HOJA 1 DE EJERCICIOS
UNIDAD 4: GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO

Ejercicio 1: Dados los vectores $\vec{u}=(3,-2)$, $\vec{v}=(-1,2)$ y $\vec{w}=(0,-5)$, pon $\vec{w}$ como combinación lineal de los otros dos.

1) $\vec{u} = (3,-2)$, $\vec{v} = (-1,2)$. $\vec{w} = (0,-5)$

$\vec{w} = a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v} \Rightarrow (0,-5) = a\cdot(3,-2) + b\cdot(-1,2)$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 3a - b \\ -5 = -2a + 2b \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = 3a}$

$\Rightarrow -2a + 2\cdot(3a) = -5 \Rightarrow 6a - 2a = -5 \Rightarrow 4a = -$

$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{5}{4}}$ $\boxed{b = -\frac{15}{4}}$

Ejercicio 2: Comprueba si el vector $\vec{u}=(3,-7)$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(-3,2)$ y $\vec{w}=(-6,4)$.

2) Lo mismo que el anterior.

$\vec{u} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} \Rightarrow (3,-7) = a\cdot(-3,2) + b\cdot(-6,4)$

$\Rightarrow \begin{cases} 3 = -3a - 6b \\ -7 = 2a + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 6b = -3 \\ 2a + 4b = -7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \frac{-3-6b}{3}}$

Sustituimos $2\cdot\left(\frac{-3-6b}{3}\right) + 4b = -7 \Rightarrow \frac{-6-12b}{3} + 4b = -7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-6-12b+12b}{3} = \frac{-21}{3} \Rightarrow -6 = -21$ Absurdo, no tiene solución pues no se puede calcular b.

Ejercicio 3: Dados los vectores $\vec{u}=(2,3)$, $\vec{v}=(-3,1)$ y $\vec{w}=(5,2)$, calcula:

a) $(3\cdot\vec{u}+2\cdot\vec{v})\vec{w}$ b) $\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{w}\cdot\vec{v}$ c) $(\vec{u}\cdot\vec{u})\vec{w}$

3º) $\vec{u} = (2,3)$ $\vec{v} = (-3,1)$ $\vec{w} = (5,2)$

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v})\cdot\vec{w} = \big((6,9) + (-6,2)\big)\cdot(5,2) = (0,11)\cdot(5,2) = 22$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{w}\cdot\vec{v} = (2,3)\cdot(-3,1) - (5,2)\cdot(-3,1) = (-3) - (-13)$
$= 10$

c) $(\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot\vec{w} = \big((2,3)\cdot(2,3)\big)\cdot(5,2) = 13\cdot(5,2) = (65,26)$

Ejercicio 4: Calcula x de modo que el producto escalar de $\vec{u}=(3,-5)$ y $\vec{v}=(x,2)$ sea igual a 7

4º) $(3,-5)\cdot(x,2) = 3x - 10 = 7 \Rightarrow 3x = 17 \Rightarrow \boxed{x = \frac{17}{3}}$

Ejercicio 5: Dado el vector $\vec{u}=(-5,k)$, calcula, en cada caso, k de modo que:

a) $\vec{u}$ sea ortogonal al vector $\vec{v}=(4,-2)$

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$

5º $\vec{u}=(-5,k)$

a) $\vec{u} \perp \vec{v}=(-4,2) \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow 20+2k=0 \Rightarrow \boxed{k=-10}$

b) $|\vec{u}|=\sqrt{(-5)^2+k^2}=\sqrt{25+k^2}=\sqrt{34} \Rightarrow 25+k^2=34$

$\Rightarrow k^2=9 \Rightarrow \boxed{k=\pm 3}$

Ejercicio 6: ¿Cómo varía el módulo de un vector si se multiplica por el número real k? Aplícalo a un caso particular.

6º $|k\cdot\vec{u}|=|k|\cdot|\vec{u}|$ O sea, se multiplica por el valor absoluto de k

$\vec{u}=(5,1)$ $k=-3$

$|-3\cdot(5,1)|=|(-15,3)|=\sqrt{225+9}=\sqrt{234}=\sqrt{9\cdot 26}=3\sqrt{2}$

$|-3|\,|(5,1)|=3\cdot\sqrt{25+1}=3\sqrt{26}$

Ejercicio 7: Dados los vectores $\vec{u}=(-2,1)$ y $\vec{v}=(3,5)$, calcula:

a) $\vec{v}\cdot\vec{u}$

b) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

c) Ángulo de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

d) Un vector ortogonal a $\vec{v}$

7º $\vec{u}=(-2,1)$ $\vec{v}=(3,5)$

a) $\vec{v}\cdot\vec{u}=(3,5)\cdot(-2,1)=-6+5=-1$

b) Como $\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\,|proy_{\vec{v}}(\vec{u})| \Rightarrow |proy_{\vec{v}}(\vec{u})|=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}|}=$

