Matemáticas II 1º Bachillerato

HOJA 2 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 2: **DERIVADAS**

Ejercicio 1: Halla la derivada de la función $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ en el punto $x=3$, aplicando la definición de derivada.

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3-x}{2(x+1)}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{2\cdot(x+1)\cdot(x-3)}$$

$$\Rightarrow f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{2\cdot(x+1)}\Rightarrow \boxed{f'(3)=\frac{-1}{8}}$$

Ejercicio 2:

a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla $f'(0)$, $f'(3)$ y $f'(1)$:

$$f(x)=\begin{cases}3x-1 & si \quad x<1\\ x^2+x & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

Cont. en $x=1$

$f(1)=2$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x)=2\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=2\end{array}\right\}\Rightarrow f$ cont. en $x=1$

$$f'(x)=\begin{cases}3 & si \quad x<1\\ 2x+1 & si \quad x>1\end{cases}$$

$f'(1^-)=3$

$f'(1^+)=3 \Rightarrow f$ es derivable en $x=1$

$f'(0)=3=3$ $\quad f'(3)=2\cdot 3-1=5$ $\quad f'(1)=3$

b) ¿Cuál es su función derivada?

$$f'(x)=\begin{cases}3 & si \quad x<1\\ 3 & si \quad x=1\\ 2x+1 & si \quad x>1\end{cases} \quad ó \quad f'(x)=\begin{cases}3 & si \quad x\leq 1\\ 2x+1 & si \quad x>1\end{cases} \quad ó \quad f'(x)=\begin{cases}3 & si \quad x<1\\ 2x+1 & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

c) ¿En qué punto se cumple que $f'(x)=5$?

si $x<1$, $3=5$ absurdo

si $x>1$, $2x+1=5\Rightarrow \boxed{x=2}$ tiene que $f'(2)=5$

Ejercicio 3: Comprueba que $f(x)$ es continua pero no derivable en $x=2$:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(x-1) & si \quad x<2\\ 3x-6 & si \quad x\geq 2\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & si \quad x<2\\ 3 & si \quad x>2\end{cases}$$

$f'(2^-)=\frac{1}{2-1}=1 \neq$

$f'(2^+)=3$ $\Rightarrow f$ no es derivable en $x=2$

Cont. en $x=2$

$\left.\begin{array}{l}f(2)=0\\ \lim_{x\to 2^-}\ln(x-1)=0\\ \lim_{x\to 2^+}(3x-6)=0\end{array}\right\}\Rightarrow f$ cont. en $x=2$

Ejercicio 4: Considera la función $f(x)=\begin{cases}x^2-5x+m & si \quad x\leq 1\\ -x^2+nx & si \quad x>1\end{cases}$

a) Calcula m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

En $x=1$,

Continuidad

$\left.\begin{array}{l}f(1)=-4+m\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=-4+m\\ \lim_{x\to 1^+}(-x^2+nx)=-1+n\end{array}\right\}\Rightarrow -1+n=-4+m$

$\boxed{m-n=3}$

Derivabilidad

$$f'(x)=\begin{cases}2x-5 & si \quad x\leq 1\\ -2x+n & si \quad x>1\end{cases}$$

$f'(1^-)=2-5=-3$

$f'(1^+)=-2+n \Rightarrow \boxed{n=-1}$

$m+1=+3\Rightarrow \boxed{m=2}$

Matemáticas II 1º Bachillerato

b) ¿En qué puntos es $f'(x)=0$?

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{si } x\le 1 \\ -2x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}>1 \text{ por lo tanto no válido} \\ \text{ó} \\ -2x-1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}<1, \text{ por lo tanto no válido} \end{cases}$$

$\nexists x\in\mathbb{R} / f'(x)=0$

Ejercicio 5: Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \quad x\le 0 \\ 1-x & si \quad x>0 \end{cases}$, estudia si es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Sólo plantea problemas en $x=0$

Cont. en $x=0$

$f(0)=e^0=1$

$\lim_{x\to 0^-} e^{-x}=1$

$\lim_{x\to 0^+} (1-x)=1$

$\Rightarrow f$ cont. en $x=0$

Derivabilidad en $x=0$

$$f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x<0 \\ -1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ es derivable en $x=0$ y $f'(0)=-1$

