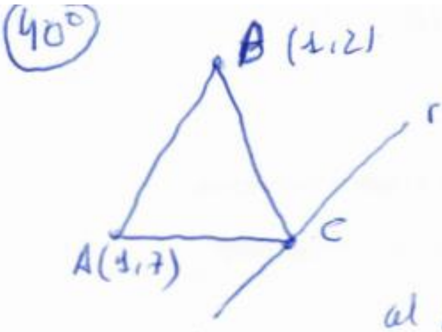
$\vec{d}_{b_2} = \left(-(-2\sqrt{13} - 2\sqrt{5}),\ 3\sqrt{5} + \sqrt{13}\right) = \left(2\sqrt{5} + 2\sqrt{13},\ 3\sqrt{5} + \sqrt{13}\right)$

Veamos $\vec{d}_{b_1} \cdot \vec{d}_{b_2} = (2\sqrt{5} - 2\sqrt{13})(2\sqrt{5} + 2\sqrt{13}) + (3\sqrt{5} - \sqrt{13})(3\sqrt{5} + \sqrt{13})$

$= 20 - 52 + 45 - 13 = 65 - 65 = 0 \Rightarrow b_1$ y $b_2$ son $\perp$

***Ejercicio 40***: El vértice B que determina el ángulo desigual de un triángulo isósceles, ABC, está situado en el punto (1,2). Sabiendo que el vértice A tiene por coordenadas (1,7) y que el vértice C está en la recta $r \equiv x - y + 1 = 0$, calcula las coordenadas del vértice C.

(40)




Pasamos $r$ a paramétricas

$y = \lambda \Rightarrow x = -1 + \lambda$

$r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

Luego $C(-1 + \lambda, \lambda)$ e imponemos que al ser isósceles $\Rightarrow$

$$\Rightarrow d(B,A) = d(B,C) \Rightarrow |\vec{BA}| = |\vec{BC}| \Rightarrow |(0,5)| = |(-2+\lambda, \lambda-2)|$$

$$\Rightarrow \sqrt{0^2+5^2} = \sqrt{(-2+\lambda)^2+(\lambda-2)^2} \Rightarrow 25 = 2\cdot(\lambda^2-4\lambda+4)$$

$$\Rightarrow 25 = 2\lambda^2 - 8\lambda + 8 \Rightarrow 2\lambda^2 - 8\lambda - 17 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64+136}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = \frac{8 \pm 10\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{4 \pm 5\sqrt{2}}{2}$ . Hay 2 soluciones.

$$C_1\left(-1 + \frac{4+5\sqrt{2}}{2}, \frac{4+5\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$C_2\left(-1 + \frac{4-5\sqrt{2}}{2}, \frac{4+5\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} C_1\left(\dfrac{2+5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{4+5\sqrt{2}}{2}\right) \\ \text{ó} \\ C_2\left(\dfrac{2-5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{4-5\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}}$$