# HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
## UNIDAD 3: **APLICACIONES DE LAS DERIVADAS**

***Ejercicio 1***: Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{\frac{2x}{x^2+1}}$. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de $f$ (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan)

① $f(x)=e^{\frac{2x}{x^2+1}}$ (Monotonía y extremos)

$\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}$

$f'(x)=e^{\frac{2x}{x^2+1}}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=e^{\frac{2x}{x^2+1}}\cdot\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{\frac{2x}{x^2+1}}=0$ sin solución

$\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow 2-2x^2=0$

$1=x^2;\quad x=\pm 1$

| | $(-\infty,-1)$ | $x=-1$ | $(-1,1)$ | $x=1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $f'(-1)=0$ | $+$ | $f'(1)=0$ | $-$ |
| $f$ | ↘ | $f(-1)=\frac{1}{e}$ | ↗ | $f(1)=e$ | ↘ |
| | | $\left(-1,\frac{1}{e}\right)$ MÍNIMO RELATIVO | | $(1,e)$ MÁXIMO RELATIVO | |

- $f$ estrictamente creciente en $(-1,1)$
- $f$ estrictamente decreciente en $(-\infty,-1)$ y $(1,+\infty)$

***Ejercicio 2***: Sea $f$ la función definida por $f(x)=\dfrac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x\neq 0$ y $x\neq 2$. Estudia la monotonía de dicha función.

② $f(x)=\frac{9x-3}{x^2-2x}$ $x\neq 0,\ x\neq 2$. Estudiar monotonía.

$\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}-\{0,2\}$

$f'(x)=\frac{9(x^2-2x)-(9x-3)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=$

$=\frac{9x^2-18x-(18x^2-18x-6x+6)}{(x^2-2x)^2}=$

$=\frac{-9x^2+6x-6}{(x^2-2x)^2}$

$f'(x)=\frac{-9x^2+6x-6}{(x^2-2x)^2}$

$f'(x)=0$ sin solución real

$f'(x)=0$ no tiene solución real:

$-9x^2+6x-6=0$

no tiene solución real

| | $(-\infty,0)$ | $x=0$ | $(0,2)$ | $x=2$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $\nexists$ | $-$ | $\nexists$ | $-$ |
| $f$ | ↘ | $\nexists$ | ↘ | $\nexists$ | ↘ |

$f$ estrictamente decreciente en $\mathbb{R}-\{0,2\}$. No hay extremos.

***Ejercicio 3***: Sea $f$ la función definida para $x \neq 1$ por $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de dicha función. Estudia también su curvatura y puntos de inflexión.

(3) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$ $\quad x\neq 1$. Estudiar monotonía y extremos. También curvatura y P.I.

$$f'(x)=\frac{4x(x-1)-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$$

$\mathrm{Dom}\,f=\mathrm{Dom}\,f'=\mathbb{R}-\{1\}$

$f'(x)=0 \iff 2x^2-4x=0$

$x(2x-4)=0$ $\quad x=0$

$2x-4=0$

$x=2$

| | $-\infty$ a $0$ | $0$ a $1$ | $1$ | $1$ a $2$ | $2$ a $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $-$ | $\nexists$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nexists$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

- $f$ estrictamente creciente en $(-\infty,0)$ y $(2,+\infty)$
- $f$ estrictamente decreciente en $(0,1)$ y $(1,2)$
- $P(0, f(0))=P(0,0)$ es MÁXIMO RELATIVO
- $Q(2, f(2))=Q(2,8)$ es MÍNIMO RELATIVO

$$f''(x)=\left(\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(4x-4)(x-1)^2-2(2x^2-4x)(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(4x-4)(x-1)-2(2x^2-4x)}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{4+4x^2-8x-4x^2+8x}{(x-1)^3}=\frac{4}{(x-1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$$

| | $-\infty$ a $1$ | $1$ | $1$ a $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ |
| $f$ | $\cap$ | $\nexists$ | $\cup$ |
| | cóncava | | convexa |

$f''(x)=0$

No tiene solución

No hay P.I.

No posibles P.I.

***Ejercicio 4***: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=Ln(x^2+1)$. Determina los intervalos de monotonía y sus extremos relativos (puntos donde se alcanzan y valor de la función. Estudia también su curvatura.

$f(x)=Ln(x^2+1)$ Monotonía y extremos. Curvatura.