Ejercicio 6: Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & si \quad x\le 2 \\ x^2-bx-4 & si \quad x>2 \end{cases}$$

Continuidad en $x=2$

$f(2)=4a+6$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} (ax^2+3x)=4a+6 \\ \lim_{x\to 2^+} (x^2-bx-4)=-2b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a+6=-2b \quad \boxed{4a+2b=-6}$

Derivabilidad en $x=2$

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+3 & \text{si } x<2 \\ 2x-b & \text{si } x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(2^-)=4a+3 \\ f'(2^+)=4-b \end{array}$$

$\Rightarrow 4a+3=4-b \Rightarrow \boxed{4a+b=1}$

Resolvemos $\begin{cases} 4a+b=1 \\ 4a+2b=-6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-7 \end{array}}$

Ejercicio 7: Sea la función $f(x)=x\cdot|x|$

$$f(x)=x\cdot|x|=\begin{cases} x\cdot(-x) & \text{si } x\le 0 \\ x\cdot x & \text{si } x>0 \end{cases}=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x\le 0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

a) Halla $f'(x)$

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Falta ver en $x=0$ si es derivable.

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=0 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ es derivable en $x=0$ y $f'(0)=0$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -2x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$$

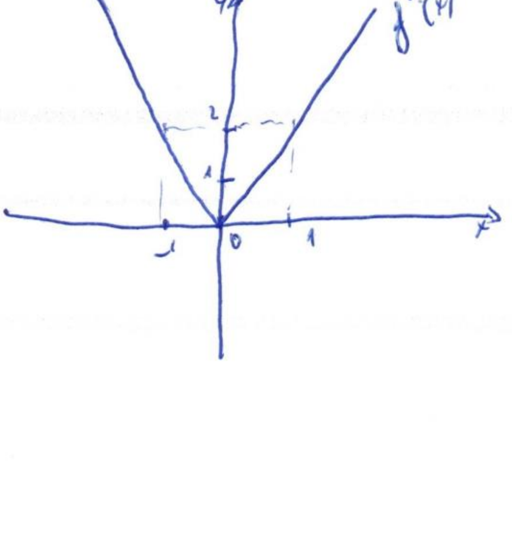
b) Halla $f''(x)$

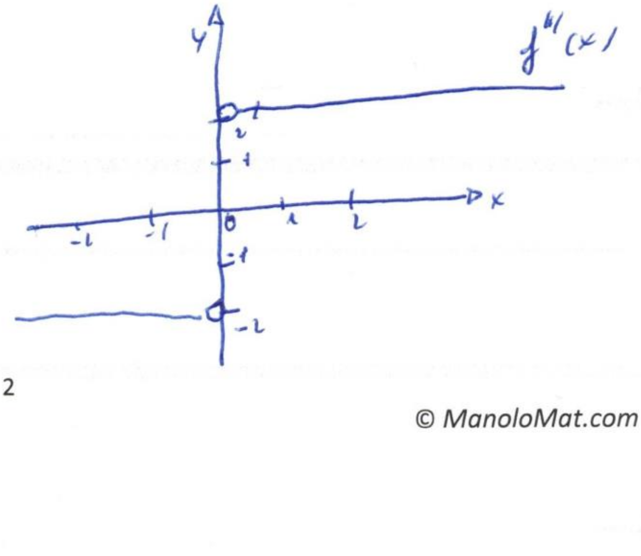
$$f''(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Ahora en $x=0$, $f''(0^-)=-2\neq 2=f''(0^+)$

$$\Rightarrow \nexists f''(0) \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

c) Representa f' y f''





Ejercicio 8:

a) Calcula la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ en el punto de abscisa $x_0=2$

a) r_t y r_n a $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ en $x=2$

$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot(2x)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

$f'(2)=\dfrac{-4-1}{(2^2-1)^2}=\dfrac{-5}{9}$ $\quad f'(2)=\dfrac{-5}{9}$

$P(2,f(2))=\left(2,\dfrac{2}{3}\right)$

$\boxed{r_t: y-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{5}{9}(x-2)}$

