UNIDAD 1: NÚMEROS REALES

Contenido

1. POTENCIAS. OPERACIONES

Una POTENCIA es una forma abreviada de escribir una serie de multiplicaciones que tienen el mismo factor.

Así, escribimos a^n y se lee a elevado a n para representar la multiplicación de a por si mismo n veces.

Es decir, $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n veces)

Por ejemplo, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, o lo que es lo mismo $2^4 = 16$.
Como vemos se expresa a través de dos números: la base (el factor) y el exponente (nº de veces que se repite dicho factor).

Base Exponente

$$a^n$$

Ejercicio 1: Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) 2^2 b) 3^1 c) 2^5 d) 3^2
e) 5^3 f) 3^3 g) 7^2 h) 2^{10}

Las potencias se leen de la siguiente forma, lo vemos con ejemplos:

a) 7^1 : siete a la uno	b) 3^2 : tres al cuadrado	c) 5^3: cinco al cubo
d) 8^4 : ocho a la cuarta.	e) 6^5 : seis a la quinta	f) 14^{28}: catorce a la vigésimo octava.

Potencias de base negativa: cualquier nº entero puede ser base de una potencia. En este caso, base negativa, nos fijaremos en el exponente:
- Si el exponente es par, el resultado será positivo. Ejemplo: $(-3)^4 = 81$
- Si el exponente es impar, el resultado será negativo. Ejemplo: $(-2)^3 = -8$
Hay que tener muy en cuenta el paréntesis, pues éste nos indica cuál es la base.

Ejercicio 2: Calcula el valor de las siguientes potencias:

i) $(-1)^2$ j) $(-7)^1$ k) $(-2)^6$ l) $(-5)^3$
m) -5^3 n) $(-4)^2$ o) $6^2 + (-6)^2$ p) $(-2)^9$

Casos especiales:

- Toda potencia de exponente 1 da como resultado la base, es decir, $a^1 = a$

Ejemplos: $14^1 = 14$, $(-7)^1 = -7$

- Toda potencia de exponente nulo (0), da como resultado 1, es decir, $a^0 = 1$

Ejemplos: $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$

Potencias de exponente negativo: Cualquier nº entero puede ser exponente de una potencia. En el caso de exponentes negativos, es lo mismo que tener elevada al opuesto de dicho nº negativo la inversa de la base inicial.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$ $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$

Ejercicio 3: Calcula:

a) $2^2 - 3^3 =$ b) $5^0 + (-3)^0 =$ c) $(-2)^5 + 2^5 =$ d) $3^{-2} + 2 =$

e) $6^{-1} - \frac{1}{6} + (-7458)^0 =$ f) $2^{-3} - (-2)^{-2} + 2^1 =$ g) $7^2 - 5^2 - (-3)^2 =$ h) $-\left(4^{-1} + 3^{-1}\right) =$

Propiedades de las potencias:

- **Producto (multiplicación) de potencias con la misma base:** se deja la base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Ejemplos:

a) $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$ b) $3^7 \cdot 3 = 3^8$ c) $7^3 \times 7^2 = 7^5$ d) $1^3 \times 1^4 = 1^7 = 1$ e) $7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^4 = 7^9$

- **Cociente (división) de potencias con la misma base:** se deja la base y se restan los exponentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$ o bien $$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Ejemplos:

a) $5^8 : 5^2 = 5^6$ b) $3^7 : 3 = 3^6$ c) $\frac{2^{12}}{2^8} = 2^4$ d) $\frac{3^5}{3^4} = 3$ e) $\frac{10^{15}}{10^{15}} = 10^0 = 1$

- **Potencia de una potencia:** se deja la base y se multiplican los exponentes.

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplos:

a) $\left(7^2\right)^3 = 7^6$ b) $\left(5^4\right)^3 = 5^{12}$ c) $\left(3^9\right)^0 = 3^0 = 1$ d) $\left[\left(4^2\right)^5\right]^9 = 4^{90}$ e) $\left(7^{-1}\right)^{11} = 7^{-11}$

- **Potencia de un número fraccionario de exponente negativo**: se permutan numerador y denominador y se pone el exponente en positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}$ b) $\left(\frac{5}{10}\right)^{-3}=\left(\frac{10}{5}\right)^{3}=(2)^{3}=8$ c) $(7)^{-4}=\left(\frac{1}{7}\right)^{4}=\frac{1^4}{7^4}=\frac{1}{7^4}$

- **Producto (multiplicación) de potencias con el mismo exponente:** se multiplican las bases y se deja el exponente. Esta propiedad se puede interpretar de forma recíproca como **la potencia de un producto es el producto de las potencias de los factores.**

Ejemplos:

a) $5^2\cdot 2^2=(5\cdot 2)^2=10^2=100$ b) $(2\cdot 7)^{-3}=\frac{1}{(2\cdot 7)^3}=\frac{1}{2^3\cdot 7^3}$ c) $(3\cdot x)^4=3^4\cdot x^4=81\cdot x^4$

- **Cociente (división) de potencias con el mismo exponente:** se dividen las bases y se deja el exponente. Esta propiedad se puede interpretar de forma recíproca como **la potencia de un cocientes es el cociente de las potencias del numerador y denominador.**