$=\dfrac{-1}{\sqrt{3^2+5^2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{34}}$

c) $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+5^2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{34}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{170}}\right)=94^\circ 23' 55.34''$

d) $\vec{w}\perp\vec{v}=(3,5) \Rightarrow \vec{w}=(-5,3)$ pues $\vec{w}\cdot\vec{v}=0$

También se puede elegir otro pues hay infinitos, $\vec{w_1}=(5,-3)$, $\vec{w_2}=(-10,6)$ ...

Ejercicio 8: Dados los vectores $\vec{u}=(-2,1)$ y $\vec{v}=(3,-4)$, calcula:

a) Un vector ortogonal a $\vec{v}+\vec{u}$

b) Un vector ortogonal a $\vec{v}$ y de módulo la unidad (vector ortonormal a $\vec{v}$)

c) Un vector en la misma dirección que $\vec{u}$, sentido opuesto y módulo 5

8)

$\vec{u}=(-2,1)$, $\vec{v}=(3,-4)$

a) $\vec{v}+\vec{u}=(1,-3)$. $\vec{w}\perp(1,-3) \Rightarrow \vec{w}=(3,1)$

b) $\vec{a}\perp\vec{v}=(1,-3) \Rightarrow \vec{a}=(3,1)$ es $\perp$ a $\vec{v}$ pero no tiene módulo 1.

Como $|\vec{a}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

El vector $\vec{b}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot(3,1)=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ tiene módulo 1

ó $\vec{b}_2=-\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot(3,1)=\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$ " " "

2ª forma:

Sea $\vec{b}=(a,b)$. Se tiene que cumplir que:

$\vec{b}\perp\vec{v} \Rightarrow (a,b)\cdot(1,-3)=0$

$|\vec{b}|=1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=1$

$\Rightarrow \begin{cases} a-3b=0 \Rightarrow \boxed{a=3b} \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$

$\Rightarrow (3b)^2+b^2=1 \Rightarrow 9b^2+b^2=1 \Rightarrow 10b^2=1 \Rightarrow b^2=\frac{1}{10}$

$\Rightarrow b=\pm\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \vec{b}_1=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$a=3b=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\qquad \vec{b}_2=\left(\frac{-3}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$

c) $\vec{m}$ en la misma dirección que $\vec{u} \Rightarrow \vec{m}\parallel\vec{u}$, es decir, $\vec{m}$ y $\vec{u}$ son proporcionales. Si $\vec{m}=(a,b) \Rightarrow (a,b)=k\cdot(-2,1)$

$\Rightarrow \vec{m}=(-2k,k)$

Como $|\vec{m}|=5 \Rightarrow \sqrt{(-2k)^2+k^2}=5 \Rightarrow \sqrt{5k^2}=5$

$\Rightarrow 5k^2=25 \Rightarrow k^2=5 \Rightarrow k=\pm\sqrt{5}$

Luego $m_1=(-2\sqrt{5},\sqrt{5})$ ó $m_2=(2\sqrt{5},-\sqrt{5})$

Ejercicio 9: Obtener las coordenadas del extremo del vector $\overrightarrow{AB}=(-2,5)$ sabiendo que esta aplicado en el punto A(1,-2).

9°

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-2,5)\\ A(1,-2)\quad B(a,b)\end{array}\right\} \Rightarrow (a-1,b+2)=(-2,5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(-1,3)}$$

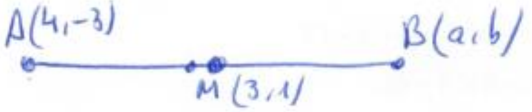
Ejercicio 10: Determina las coordenadas del punto medio del segmento AB siendo $A(-1,2), B(2,0)$.

10°

$$M=\left(\frac{-1+2}{2},\ \frac{2+0}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},1\right)$$

Ejercicio 11: Averigua las coordenadas del punto B, sabiendo que M(3,1) es el punto medio del segmento AB y que A(4,-3).