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ $\qquad \mathrm{Dom}\,f=\mathrm{Dom}\,f'=\mathbb{R}$

$f'(x)=0 \iff 2x=0$ ; $x=0$ Pto crítico o singular

Criterio 2ª derivada: $f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$

$f''(0)=2>0 \Rightarrow x=0$ es un MÍNIMO RELATIVO

| | $-\infty$ a $0$ | $0$ a $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

- $f$ es decreciente en $(-\infty,0)$
- $f$ es creciente en $(0,+\infty)$

Curvatura: $f''(x) = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$ $\quad \text{Dom} f'' = \mathbb{R}$

$f''(x)=0 \iff 2-2x^2=0$ ; $x^2=1$ ; $x=\pm 1$ posibles P.I.

| | $-\infty$ a $-1$ | $-1$ a $1$ | $1$ a $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $f$ | ∩ | ∪ | ∩ |

- $f$ es cóncava en $(-\infty,-1)$ y $(1,+\infty)$
- $f$ es convexa en $(-1,1)$
- $f$ tiene dos pts de inflexión. $PI_1(1,0)$ y $PI_2(-1,0)$

***Ejercicio 5***: Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2-|x|$. Determina los intervalos de crecimiento y sus extremos relativos.

$f(x)=x^2-|x|$

$f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x<0 \\ x^2-x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ $\qquad f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ 2x-1 & x>0\end{cases}$

$f$ no es derivable en $x=0$

- $f'(x)=0 \Rightarrow 2x+1=0$ ; $x=-\frac{1}{2}$

  $f'(x)=2x+1$ $\quad x=-\frac{1}{2}$ es mínimo

  $f$ decrece en $(-\infty,-1/2)$

  $f$ crece en $(-1/2, 0)$

| | $-\infty$ a $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ a $0$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | ↘ | ↗ |

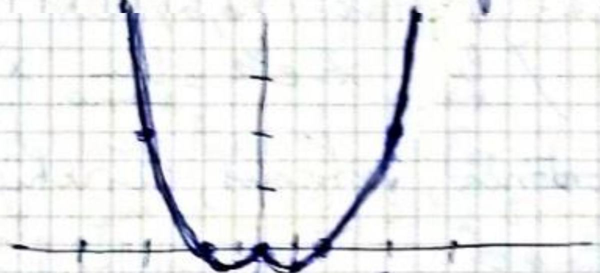
- $f'(x)=0 \Rightarrow 2x-1=0$ ; $x=1/2$

  $f'(x)=2x-1$ $\quad x=\frac{1}{2}$ es mínimo R.

  $f$ decrece en $(0, 1/2)$

  $f$ crece en $(1/2, +\infty)$

| | $0$ a $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ a $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | ↘ | ↗ |



$f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x<0 \\ x^2-x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

| x | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| y | $2$ | $0$ | $-1/4$ | $0$ |

| x | $0$ | $1/2$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| y | $0$ | $-1/4$ | $0$ | $2$ |

$P(-1/2, -1/4)$ es un mínimo relativo

$Q(1/2, -1/4)$ es un " "

$R(0,0)$ es un máximo relativo

**Ejercicio 6**: De una función $f:[0,5] \to \mathbb{R}$, se sabe que $f(3)=6$ y que su función derivada está dada por:

$$f'(x)=\begin{cases} 5x-2 & si \quad 0<x<1 \\ x^2-6x+8 & si \quad 1\le x<5 \end{cases}$$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente y la normal a la gráfica de $f$ en $x=3$

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f$ y calcula sus extremos relativos o locales (puntos donde se obtienen y valores que alcanza la función)

a) $P(3,6)$ $\quad m_t = f'(3) = 3^2-6\cdot 3+8 = 9-18+8 = -1$

$r_t: y-6 = -1(x-3)$ ; $\quad r_t: \boxed{y = -x+9}$

$r_n: y-6 = 1(x-3)$ ; $\quad r_n = \boxed{y = x+3}$

b) $f'(x)=0$ ; $5x-2=0$ ; $x=\frac{2}{5} \in (0,1)$

$f'(x)=0$ ; $x^2-6x+8=0$ ; $x = \frac{+6\pm\sqrt{36-32}}{2} = \frac{6\pm 2}{2}$

$x=4 \in (1,5)$

$x=2 \in (1,5)$

posibles extremos locales.

| | $0$ — $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ — $1$ | $1$ — $2$ | $2$ — $4$ | $4$ — $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | ↘ | ↗ | ↗ | ↘ | ↗ |

$f'(x)=5x-2$ $\quad f'(x)=x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$ $\quad + \; 2 \; - \; 4 \; +$

- $f$ estrictamente creciente en $\left(\frac{2}{5},1\right)$, $(1,2)$ y $(4,5)$
- $f$ estrictamente decreciente en $\left(0,\frac{2}{5}\right)$ y $(2,4)$
- $x=\frac{2}{5}$ MÍNIMO REL. / $x=4$ MÍNIMO REL. / $x=2$ MÁXIMO REL.