Ejemplos:

d) $5^2\cdot 2^2=(5\cdot 2)^2=10^2=100$ e) $(2\cdot 7)^{-3}=\frac{1}{(2\cdot 7)^3}=\frac{1}{2^3\cdot 7^3}$ f) $(3\cdot x)^4=3^4\cdot x^4=81\cdot x^4$

Ejercicio 4: Opera:

a) $2^0\cdot 2^1\cdot 2^2\cdot 2^3=$ b) $(-1)^2+2^3-0^4=$ c) $0^4\times 0^7=$ d) $\frac{4^{17}}{4^7}=$

e) $(-2)^3-(-3)^3=$ f) $-3^2-(2^4-5^2)=$ g) $(2^5:8^2)^{-2}=$ h) $(3^9)^2:(3^2)^5=$

i) $3^5\cdot(3^{10}:3^8)=$ j) $\frac{7^{10}\cdot 7^4}{7^6}=$ k) $\frac{4^{20}:4^{14}}{4^3\cdot 4^2}=$ l) $9^4\cdot 9^3\cdot(9^2)^7=$

m) $2^3\cdot 5^3\cdot 7^3=$ n) $\frac{(-36)^5}{9^5}=$ o) $b^4\cdot b^{-3}\cdot b^5=?$ p) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{25}{4}\right)^{3}=$

Ejercicio 5: En una habitación de un museo hay tres paredes con tres cuadros en cada una de ellas y en cada cuadro aparecen tres personas con tres flores cada una. ¿Cuántas flores habrá en total? Expresa el resultado como potencia y calcúlalo.

Ejercicio 6: Pedro tiene seis bolsillos con seis llaveros en cada uno y en cada llavero hay seis llaves. ¿Cuántas llaves tiene Pedro? Expresa el resultado como potencia y calcúlalo.

Ejercicio 7: Una camioneta transporta 1.000 bandejas. Cada bandeja tiene 10 cajas, y en cada caja hay 10 sobres. ¿Cuántos sobres transporta la camioneta?

Ejercicio 8: Un tipo de bacteria se cuadruplica cada hora en el organismo de un animal. Si en el momento que le diagnosticaron la enfermedad el animal tenía 20 bacterias, ¿cuántas bacterias tendrá después de transcurridas 8 horas?

2. RAÍCES. RADICALES

La **raíz cuadrada** de un número es otro tal que al elevarlo al cuadrado nos da el primero. Es la operación inversa de la potenciación. Se denota con el símbolo $\sqrt{\ }$

Ejemplos:

$\sqrt{9}=3$ pues $3^2=9$

$\sqrt{16}=4$ pues $4^2=16$

$\sqrt{49}=7$ pues $7^2=49$

$\sqrt{81}=9$ pues $9^2=81$

$\sqrt{121}=11$ pues $11^2=121$

$\sqrt{4}=2$ pues $2^2=4$

$\sqrt{25}=5$ pues $5^2=25$

$\sqrt{64}=8$ pues $8^2=64$

$\sqrt{100}=10$ pues $10^2=100$

$\sqrt{144}=12$ pues $12^2=144$

Hemos puesto en los ejemplos la raíz positiva, pero también puede ser $\sqrt{9}=-3$ pues $(-3)^2=9$ y lo mismo con todos los demás ejemplos.
En los ejemplos hemos puestos las raíces cuadradas exactas más conocidas y usadas, pero la mayoría de las raíces cuadradas no son exactas y se dejan con su expresión, y si fuese necesario usar la calculadora con aproximación decimal.
Así, por ejemplo, tenemos las raíces $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, ….. que no son exactas.
De forma similar, se define la **raíz cúbica** de un número es otro tal que al elevarlo al cubo nos da el primero. Se denota con el símbolo $\sqrt[3]{\ }$

Ejemplos:

$\sqrt[3]{8}=2$ pues $2^3=8$

$\sqrt[3]{64}=4$ pues $4^3=64$

$\sqrt[3]{27}=3$ pues $3^3=27$

$\sqrt[3]{125}=5$ pues $5^3=125$

De forma general, podemos definir la raíz n-ésima de un número como aquel otro número que elevado a n da el primero. Se va a representar por $\sqrt[n]{\ }$

Así, si $\sqrt[n]{a}=b$, entonces $b^n=a$

A número “n” se le llama **índice** del radical y al número “a” **radicando**.

Ejemplos:

$\sqrt[4]{16}=2$ pues $2^4=16$

$\sqrt[7]{1}=1$ pues $1^7=1$

$\sqrt[5]{32}=2$ pues $2^5=32$

$\sqrt[34]{0}=0$ pues $0^{34}=0$

Ejercicio 9: Calcula:

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt{-4}$ d) $\sqrt[5]{-1}$

e) $\sqrt[4]{-16}$ f) $\sqrt[5]{7^5}$ g) $\sqrt[9]{0}$ h) $\sqrt{\frac{9}{4}}$

i) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ j) $\sqrt{25}-\sqrt{9}$ k) $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}$ l) $\sqrt[4]{-81}$

NOTAS IMPORTANTES:

- Todo número real positivo tiene dos raíces cuando el índice es par, una positiva y otra negativa:

$\sqrt{9}=\pm 3$ pues $3^2=9$ y $(-3)^2=9$

- No existen, es decir, no se pueden calcular raíces de índice par de números negativos:

$\sqrt{-25}$, $\sqrt[4]{-31}$, no existen pues 2 y 4 son pares

- Las raíces de índice impar existen siempre, para cualquier número, y tienen el mismo signo del radicando:

$\sqrt[3]{-8}=-2$ y $\sqrt[3]{8}=2$

- Se tiene que $\sqrt[n]{a^n}=a$

$\sqrt{17^2}=17$, $\sqrt[5]{(-6)^5}=-6$, $\sqrt[8]{x^8}=x$

<u>Propiedades de las operaciones con radicales</u>

- <u>Producto de radicales con el mismo índice</u>: Es otro radical del mismo índice que resulta de multiplicar los radicandos. Es decir, se deja el índice y se multiplican los radicandos.

<u>Ejemplos</u>:

a) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{6\cdot 6}=\sqrt{6^2}=6$ b) $\sqrt{3}\sqrt{27}=\sqrt{81}=9$ c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2\cdot 32}=\sqrt[3]{64}=4$

d) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}$ no podemos aplicar esta propiedad pues tienen índices diferentes

e) $\sqrt{6}\sqrt{7}=\sqrt{42}$ se deja así pues no es exacta

- <u>Cociente (división) de radicales con el mismo índice</u>: Es otro radical del mismo índice que resulta de dividir los radicandos. Es decir, se deja el índice y se dividen los radicandos.

<u>Ejemplos</u>:

a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=2$ b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}=\sqrt[3]{\frac{2}{54}}=(\text{simplificamos})\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}$

d) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{8}}$ no podemos aplicar esta propiedad pues tienen índices diferentes

e) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{48}{6}}=\sqrt{8}$ se deja así pues no es exacta

<u>Ejercicio 10</u>: Calcula y da la expresión más reducida que puedas:

a) $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3}$ b) $6\cdot\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{8}$ c) $\sqrt[9]{10}\cdot\sqrt[9]{100}\cdot\sqrt[9]{10^6}$ d) $\sqrt[5]{5}\cdot\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{4}$

e) $\sqrt{\frac{36}{64}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}}$ g) $\sqrt[3]{250}:\sqrt[3]{2}$ h) $\sqrt{27}:\sqrt{3}$

- <u>Radicales equivalentes</u>: Son radicales equivalentes aquellos que tienen el mismo valor.

$2=\sqrt{4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[5]{32}$ son equivalentes; $\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[15]{2^5}=\sqrt[21]{2^7}$ son equivalentes

Para obtener radicales equivalentes basta con multiplicar o dividir el índice del radical y el exponente del radicando por el mismo número. Los radicales equivalentes los podemos sumar o restar agrupándolos.

<u>Ejemplo</u>: Obtener 2 radicales equivalentes a $\sqrt[21]{5^3}$

Si dividimos por 3 el índice y el exponente: $\sqrt[21]{5^3}=\sqrt[\frac{21}{3}]{5^{\frac{3}{3}}}=\sqrt[7]{5}$

Si multiplicamos por 2 índice y exponente: $\sqrt[21]{5^3}=\sqrt[21\cdot 2]{5^{3\cdot 2}}=\sqrt[42]{5^6}$

Los radicales equivalentes pedidos son $\sqrt[7]{5}$ y $\sqrt[42]{5^6}$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-12\sqrt{2}=(3+7-12)\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

<u>Ejercicio 11</u>: Efectúa las siguientes operaciones:

a) $-2\sqrt{7}+5\sqrt{7}-8\sqrt{7}+3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+7\sqrt{7}$ b) $\sqrt{5}-6\sqrt{3}+8\sqrt{5}-3\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{15}+\frac{2}{3}\sqrt{15}-\frac{1}{6}\sqrt{15}$

d) $-2\sqrt{21}-2\left(5\sqrt{21}-8\sqrt{21}\right)-\left(\sqrt{21}+\sqrt{21}\right)$

e) $\sqrt{18}+3\sqrt{2}-\sqrt{50}$

f) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$

g) $\frac{7}{2}\sqrt{11}-\frac{4}{3}\sqrt{7}-\frac{5}{6}\sqrt{11}+\frac{-9}{4}\sqrt{7}+\sqrt{7}$

h) $\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{24}+5\sqrt[3]{375}$

3. NÚMEROS IRRACIONALES. NÚMEROS REALES

Volvamos una vez más a los números racionales, $\mathbb{Q}$, que como sabemos son de la forma $\frac{a}{b}$, que no es más que la representación de una división. Si efectuamos dicha división, nos puede salir exacta o con decimales, como por ejemplo:

$\frac{20}{4}=5$ ó $\frac{3}{2}=1,5$ ó $\frac{7}{3}=2,3333.....$ ó $\frac{111}{90}=1,233333...$

Al realizar la división de una fracción $\frac{a}{b}$ los tipos de números decimales que nos pueden salir son de los siguientes tipos:

- Exactos: son los números enteros como 4, 7, -12 …
- Decimales exactos: son aquellos que tienen un número finito de cifras decimales como por ejemplo 1,7, -2,25, 3,237, ….
- Decimales periódicos puros: son aquellos en que sus cifras decimales se repiten de forma indefinida como por ejemplo 0,66666…= $0,\overset{\frown}{6}$, 9,232323….= $9,23$, 7,1011010101….= $7,101$
- Decimales periódicos mixtos: son aquellos que tienen al principio una parte que no se repite y después otra que se repite indefinidamente como por ejemplo 4,933333…= $4,9\overset{\frown}{3}$, -5,2477777….= $-5,24\overset{\frown}{7}$, 78,41212121212…..= $78,412$

Ejercicio 12: Di a qué tipo de decimal corresponden las siguientes fracciones:

a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{13}{9}$ c) $\frac{56}{45}$ d) $\frac{36}{150}$

Pasar de fracción a decimal como hemos visto consiste sólo en realizar la división. Ahora nos planteamos el problema inverso, nos dan el número decimal y tenemos que obtener la fracción. Dependiendo de cada caso se hace de una forma u otra, a este proceso se le llama obtención de la **fracción generatriz**.

Veamos los diferentes casos:

- Si el decimal es exacto:

Numerador: el número decimal sin coma.

Denominador: la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el número.

Ejemplos:

$3,25=\frac{325}{100}=\frac{65}{20}$ (hemos simplificado) $0,008=\frac{8}{1000}=\frac{1}{125}$ (hemos simplificado)

- Si el decimal es periódico puro:

Numerador: al número decimal sin la coma hasta el final del período se le resta la parte entera.

Denominador: tantos nueves como cifras tenga el período.

Ejemplos:

$1,\overset{\frown}{2}=\frac{12-1}{9}=\frac{11}{9}$ $-0,15=-\frac{15-0}{99}=-\frac{15}{99}=-\frac{5}{33}$

- Si el decimal es periódico mixto:

Numerador: al número decimal sin la coma hasta el final del período se le resta la parte entera seguida del anteperíodo (parte decimal después de la coma y que no es periódica).
Denominador: tantos nueves como cifras tenga el período seguido de tantos ceros como cifras tenga el antiperíodo.
Ejemplos:

$5,3\overset{\frown}{2}=\dfrac{532-53}{90}=\dfrac{479}{90}$ $\qquad$ $-0,715=-\dfrac{715-7}{990}=-\dfrac{708}{990}=-\dfrac{354}{495}=-\dfrac{118}{165}$

Ejercicio 13: Calcula las fracciones generatrices de los siguientes números decimales:

a) $0,150=$ $\qquad$ b) $2,\overset{\frown}{1}=$ $\qquad$ c) $-3,375=$ $\qquad$ d) $4,\overset{\frown}{9}=$

e) $0,75=$ $\qquad$ f) $2,33\overset{\frown}{4}=$ $\qquad$ g) $-5,426=$ $\qquad$ h) $0,123=$

Ahora nos hacemos la siguiente pregunta, ¿hay números decimales que no sean de ninguno de los tipos anteriores? Piensa y recapacita sobre ello, y da una respuesta justificada antes de seguir leyendo.

¿Ya lo has pensado y decidido?
Veamos si has acertado: hay números decimales que no son de ninguno de los tipos anteriores, por ejemplo: $3,505005000500005......$ ó $0,12345678910111213......$
También se tiene que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$ ..... no son decimales ni exactos ni periódicos. El número pi, $\pi=3,141592.......$, tampoco es decimal exacto ni periódico.
A estos números que no se pueden expresar como decimal exacto o periódico (es decir, no son fracciones) no son racionales, y de ahí que se les llame **IRRACIONALES** y se representa por la letra I.

Llamamos **NÚMEROS REALES** a la unión de los racionales y los irracionales, es decir, todos los números decimales sean de la forma que sean. Se representan por la letra $\mathbb{R}$.

Ejercicio 14: Clasifica estos números en racionales e irracionales:

34,5678 $\qquad$ -12 $\qquad$ $-14,567891011...$ $\qquad$ $\sqrt{2}$ $\qquad$ $\dfrac{3}{2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{27}$

Ejercicio 15: Señala con una X a cuál o cuáles conjuntos pertenecen los siguientes números:

	-2	$\frac{1}{7}$	0,656565.....	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{16}$	-2,08	$\frac{8}{2}$
$\mathbb{N}$ Naturales							
$\mathbb{Z}$ Enteros							
$\mathbb{Q}$ Racionales							
I Irracionales							
$\mathbb{R}$ Reales							

4. RELACIONES DE ORDEN. REPRESENTACIÓN

Entre los números reales establecemos una relación de orden que nos permite indicar si un número es menor, mayor o igual que otro.

Los símbolos que se usan son:

$<$ "menor que"	$\leq$ "menor o igual que"	$>$ "mayor que"	$\geq$ "mayor o igual que"

Así decir que el nº 7 es positivo es lo mismo que decir que $7 > 0$.