11°

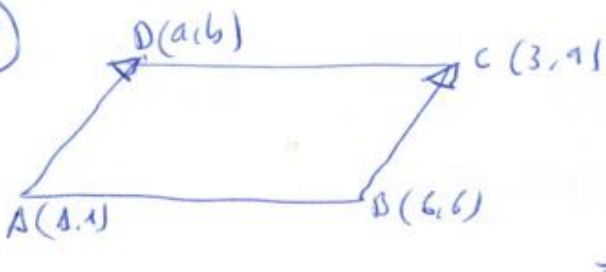


$$\left(\frac{4+a}{2},\ \frac{-3+b}{2}\right)=(3,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4+a}{2}=3 \Rightarrow a=2 \\ \dfrac{-3+b}{2}=1 \Rightarrow b=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(2,5)}$$

Ejercicio 12: Sabiendo que los puntos A(1,1), B(6,6) y C(3,9) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, determina las coordenadas del cuarto vértice.

12°



$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1,b-1)=(-3,3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(-2,2)}$$

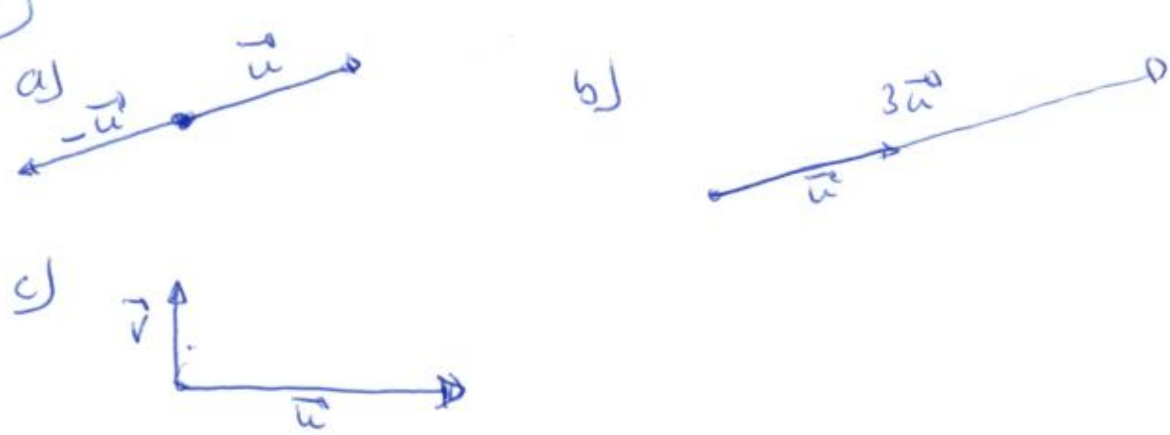
Ejercicio 13: Traza dos vectores fijos del plano que tengan el origen común y además:

a) Módulo y dirección iguales, pero sentidos opuestos.

b) Dirección y sentido iguales, pero que el módulo de uno sea triple que el módulo del otro.

c) Que las direcciones sean perpendiculares y el módulo de uno sea la mitad que el módulo del otro.

13°



Ejercicio 14: Calcula el valor de m para que el vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, m\right)$ sea unitario.

14°

$\vec u = \left(\frac13, m\right) \Rightarrow |\vec u| = \sqrt{\frac19 + m^2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac19 + m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac89 \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt8}{3} \Rightarrow \boxed{m = \pm\frac{2\sqrt2}{3}}$

Ejercicio 15: Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u} = (6, -8)$ y $\vec{v} = (4, x)$ sean linealmente dependientes.

15°

Si $\vec u$ y $\vec v$ son l. dependiente $\Rightarrow$ $\vec u$ y $\vec v$ tienen la misma dirección $\Rightarrow$ $\vec u$ y $\vec v$ son proporcionales $\Rightarrow \frac46 = \frac{x}{-8} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{32}{6} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{16}{3}}$

Ejercicio 16: Dados los vectores $\vec{x} = (a, 1)$ e $\vec{y} = (-2, b)$, halla los valores de a y b para que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sean perpendiculares y que $|\vec{y}| = 2\sqrt{2}$

16°

$\vec x = (a, 1) \qquad \vec y = (-2, b)$

$\vec x \perp \vec y \Rightarrow \vec x \cdot \vec y = 0 \Rightarrow -2a + b = 0$

$|\vec y| = 2\sqrt2 \Rightarrow \sqrt{4 + b^2} = 2\sqrt2 \Rightarrow 4 + b^2 = 8 \Rightarrow b^2 = 4$

$\Rightarrow \boxed{b = \pm 2}$

Si $\boxed{b = 2} \Rightarrow -2a + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

Si $\boxed{b = -2} \Rightarrow -2a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

Ejercicio 17: Averigua cual es el valor de m para que los puntos A(1, 0), B(4, –1), C(m, 2) estén alineados.