**Ejercicio 7**: Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 $cm^3$. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1 €/$cm^2$ y para la base se emplea un material un 50 % más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

Caja cerrada de base cuadrada


$\left.\begin{array}{l} V = x^2 y \\ V = 80 \ cm^3 \end{array}\right\}$

- Tapa + sup. lateral material $1$ €/$cm^2$
- Base 50% más cara material $1'5$ €/$cm^2$

Hallar dimensiones para que el coste sea mínimo:

$S = \underbrace{x^2}_{1'5 \text{ €/cm}^2} + \underbrace{4xy + x^2}_{1 \text{ €/cm}^2}$

Como $x^2 y = 80$

$y = \frac{80}{x^2}$

$$P(x) = 1'5\cdot x^2 + 1\cdot\left(4x\cdot\frac{80}{x^2}+x^2\right)$$

$$P(x) = 1'5x^2 + \frac{320}{x} + x^2$$

$$\boxed{P(x) = 2'5x^2 + \frac{320}{x}}$$

$80\ cm^2 = 0'80\ dm^2 = 0'0080\ m^2$

$$P'(x) = 5x - \frac{320}{x^2}$$

$$P'(x) = \frac{5x^3-320}{x^2}$$

$P'(x)=0 \qquad 5x^3-320=0$

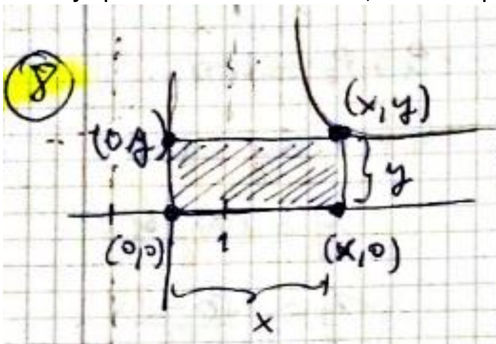
$$x = \sqrt[3]{\frac{320}{5}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$x = 4\ cm \Rightarrow y = \frac{80}{x^2} = \frac{80}{16} = 5\ cm$

R: Las dimensiones de la caja son 4cm x 8cm de base y 5cm de altura

***Ejercicio 8***: De entre todos los rectángulos que tiene uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto a este vértice en la curva $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}\ (x>1)$, uno de sus lados sobre el semieje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima.

8




$x>1$

$A = x\cdot y$ máxima

$$A(x) = x\cdot\frac{2x^2}{x^2-1}$$

$$\boxed{A(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}} \quad x>1$$

$$A'(x) = \frac{6x^2(x^2-1)-2x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x^4-6x^2-4x^4}{(x^2-1)^2}$$

$$\boxed{A'(x) = \frac{2x^4-6x^2}{(x^2-1)^2}}$$

$A'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^4-6x^2=0,\quad 2x^2(x^2-3)=0 \to x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$

Como debe ser $x>1 \Rightarrow x=+\sqrt{3}$

| | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $\nexists$ | $-$ | | $+$ | |
| $f$ | $\nexists$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

$x=\sqrt{3}$ es un mínimo para la función $A(x)$

$$y = \frac{2(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2-1}; \quad y = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

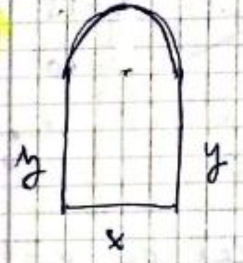
$y = 3\sqrt{3}$

Los vértices del rectángulo son:

$(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(0,3\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3},3\sqrt{3})$

***Ejercicio 9***: Una ventana *normanda* consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10 m, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.

9




$P = 10\ m$

$P = x + 2y + \frac{2\pi r}{2} = x + 2y + \pi \cdot \frac{x}{2}$

$10 = x + 2y + \frac{\pi x}{2}$ ; $y = \frac{20 - 2x - \pi x}{4}$

$20 = 2x + 4y + \pi x$

$A = xy + \frac{\pi r^2}{2}$

$A(x) = x \cdot \left(\frac{20 - 2x - \pi x}{4}\right) + \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$

$A(x) = \frac{20x - 2x^2 - \pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{40x - 4x^2 - 2\pi x^2 + \pi x^2}{8}$