O bien que el nº $-2,45$ es negativo es lo mismo a decir que $-2,45 < 0$

<u>Definición</u>: Dados dos números reales cualesquiera, a y b, diremos que:

- a es mayor que b si $a-b$ es positivo, es decir, $a > b$ si $a-b > 0$

<u>Ejemplo</u>: $-5 > -8$ pues $-5-(-8) = -5+8 = 3 > 0$

- a es menor que b si $a-b$ es negativo, es decir, $a < b$ si $a-b < 0$

<u>Ejemplo</u>: $5 < 5,006$ pues $5-5,006 = 0,006 > 0$

<u>Ejercicio 15</u>: Ordena de mayor a menor los siguientes conjuntos de números:

a) $-5 \quad -4,9 \quad 1,5 \quad -5,01 \quad 7 \quad -8$

b) $\sqrt[3]{19} \quad -\frac{34}{13} \quad \frac{19}{7} \quad 2,6457 \quad -\sqrt{7} \quad -2,645$

Los números reales van a ser representados en una recta horizontal conocida como **<u>recta real</u>**. En ella se fija un origen que corresponderá al número 0, y una unidad que será el número 1, a la derecha del 0. Los números positivos a la derecha y los negativos a la izquierda.

La recta real es de esta forma:

Cada número real tiene su sitio en la recta real, y este sitio es único, así como cada punto de la recta real corresponde a un único número real. Por tanto, dos números que coinciden en el mismo punto son iguales.

Nosotros vamos a representar los números reales de forma aproximada, usando su expresión decimal si no es exacto.

<u>Ejercicio 16</u>: Representa de forma aproximada en la recta real los siguientes conjuntos de números:

a) $3 \quad -4,7 \quad 1,5 \quad -\frac{7}{2} \quad \sqrt{5} \quad -\frac{9}{2}$

b) $\sqrt[3]{1} \quad -\frac{34}{13} \quad \frac{19}{7} \quad 2,6457 \quad -\sqrt{6} \quad -2,6$

5. NOTACIÓN CIENTÍFICA

En cualquier ciencia los números que se deben escribir son a veces muy grandes o muy pequeños, por ejemplo:

El número de átomos de carbono que hay en un gramo:

50 150 000 000 000 000 000 000

Este es un número muy grande, difícil de leer, nombrar y escribir; como así también recordar su valor y para escribirlo se necesita un gran espacio.

La masa expresada en gramos de un solo átomo de carbono:

0,00000000000000000000001994 gramos

Este es un número muy pequeño pero también es difícil de leer, nombrar, escribir; recordar su valor y para escribirlo así, también se necesita un gran espacio.

Repasaremos a continuación lo que significa la escritura de potencias de base 10 con exponente entero:

$10^6 = 1.000.000$	$10^5 = 100.000$	$10^4 = 10.000$	$10^3 = 1.000$	$10^2 = 100$	$10^1 = 10$
$10^0 = 1$	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$	$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$	$10^{-3} = \frac{1}{1.000} = 0,001$	$10^{-4} = \frac{1}{10.000} = 0,0001$	

La notación exponencial o científica consiste en escribir un número a partir de un producto entre otros 2 números, uno llamado coeficiente y el otro, potencia de base 10, cuyo exponente es un número entero. El coeficiente debe cumplir con la condición de que sea mayor o igual a uno y menor que diez.

$C \cdot 10^n$

C = coeficiente (1 ≤ C <10).

n = número entero positivo o negativo

La principal ventaja de este tipo de notación, es que se simplifica la lectura, escritura y el trabajo algebraico de estos números.

Veamos cómo se realiza:

<u>Para números mayores que la unidad</u>:

- Cuente el número de lugares que debe moverse de derecha a izquierda para ubicar una coma de tal manera que se forme un número comprendido entre 1 y 10.
- Escriba el número formado seguido del signo • y el número 10.
- Colóquele al valor de 10 un exponente correspondiente al número de lugares que debió recorrer en el primer punto.
- Como el número es mayor que la unidad el signo del exponente es positivo.

<u>Ejemplos</u>:

8.500.000 = $8,5 \cdot 10^6$

50.150.000.000.000.000.000.000 = $5,015 \cdot 10^{22}$

<u>Para números menores que la unidad</u>:

- Cuente el número de lugares que debe moverse la coma de izquierda a derecha de tal manera que se forme un número comprendido entre 1 y 10.
- Escriba el número formado seguido del signo • y
- el número 10.
- Colóquele al valor de 10 un exponente correspondiente al número de lugares que debió correr la coma.
- Como el número es menor que la unidad, el signo del exponente es negativo.

<u>Ejemplos</u>:

0,000043 = $4,3 \cdot 10^{-5}$

0,00000000000000000000001994 = $1,994 \cdot 10^{-23}$

Otra de las ventajas de la notación exponencial es que se pueden comparar fácilmente dos números para reconocer cual es el mayor o menor. El mecanismo consiste en comparar los dos exponenciales:

- el que tiene una potencia positiva mayor es el mayor
- el que tiene una potencia negativa mayor es el menor
- si las potencias son del mismo orden, se comparan los coeficientes.