17°

A(1,0), B(4,−1) y C(m,2) están alineados $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{AB} = (3,-1)$ y $\vec{AC} = (m-1,2)$ son proporcionales

$\Rightarrow \dfrac{m-1}{3} = \dfrac{2}{-1} \Rightarrow m-1 = -6 \Rightarrow \boxed{m=-5}$

Ejercicio 18: Dados los vectores $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(6,2)$, halla un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{w}\cdot\vec{u}=1$ y $\vec{w}\perp\vec{v}$

18°

$\vec{u} = (2,1)$ $\vec{v} = (6,2)$

$\vec{w} = (a,b)$ $\vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow 6a+2b=0 \Rightarrow$

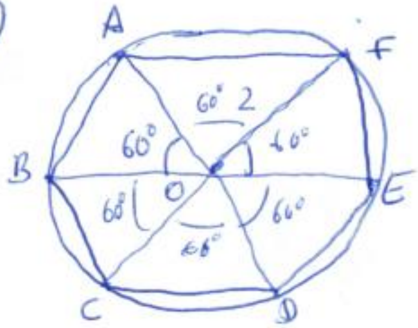
$\vec{w}\cdot\vec{u} = 1 \Rightarrow 2a+b=1 \Rightarrow \boxed{b = 1-2a}$

$\Rightarrow 3a+b=0 \Rightarrow 3a+1-2a=0 \Rightarrow \boxed{a=-1}$ $\boxed{b=3}$

Ejercicio 19: En una circunferencia de radio 2 cm y centro O, se inscribe un hexágono de vértices A,B,C,D,E,F. Calcula los siguientes productos escalares:

a) $\vec{OA}\cdot\vec{OB}$ b) $\vec{OA}\cdot\vec{OC}$ c) $\vec{AB}\cdot\vec{ED}$ d) $\vec{BC}\cdot\vec{EF}$

19°



a) $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = |\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|\cdot\cos 60°$

$= 2\cdot 2\cdot \frac{1}{2} = 2$

b) $\vec{OA}\cdot\vec{OC} = |\vec{OA}|\cdot|\vec{OC}|\cos 120°$

$= 2\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

c) $\vec{AB}\cdot\vec{ED} = |\vec{AB}|\,|\vec{ED}|\cdot\cos 0° = 2\cdot 2\cdot 1 = 4.$

$\vec{AB} \parallel \vec{ED}$, es más, $\vec{AB} = \vec{ED}$

d) $\vec{BC}\cdot\vec{EF} = |\vec{BC}|\,|\vec{EF}|\cos 180° = -4.$

$\vec{BC} = -\vec{EF}$

Ejercicio 20: Sabiendo que $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$ u que $\vec{u}\perp\vec{v}$, calcula $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$

20°

$|\vec{u}| = 3$ $|\vec{v}| = 4$ $\vec{u}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})} = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u} + \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{0} + \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{u}}_{0} + \vec{v}\cdot\vec{v}}$

$= \sqrt{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2} = \sqrt{9+16} = 5$

Análogam.: $|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})} = \sqrt{|\vec{u}|^2 - \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{0} - \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{u}}_{0} + |\vec{v}|^2}$

$= \sqrt{9+16} = 5$

Ejercicio21: Calcula x para que los vectores $\vec{u}=(3,x)$ y $\vec{v}=(5,2)$ formen un ángulo de 60^o

21º

$\cos 60^o = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{15+2x}{\sqrt{9+x^2}\cdot\sqrt{25+4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{225+60x+4x^2}{(9+x^2)\cdot 29} \Rightarrow 29\cdot(9+x^2) = 4\cdot(225+60x+4x^2)$

$\Rightarrow 261+29x^2 = 900+240x+16x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13x^2 - 240x - 639 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{240 \pm \sqrt{57600+33228}}{26}$

$\Rightarrow x = \dfrac{240 \pm 301{,}38}{26}$ $x_1 = 20{,}82$; $x_2 = -2{,}36$

Ejercicio 22: Demuestra que el vector $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ es ortogonal al vector $\vec{c}$

22º

$\left[(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}\right]\cdot\vec{c} =$

$= (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) = 0$ luego son ortogonales

Ejercicio 23: Da un par de ejemplos donde se vea que si $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ no implica que $\vec{b}=\vec{c}$

23º

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} \not\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}$

Ej. 1 $\vec{a}=(3,2)$ $\vec{b}=(-2,3)$

$\vec{c}=(4,-6)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6+6=0$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = 12-12=0$ y obviamente $\vec{b}\neq\vec{c}$