$A(x) = \frac{40x - 4x^2 - \pi x^2}{8}$

$A(x) = (40x - 4x^2 - \pi x^2) \cdot \frac{1}{8}$

$\boxed{A(x) = \frac{1}{8}(40x - 4x^2 - \pi x^2)}$

$A'(x) = (40 - 8x - 2\pi x) \cdot \frac{1}{8}$

$A'(x) = 0 \iff 40 - x(8 + 2\pi) = 0$

$A''(x) = \frac{1}{8} \cdot (-8 - 2\pi)$ $\quad x = \frac{40}{8 + 2\pi}$ $\quad x = \frac{40}{8+2\pi} \simeq 2'8\ m$

$A''(x) < 0$

Luego $x = \frac{40}{8+3\pi}$ es un máximo para $A(x)$

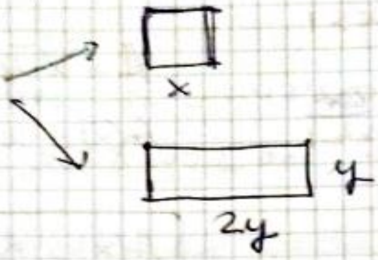
$y = \frac{20 - \frac{80}{8+2\pi} - \frac{\pi \cdot 40}{8+2\pi}}{4}$

$y = \frac{20}{8+2\pi} \simeq 1'4\ m$

***Ejercicio 10***: Un alambre de 100 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se construye un cuadrado y con el otro trozo un rectángulo cuya base es el doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

10

100 m




$P_1 + P_2 = 100$

$4x + 6y = 100$

$y = \frac{100 - 4x}{6}$

$y = \frac{50 - 2x}{3}$

$S = A_1 + A_2$ debe ser máxima

$S = x^2 + 2y \cdot y \longrightarrow S = x^2 + 2y^2$

$S(x) = x^2 + 2\left(\frac{50-2x}{3}\right)^2$

$S(x) = x^2 + 2\,\frac{2500 + 4x^2 - 200x}{9}$

$S(x) = \frac{9x^2 + 5000 + 8x^2 - 400x}{9} = \frac{17x^2 - 400x + 5000}{9}$

$S'(x) = \frac{1}{9}\cdot(34x - 400)$ ; $S'(x) = 0 \iff x = \frac{400}{34}$

$x = \frac{200}{17}$ m

$x \simeq 11'7647$ m

$y = \frac{50 - \frac{400}{17}}{3} = \frac{850 - 400}{51} = \frac{450}{51}$

$y = \frac{150}{17}$ m $\simeq 8'8235$ m

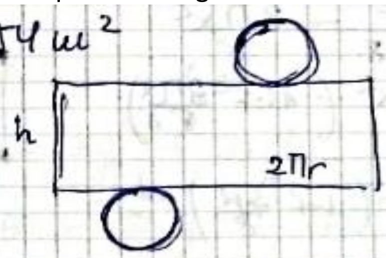
$S''(x) = \frac{1}{9}\cdot 34 = \frac{34}{9} > 0$

luego $x = \frac{200}{17}$ es un mínimo para $S(x)$

R: los trozos serán de ($4x$ y $6y$) $\frac{800}{17}$ m y $\frac{900}{17}$ m

***Ejercicio 11***: Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a $54\ m^2$. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

Cilindro de $A = 54\ m^2$


$A = 54\ m^2$

$54 = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$54 - 2\pi r^2 = 2\pi r h$

$\frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = h$

$V = \pi r^2 h$

Se quiere volumen máximo.

$A = A_L + 2A_B$

$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$

$V(r) = r\cdot(27 - \pi r^2)$

$\boxed{V(r) = 27r - \pi r^3}$

$V(r) = 27r - \pi r^3$

$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$ ; $V'(r) = 0$ $\quad 27 = 3\pi r^2$

$\frac{9}{\pi} = r^2$; $r = \sqrt{\frac{9}{\pi}}$ m

$V''(r) = -6\pi r$

$V''\left(\sqrt{\frac{9}{\pi}}\right) = -6\cdot\pi\cdot\frac{3}{\sqrt{\pi}} < 0 \Rightarrow$ ($r = \sqrt{\frac{9}{\pi}}$ m) es un máximo

$h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$

$r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm

$h = \frac{54 - 2\cdot\cancel{\pi}\cdot\frac{9}{\cancel{\pi}}}{2\pi\cdot\frac{3}{\sqrt{\pi}}} = \frac{36}{\frac{6\pi}{\sqrt{\pi}}}$

$h = \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm

dimensiones para que el volumen sea máximo con $A = 54$ cm$^2$

***Ejercicio 12***: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula los valores de $a, b, c$ y $d$ sabiendo que $f$ verifica:

- El punto $(0,1)$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f$.
- $f$ tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x = 1$.
- La recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 1.