Ejercicio 17: Escribe en notación científica las siguientes cifras:

a) $0{,}150 =$ b) $12\ 578$ c) $245{,}0034$ d) $-0{,}000000124$
e) 124000 f) $0{,}00000102$ g) doce mil millones h) una millonésima
i) $32100 \cdot 10^{2}$ j) $165 \cdot 10^{-3}$ k) $0{,}00001 \cdot 10^{3}$

Ejercicio 18: Escribe en forma usual los siguientes números dados en notación científica:

a) $2 \cdot 10^{2}$ b) $3{,}5 \cdot 10^{4}$ c) $6{,}05 \cdot 10^{-7}$ d) $5 \cdot 10^{-8}$

Ejercicio 19: De cada uno de los siguientes pares de números indica cuál es el mayor:

a) $3 \cdot 10^{3}$ y $3 \cdot 10^{-3}$	b) $3 \cdot 10^{3}$ y 10.000	c) $0{,}0001$ y $2 \cdot 10^{-4}$
d) $6 \cdot 10^{7}$ y $4 \cdot 10^{8}$	e) $9{,}3 \cdot 10^{-3}$ y $1{,}5 \cdot 10^{-2}$	f) $32 \cdot 10^{4}$ y $3{,}2 \cdot 10^{5}$

Ejercicio 20: Gonzalo está realizando un trabajo para la asignatura de química. Debe averiguar todo lo referente al átomo de hidrógeno. Entre la información que recoge, encuentra que su masa es $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ gramos y su diámetro mide $4{,}1 \cdot 10^{-10}$ metros. ¿Cómo consideras que son estas medidas, grandes o pequeñas? Si no tenemos en cuenta la unidad gramo ni la unidad metro, ¿cómo son esos números entre sí?

Operaciones con números en notación científica

Suma y resta: Para sumar o restar números expresados en notación científica, se requiere que sus exponentes sean iguales, los prefijos se suman normalmente y se coloca la potencia 10 elevada al mismo exponente.

Ejemplo: $2{,}4 \times 10^{3} + 7{,}1 \times 10^{3} = (2.4+7.1) \times 10^{3} = 9.5 \times 10^{3}$

Si los exponentes de las cantidades de la suma no son iguales, debemos recorrer el punto decimal de alguno de los prefijos, con lo cual cambia el exponente de la base de 10. El ajuste se hace de manera que ambos exponentes queden iguales.

Para lograr esto el exponente disminuye en uno por cada lugar que el punto decimal se recorre a la derecha, y que el exponente aumenta en uno por cada lugar que el punto decimal se recorre a la izquierda.

Cuando el punto decimal se recorre a la derecha el exponente disminuye.

Cuando el punto decimal se recorre a la izquierda el exponente aumenta.

Así, la siguiente suma debe ajustarse antes de realizarla.

$(4{,}7 \times 10^{18}) + (6 \times 10^{19}) = (0{,}47 \times 10^{19}) + (6 \times 10^{19}) = 6{,}47 \times 10^{19}$

O bien:

$(4{,}7 \times 10^{18}) + (6 \times 10^{19}) = (4{,}7 \times 10^{18}) + (60 \times 10^{18}) = 64'7 \times 10^{18} = 6{,}47 \times 10^{19}$

Ejercicio 21: Realiza las siguientes operaciones, dando el resultado en notación científica y sin usar la calculadora:

a) $0{,}0000035 + 1{,}24 \times 10^{-4}$ b) $3{,}5 \times 107 - 8903456 =$

c) 0,0012 – 0,0003=

d) 4560000000000 + 980000000000=

<u>Multiplicación</u>: Cuando se multiplican potencias que tienen la misma base se suman sus exponentes.
<u>Ejemplo</u>: (300 000) x (200 000 000) = $(3 \times 10^5) \times (2 \times 10^8) = 6 \times 10^{5+8} = 6 \times 10^{13}$

<u>División</u>: Para dividir números expresados en notación científica, los prefijos numéricos se dividen y al exponente del dividendo se le resta el exponente del divisor.
<u>Ejemplo</u>: $\frac{0{,}008}{400} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{2}} = \frac{8}{4} \cdot \frac{10^{-3}}{10^{2}} = 2 \cdot 10^{-3-2} = 2 \cdot 10^{-5}$

<u>Ejercicio 22</u>: Realiza las siguientes operaciones, dando el resultado en notación científica y sin usar la calculadora:

a) $5.0000 \cdot 0{,}0004 =$

b) $\frac{1440000}{12000000000} =$

c) $0{,}0025 \cdot 800000 =$

d) $\frac{800.000}{4 \cdot 10^{-5}} =$

<u>Ejercicio 23</u>: Ordena de menor a mayor los siguientes números en notación científica sin calcular su expresión decimal:

a) $-5{,}37 \cdot 10^4$; $-5{,}377 \cdot 10^5$; $-5{,}737 \cdot 10^3$

b) $1{,}5 \cdot 10^{-3}$; $1{,}65 \cdot 10^{-4}$; $3{,}5 \cdot 10^{-2}$; $1{,}25 \cdot 10^{-3}$

6. APROXIMACIONES Y ERRORES

En ocasiones, ciertos números tales como π, $\sqrt{2}$, 5,675... dificultan el trabajo pues tienen infinitos decimales. En estos casos usamos valores próximos a dichos números para simplificar los cálculos mediante las llamadas aproximaciones

Cuando aproximamos un número, nos quedamos con sus primeras cifras y completamos con ceros. Esas cifras, con las que nos quedamos, se llaman **<u>cifras significativas</u>**.