Con los datos:

- Si $(0,1)$ es P.I. $\Rightarrow$ $f(0) = 1$, $f''(0) = 0$
- Si $x = 1$ es mínimo relativo $\rightarrow f'(1) = 0$
- Si la $r_t$ en $x = 2$ tiene $m = 1 \rightarrow f'(2) = 1$

$f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$ $\qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0$, $b = 0$ $\qquad f''(x) = 6ax + 2b$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + c = 0$

$f'(2) = 1 \Rightarrow 12a + c = 1$ $\quad \Big\}$ $a = 1/9$ $\quad c = -3/9$ $\quad c = -1/3$

***Ejercicio 13***: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + e^{-x}$. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de $f$, es decir, estudia su curvatura.

Sea $f(x) = x + e^{-x}$. Estudia su curvatura

$f'(x) = (x + e^{-x})' = 1 - e^{-x}$

$f''(x) = e^{-x}$

No hay P.I. $\quad f''(x) = 0$ no tiene solución y es siempre convexa, en todo $\mathbb{R}$ porque $f''(x) > 0$

***Ejercicio 14***: Sea $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$.

a) Estudia la monotonía de $f$.

b) Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de $f$.

**a)** $f'(x) = e^x\cdot(\cos x + \operatorname{sen} x) + e^x(-\operatorname{sen} x + \cos x) =$

$= e^x \cdot 2\cos x$

$\boxed{f'(x) = 2\cdot e^x\cdot \cos x}$

$f'(x) = 0 \iff \cos x = 0 \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} & (90^\circ) \\ x = \frac{3\pi}{2} & (270^\circ) \end{cases}$

| | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

- $f$ es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
- $f$ es decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
- $f$ tiene un máximo en $P\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$
- $f$ tiene un mínimo en $Q\left(\frac{3\pi}{2}, -e^{\frac{3\pi}{2}}\right)$

**b)** $f''(x) = 2\left(e^x\cdot\cos x + e^x\cdot(-\operatorname{sen} x)\right) = 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$

$\boxed{f''(x) = 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)}$

$f'(x) = 0 \iff \cos x - \operatorname{sen} x = 0$

$\cos x = \operatorname{sen} x \iff x = \frac{\pi}{4} \quad (45^\circ)$

$x = \frac{5\pi}{4} \quad (45^\circ + 180^\circ = 225^\circ)$

posibles P.I.

| | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{5\pi}{4}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f$ | | $\cup$ | | $\cap$ | | $\cup$ | |

- $f$ es cóncava en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$
- $f$ es convexa en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$
- $f$ tiene dos puntos de inflexión: en $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$

***Ejercicio 15***: Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de $f$ (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan).

b) Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de $f$ .

a)

$$f'(x)=\frac{3(\sqrt{x})-(3x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=\frac{3\sqrt{x}-\frac{3x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{6x-3x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{3x-1}{2x\sqrt{x}} \qquad f'(x)=\frac{3x-1}{2\sqrt{x^3}} \qquad \mathrm{Dom}\,f'=(0,+\infty)$$

$f'(x)=0 \iff x=\frac{1}{3}$ posible extremo

| | $0$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right)=\frac{3\cdot\frac{1}{3}+1}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=2\sqrt{3}$$

- $f$ estrictamente decreciente en $\left(0,\frac{1}{3}\right)$
- $f$ estrictamente creciente en $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$
- $f$ tiene un mínimo relativo en $P\left(\frac{1}{3},f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\left(\frac{1}{3},2\sqrt{3}\right)$

b)

$$f''(x)=\frac{3\cdot 2\sqrt{x^3}-(3x-1)\cdot\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^3}}\cdot 3x^2}{\left(2\sqrt{x^3}\right)^2}=$$

$$\frac{6\sqrt{x^3}-\frac{3x^2(3x-1)}{\sqrt{x^3}}}{4x^3}=\frac{6\left(\sqrt{x^3}\right)^2-9x^3+3x^2}{4x^3\sqrt{x^3}}$$

$$=\frac{-3x^3+3x^2}{4x^3\sqrt{x^3}}=\frac{-3x+3}{4x\sqrt{x^3}}$$

$$f''(x)=\frac{3-3x}{4x\sqrt{x^3}} \qquad f''(x)=\frac{3-3x}{4x^2\sqrt{x}} \qquad \mathrm{Dom}\,f''=(0,+\infty)$$

$f''(x)=0 \iff x=1$

| | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f$ | | $\cup$ | | $\cap$ | |

- $f$ convexa en $(0,1)$
- $f$ cóncava en $(1,+\infty)$
- $f$ tiene un P.I. convexo – cóncavo en $x=1$ $\quad I_1(1,f(1))=(1,4)$

***Ejercicio 16***: Sea $f$ la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$. Estudia la curvatura de la gráfica de $f$

$f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$   Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{e^x(x-1) - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x \cdot e^x - \cancel{e^x} - e^x}{(x-1)^2}$   $f'(x) = \dfrac{x e^x - 2e^x}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{e^x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}$   $f'(x) = 0 \iff x = 2$ posible extremo.

| | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $\nexists$ $-$ | $+$ | |
| $f$ | $\searrow$ | $\nexists$ $\searrow$ | $\nearrow$ | |

- $f$ estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$ y $(1, 2)$
- $f$ estrictamente creciente en $(2, +\infty)$
- $f$ presenta en $x = 2$ un mínimo relativo $(2, f(2)) = (2, e^2)$

$f''(x) = \dfrac{[e^x(x-2) + e^x] \cdot (x-1)^2 - e^x \cdot (x-2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$

$= \dfrac{[e^x(x-2) + e^x](x-1) - 2e^x(x-2)}{(x-1)^3} =$

$= \dfrac{e^x[(x-2+1)(x-1) - 2(x-2)]}{(x-1)^3} = \dfrac{e^x[(x-1)^2 - 2x + 4]}{(x-1)^3}$

$f''(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{(x-1)^3}$   $f''(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 5 = 0$ sin solución real. No hay P.I.

| | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ |
| $f$ | $\frown$ | $\nexists$ | $\smile$ |

- $f$ es cóncava en $(-\infty, 1)$
- $f$ es convexa en $(1, +\infty)$
- $f$ no presenta P.I.

***Ejercicio 17***: Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{Lnx}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

(17)

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x-1}{\cancel{x}}}{\frac{x\ln x+x-1}{\cancel{x}}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}$$

***Ejercicio 18***: Se sabe que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\alpha\cdot\operatorname{sen}x}{x^2}$

es finito. Determina el valor de $\alpha$ y calcula el límite.

(18)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-a\cdot\operatorname{sen}x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'H.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cdot\cos x}{2x}=\frac{1-a}{0}\neq\pm\infty$$

$$\overset{L'H.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a\operatorname{sen}x}{2}=\frac{0}{2}=0$$

siempre que $1-a=0$, $a\in\mathbb{R}$

$a=1$

***Ejercicio 19***: Se sabe que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{a}{2x}\right)$

es finito. Determina el valor de $a$ y calcula el límite

(19)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)=(\infty-\infty)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-a(e^x-1)}{2x(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'Hop.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-a\cdot e^x}{2(e^x-1)+2xe^x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-a\cdot e^x}{e^x(2+2x)-2}=\frac{2-a}{0}$$

para que sea finito: $2-a=0$

$a=2$

$$\overset{a=2}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cdot e^x}{e^x(2+2x)-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\overset{L'Hop}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2e^x}{2e^x+e^x\cdot(2+2x)}=\frac{-2}{2+2}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

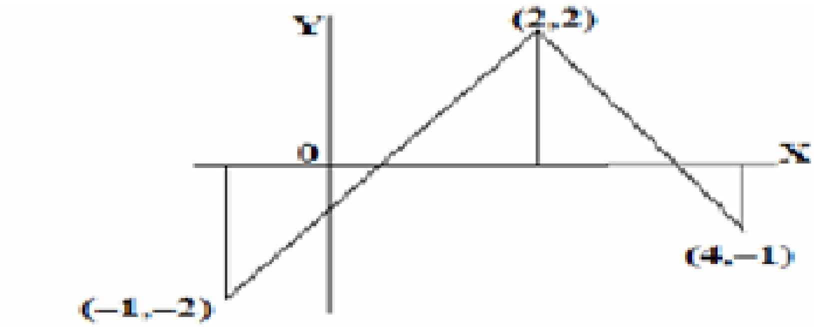
***Ejercicio 20***: Calcula

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)-\operatorname{sen} x}{x\cdot \operatorname{sen} x}$$

(20) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)-\operatorname{sen}x}{x\cdot\operatorname{sen}x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'Hôp.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{\operatorname{sen}x+x\cdot\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{L'Hôp.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-\operatorname{sen}x}{\cos x+\cos x-x\cdot\operatorname{sen}x}=\frac{-1-0}{1+1-0}=-\frac{1}{2}$