Llamamos **<u>orden de la aproximación</u>**, a la posición hasta la que nos quedamos con cifras significativas. Así hablamos de aproximación a la décima (de orden 1), de aproximación a la centésima (de orden 2), a la milésima (de orden 3), a la diezmilésima (de orden 4), a la cienmilésima (de orden 5), a la millonésima (de orden 6), etc.

Se puede aproximar por defecto si el número utilizado es menor que el de partida, o por exceso si el número utilizado es mayor que el de partida.

Es por ello que surgen los siguientes conceptos:

<u>Aproximación por defecto o truncamiento</u>

Consiste en eliminar las cifras a partir del orden considerado.

<u>Aproximación por exceso</u>

Se eliminan las cifras a partir del orden considerado, pero se aumenta en una unidad la última cifra que dejamos.

<u>Redondeo</u>

Es la mejor de las aproximaciones de las dos anteriores.

Se aumenta una unidad si el decimal último está comprendido entre 5 y 9.

Y se deja igual si está comprendido ente 1 y 5.

<u>Ejemplo</u>: Aproximación hasta las centésimas (de orden 2):

	Aproximación por defecto o truncamiento	Aproximación por exceso	Redondeo
5,357	5,35	5,36	5,36
7,333 = $7,\hat{3}$	7,33	7,34	7,33
$\sqrt{3}$ = 1,732…	1,73	1,74	1,73
$1,02\hat{7}$ = 1,02777…	1,02	1,03	1,03

<u>Ejercicio 24</u>: Completa las siguientes tablas:

a) Aplica aproximación hasta la décima en la siguiente tabla:

	Aproximación por defecto o truncamiento	Aproximación por exceso	Redondeo
$1,6182823$			
$\sqrt{2}$			
$5,236$			

b) Aplica aproximación hasta la milésima en la siguiente tabla:

	Aproximación por defecto o truncamiento	Aproximación por exceso	Redondeo
$1,6$			
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$			

3,936			

ERRORES

Error absoluto: Es la diferencia, en valor absoluto, entre el valor real y la aproximación. Se representa por E_a.

$$E_a = |V_{real} - V_{aproximado}|$$

Error relativo: Es el cociente del error absoluto y el valor real. Se representa por E_r.

$$E_r = \left|\frac{E_a}{V_{real}}\right|$$

Ejemplo: Calcular los errores cometidos al redondear 5,327 a las centésimas.

Si redondeamos 5,327 a la centésima tenemos 5,33. Así, tenemos que $V_{real} = 5{,}327$, $V_{aproximado} = 5{,}33$

Luego, el error absoluto cometido es: $E_a = |V_{real} - V_{aproximado}| = |5'327 - 5'33| = |-0'003| = 0'003$

Y el error relativo es: $E_r = \left|\frac{E_a}{V_{real}}\right| = \left|\frac{0{,}003}{5{,}327}\right| = 0{,}00056$

Ejercicio 25: Determina los errores absolutos y relativos cometidos al utilizar estas aproximaciones:

a) $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ b) $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ c) $\pi \approx 3{,}14$

Ejercicio 27: Trunca a las centésimas el número 2,30758 y calcula el error absoluto y relativo cometido.

Ejercicio 28: Una montaña mide 2475 m. Redondea la altura a las centenas y halla el error absoluto cometido.

Ejercicio 29: Aproxima $\frac{15}{13}$ por defecto y por exceso con 1, 2 y 3 cifras decimales y calcula el error absoluto cometido en cada caso

Ejercicio 30: Observando una antena de telefonía móvil estimamos que se encuentra a 375 metros de nosotros. Sabiendo que la distancia real es de 415 metros, averigua el error relativo y absoluto cometido en nuestra apreciación

7. INTERVALOS Y SEMIRRECTAS

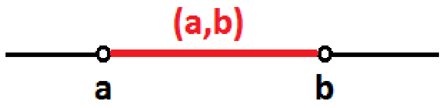
Un **intervalo** es un conjunto de números reales, un rango de valores, que está limitado por dos extremos a y b, donde a y b son números reales.
Puede estar abierto por ambos extremos, lo que significa que esos extremos no están incluidos en el intervalo, o pueden estar cerrados por ambos extremos, lo que significa que esos extremos sí están incluidos.
También pueden estar abiertos por un extremo y cerrado por el otro.
Para representar que un extremo no está incluido en el intervalo se utilizan los paréntesis () y para representar que sí está incluido se utilizan los corchetes [].
Vamos a ir viendo cada uno de ellos.

Intervalo abierto

Se llama intervalo abierto (a,b) al conjunto de números reales comprendidos entre a y b, pero a y b no están incluidos. Comprende a todos los números reales mayores que a y menores que b, que es lo que quiere decir la siguiente expresión:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$$

El símbolo / significa “tales que”.
Representado en la recta real, el intervalo se representa así:



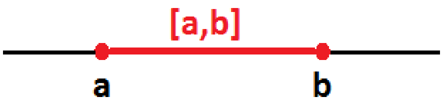
Como puedes ver, los extremos a y b están vacíos, ya que no están incluidos en el intervalo.