***Ejercicio 21***: Sea $f:[-1,4]\to\mathbb{R}$ una función cuya derivada tiene por gráfica la de la figura:




a) Estudia la monotonía de $f$ y determina los valores donde alcanza sus extremos relativos.
b) Estudia la curvatura de $f$. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de $f$?

a) Recta que pase por $P(-1,-2)$ y $Q(2,2)$

$\overrightarrow{PQ}=\vec{u}=(3,4)$

$\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}$

$4x+4=3y+6$

$4x-2=3y$

$\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}=y$

Recta que pase por $Q(2,2)$ y $R(4,-1)$

$\overrightarrow{QR}=\vec{v}=(2,-3)$

$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-3}\Big\}\ -3x+6=2y-4$

$3x+10=2y$

$\frac{3}{2}x+5=y$

Entonces: $f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} & -1 < x < 2 \\ -\frac{3}{2}x + 5 & 2 < x < 4 \end{cases}$

En $x=2$ no existe $f'(x)$ porque $f'_-(2) \neq f'_+(2)$

$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} \bullet\ \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = 0 ; & 4x - 2 = 0 ; \quad x = \frac{1}{2} \in (-1,2) \\ \bullet\ -\frac{3}{2}x + 5 = 0 ; & -3x + 10 = 0 ; \quad x = \frac{10}{3} \in (2,4) \end{cases}$

Posibles extremos rel.

| | $-1$   $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$   $2$ | $2$   $\frac{10}{3}$ | $\frac{10}{3}$   $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $f$ | ↘ | ↗ | ↗ | ↘ |

$\underbrace{\qquad\qquad}_{f'(x) = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}}$ $\qquad$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{f'(x) = -\frac{3}{2}x + 5}$

b) $f''(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} & -1 < x < 2 & \text{(convexa)} \\ -\frac{3}{2} & 2 < x < 4 & \text{(cóncava)} \end{cases}$ No hay P. I. en $(-1,2)$ ni en $(2,4)$ pero $x=2$ sí que lo es

Problemas de optimización (HOJA 3)

**_Ejercicio 22_**: Determina el valor de las constantes $c$ y $d$ sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$ tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y = 3x + 4$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d \quad \rightarrow \quad \boxed{f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 5}$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + c$

$f''(x) = 6x + 6 \quad ; \quad f''(x) = 0 \iff 6x + 6 = 0 \quad ; \quad x = -1 \quad$ P. I.

Entonces $f'(-1) = 3$ (porque $r: y = 3x + 4$ $m = 3$ en P. I.)

$f'(-1) = 3 - 6 + c = 3$

$c = 6$

$f(-1) = -3 + 4 = 1$ porque $P \in r$

$f(-1) = -1 + 3 - 6 + d = 1 \Rightarrow d = 5$

**_Ejercicio 23_**: Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^{\frac{x}{2}}$.

a) Calcula $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calcula los intervalos de monotonía y los extremos locales de $f$

a) $Dom\, f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{x/2} + x^2 e^{x/2} \cdot \frac{1}{2}$ ; $f'(x) = e^{x/2} \cdot \left(2x + \frac{x^2}{2}\right)$

$Dom\, f' = \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \iff 2x + \frac{x^2}{2} = 0$

$4x + x^2 = 0$

$x(4+x) = 0 \;\; \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$ Posibles extremos relativos

| | $-\infty$   $-4$ | $-4$   $0$ | $0$   $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | − | + |
| $f$ | ↗ | ↘ | ↗ |

- $f$ estrictamente creciente en $(-\infty, -4)$ y $(0, +\infty)$
- $f$ estrictamente decreciente en $(-4, 0)$

$x = -4$ es un MÁXIMO RELATIVO $\left(-4, \frac{16}{e^2}\right)$

$x = 0$ es un MÍNIMO RELATIVO $(0, 0)$

b) $\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{x/2} = +\infty$ / $\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^{x/2} = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x/2} = 0$ $\left(\frac{x^2}{e^{x/2}}\right)$

c)