<u>Intervalo cerrado</u>

Un intervalo cerrado $[a,b]$ es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b, donde a y b también están incluidos. Comprende a todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b y se escribe así:

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} / a\leq x\leq b\}$$

Cuando en el símbolo de la desigualdad, aparezca el signo igual, el extremo está incluido en el intervalo.
Y quedaría representado en la recta de la siguiente forma:



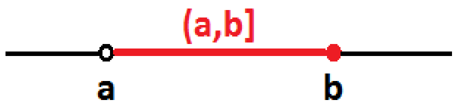
Los extremos a y b, están rellenos, ya que pertenecen al intervalo.

<u>Intervalo semiabierto por la izquierda</u>

Un intervalo semiabierto por la izquierda $(a,b]$ es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b, donde a no está incluido y b sí está incluido.
Comprende a todos los números reales mayores a y menores o iguales que b:

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R} / a< x\leq b\}$$

Al representar este intervalo, el extremo a quedará vacío y el extremo b queda relleno:

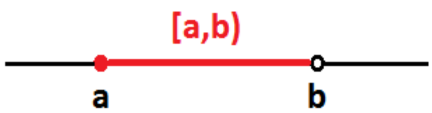


<u>Intervalo semiabierto por la derecha</u>

Un intervalo semiabierto por la derecha $[a,b)$ es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b, donde a sí está incluido y b no está incluido. Comprende a todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b:

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R} / a\leq x< b\}$$

Y se representa así:



<u>Semirrectas</u>

¿Alguna vez te has preguntado qué es una semirrecta?
A los intervalos que empiezan en menos infinito ($-\infty$) o acaban en infinito ($+\infty$) se les llama semirrectas.
Por tanto, las semirrectas están delimitadas sólo en un extremo, ya que el extremo opuesto empieza en menos infinito o acaba en infinito, dependiendo del sentido de la semirrecta.
Las semirrectas pueden estar abiertas o cerradas por el extremo que las delimita. El extremo que acaba en infinito o empieza en menos infinito, siempre está abierto (se utilizará el paréntesis para abrir o cerrar). Veamos los diferentes tipos que existen:

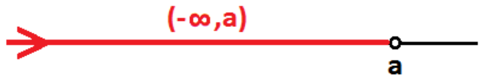
Semirrecta abierta por la derecha

Una semirrecta abierta por la derecha $(-\infty, a)$ es el rango de valores que va desde menos infinito, hasta el extremo a, pero sin incluirlo.

Comprende los números menores que a:

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$$

Y se representa de la siguiente forma:



Donde el punto a queda vacío.

Semirrecta cerrada por la derecha

Una semirrecta cerrada por la derecha $(-\infty, a]$ son los valores que van desde el menos infinito hasta el extremo a, incluido el extremo a.

Comprende los valores menores o iguales que a:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}$$

En este caso, el punto a queda relleno porque también pertenece a la semirrecta:

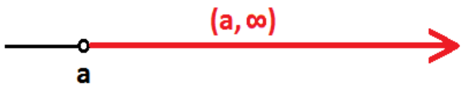
Semirrecta abierta por la izquierda

Una semirrecta abierta por la izquierda $(a, +\infty)$ que parte desde el extremo a, el cuál no se incluye y acaba en el infinito.

Comprende por tanto a los valores que son mayores que a:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$$

Y se representa así:



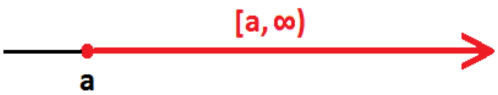
Semirrecta cerrada por la izquierda

Una semirrecta abierta por la izquierda $[a, +\infty)$ que parte desde el extremo a, el cuál no se incluye y acaba en el infinito.

Comprende por tanto a los valores que son mayores que a:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$$

Y se representa así:



Ejercicio 31: Considera los siguientes números reales 1; -1,5; 3, 0; 1,3; 2, -0,85; 2,6; 0,52

a) Indica cuáles pertenecen al intervalo $[1, 2]$

b) ¿Cuáles pertenecen al intervalo $(2, +\infty)$?

Ejercicio 32: Expresa como intervalo y da su expresión algebraica y representación gráfica de los siguientes conjuntos de puntos:

a) Los números reales menores que -5.

b) Los números comprendidos entre -4 y 3

c) Los números comprendidos entre -1,5 y 4, ambos incluidos

d) Los números reales mayores o iguales que 3

Ejercicio 33: Expresa como intervalo y representa las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq x < 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, -\frac{1}{2} \leq x \leq 4\right\}$

Ejercicio 34: Expresa como intervalo y da la expresión algebraica de los conjuntos de puntos siguientes:

a)

b)

c)

d)

Ejercicio 35: Halla dos números racionales y dos irracionales que pertenezcan a cada uno de estos intervalos:

a) $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$

b) $(\pi, 4)$

c) $\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$

d) $(-\infty, 0]$

Ejercicio 36: Averigua para que valores de x es posible calcular:

a) $\sqrt{x-6}$ b) $\sqrt{x+2}$ c) $\sqrt{2x-8}$