***Ejercicio 24***: Calcula $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)\sin x}{x^3 - x^2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)\,\text{sen}\,x}{x^3 - x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'Hop}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x \cdot \text{sen}\,x + (e^x - 1)\cos x}{3x^2 - 2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'Hop}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x \cdot (\text{sen}\,x + \cos x) - \cos x}{3x^2 - 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'Hop}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x(\text{sen}\,x + \cos x) + e^x \cdot (\cos x - \text{sen}\,x) + \text{sen}\,x}{6x - 2} =$$

$$= \frac{1 + 1 + 0}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

***Ejercicio 25***: Sea $f : \left[\frac{1}{e}, 4\right] \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x - \ln x + a & si \quad \frac{1}{e} \le x \le 2 \\ bx + 1 - \ln 2 & si \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$$

a) Calcula los valores de a y b para que $f$ sea derivable en el intervalo $\left(\frac{1}{e}, 4\right)$

b) Para $a = 0$ y $b = \frac{1}{2}$, halla los extremos absolutos de $f$

a) $f$ continua en $x=2$

$\lim_{x\to 2} x-\ln x+a = \lim_{x\to 2} bx-1-\ln 2$ ; $2+a-\ln 2 = 2b-1-\ln$

$a-2b=-3$

$f'(x)=\begin{cases} 1-\frac{1}{x} & \frac{1}{2}\le x\le 2 \\ b & 2<x\le 4 \end{cases}$

$f'_-(2)=\lim_{x\to 2} 1-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$

$f'_+(2)=\lim_{x\to 2} b = b$

$b=\frac{1}{2}$

$b=1/2$

$a=-3+2b$ ; $a=-1$

b) $f(x)=\begin{cases} x-\ln x & \frac{1}{2}\le x\le 2 \\ \frac{1}{2}x-1-\ln 2 & 2<x\le 4 \end{cases}$

***Ejercicio 26***: Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, determina $a$, $b$ y $c$ sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,0)$ y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y=-3x+3$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f'(1)=-3 \rightarrow 3a+2b+c=-3$

$f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(1)=0 \rightarrow 6a+2b=0$

y $f(1)=0 \rightarrow a+b+c=0$

$\left.\begin{array}{l} 3a+2b+c=-3 \\ 6a+2b=0 \\ a+b+c=0 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} 3a+2b+c=-3 \\ -a-b-c=0 \end{array}\right\}$ 1ª 3ª

$2a+b=-3$

$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ 2a+b=-3 \end{array}\right\}$ 2ª

$a+$

$\left.\begin{array}{l} 3a+b=0 \\ -2a-b=3 \end{array}\right\}$

$a=3$

$b=-3a$

$b=-9$

$a+b+c=0$

$3-9+c=0$ ; $c=9-3$ ; $c=6$

$\boxed{f(x)=3x^3-9x^2+6x}$

***Ejercicio 27***: En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, $x$, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2+70x$, mientras que para edades superiores o iguales a 50 años los ingresos están determinados por la expresión $\dfrac{400x}{x-30}$. Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a que edad se alcanza.

$$I(x)=\begin{cases} -x^2+70x & 18\le x<50 \\ \dfrac{400x}{x-30} & x\ge 50 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 50^-} f(x)=1000$, $\lim\limits_{x\to 50^+} f(x)=1000$ continua en $x=50$

Calcule cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.

$$I'(x)=\begin{cases} -2x+70 & 18<x<50 \\ \dfrac{-12000}{(x-30)^2} & x>50 \end{cases}$$

$f'_-(50)=-30$, $f'_+(50)=-30$ $\nexists f'(50)$

$$\left(\frac{400x}{x-30}\right)'=\frac{400(x-30)-400x(x-30)'}{(x-30)^2}=\frac{\cancel{400x}-12000-\cancel{400x}}{(x-30)^2}$$

$f'(x)=0 \iff -2x+70=0;\ x=35$

| | 18 | 35 | 50 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | − | − | |
| $f$ | ↗ | ↘ | ↘ | |

$x=35$ años es un máximo para los ingresos

$I(35)=-35^2+70\cdot 35=1225$ €

R: El máximo de los ingresos es 1225 € y se alcanza a los 35 años

***Ejercicio 28***: Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-2x^2+3x-1$, prueba que las rectas $y=-x+1$ e $y=3x-1$ son tangentes a su gráfica

**Sol**.:

Con la recta $y=-x+1$ que tiene por pendiente -1, la derivada debe valer -1 $\Rightarrow f'(x)=-4x+3=-1\Rightarrow x=1$

Calculamos $f(1)=-2+3-1=0$ y con todo la recta tangente: $t_1\equiv y=-1(x-1)+0\Rightarrow t_1\equiv y=-x+1$ que coincide con la recta.

Con la recta $y=3x-1$ que tiene por pendiente 3, la derivada debe valer 3 $\Rightarrow f'(x)=-4x+3=3\Rightarrow x=0$

Calculamos $f(0)=-1$ y con todo la recta tangente: $t_1\equiv y=3(x-0)-1\Rightarrow t_1\equiv y=3x-1$ que coincide con la recta.