$\boxed{r_n: y-\dfrac{2}{3}=\dfrac{9}{5}(x-2)}$

b) Lo mismo para $y=2^{x^2-x}+\ln(x+1)-5$ en $x_0=0$

b) $y=2^{x^2-x}+\ln(x+1)-5$ en $x=0$; $f(0)=1+0-5$, $f(0)=-4$

$y'=2^{x^2-x}\cdot\ln 2\cdot(2x-1)+\dfrac{1}{x+1}$

$y'(0)=2^0\cdot\ln 2\cdot(2\cdot 0-1)+\dfrac{1}{1}=-\ln 2+1$

$r_t: y+4=(1-\ln 2)(x-0)$; $\boxed{y=(1-\ln 2)x-4}$

Ejercicio 9: Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2+4$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

$f(x)=x^2+4$; $f'(x)=2x$

r_t a la gráfica de f en $x=1$

$P(1,5)$ $\quad m=f'(1)=2$

$y-5=2(x-1)$; $\boxed{y=2x+3}$

Ejercicio 10: Halla las tangentes a la curva $y=\dfrac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x+y=0$.

Halla las tangentes a la curva $y=\dfrac{2x}{x-1}$ paralelas a $2x+y=0$

$y=-2x \Rightarrow m=f'(x_0)=-2$

$f'(x)=\dfrac{2(x-1)-2x\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{\cancel{2x}-2-\cancel{2x}}{(x-1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$; Igualamos $\quad -2=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$

$-2(x-1)^2=-2$

$(x-1)^2=1$ $\quad \begin{cases} x-1=1 & x=2\\ x-1=-1 & x=0\end{cases}$

$r_{t_1}: (P(2,4),\ m=-2)$

$y-4=-2(x-2)$

$y=-2x+4+4$

$\boxed{y=-2x+8}$

$r_{t_2}: (P(0,0),\ m=-2)$

$y-0=-2(x-0)$

$y=-2x$

$\boxed{y=-2x}$

Ejercicio 11: Dada la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x)$, donde ln es la función logaritmo neperiano, comprueba que la recta de ecuación $y=-e\cdot x+1+e^2$ es la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa de $x=e$.

$f(x) = \ln x$

Comprobar que $y = -ex + 1 + e^2$ es la r_t a $f(x)$ en $x = e$

$P(e, f(e)) = (e, 1)$

$m_{r_t} = f'(e)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$; $f'(e) = \frac{1}{e}$

$m_{r_n} = -e \Rightarrow r_n$: $\boxed{y - 1 = -e\cdot(x - e)}$

$y = -ex + e^2 + 1$ Sí

Ejercicio 12: Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln\left(x^2+3x\right)$:

a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela la recta de ecuación $x-2y+1=0$.

$f(x) = \ln(x^2+3x)$

a) Determinar los puntos de la gráfica de f donde la r_t es paralela a la recta $x - 2y + 1 = 0$

$x + 1 = 2y$ $\qquad \vec{n}(A,B)$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = y \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ $\qquad \vec{v}(-B,A)$ $\quad m = \frac{A}{-B}$

$f'(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x)}$ igualemos $\frac{2x+3}{(x^2+3x)} = \frac{1}{2}$

$4x + 6 = x^2 + 3x$

$0 = x^2 - x - 6$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$

$x = 3$ $\quad P(3, \ln 18)$

$x = -2 \notin \mathrm{Dom} f$

b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

b) r_t : $\boxed{y-\ln 18=\frac{1}{2}(x-3)}$

$y=\frac{1}{2}x+\ln 18-\frac{3}{2}$

r_n : $\boxed{y-\ln 18=-2(x-3)}$

$y=-2x+\ln 18+6$

Ejercicio 13: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2\cdot|x-3|$, estudia su continuidad y derivabilidad.

13) $f(x)=x^2\cdot|x-3|$ Estudiar continuidad y derivabilidad

$$f(x)=\begin{cases} x^2(-x+3) & \text{si } x<3 \\ x^2\cdot(x-3) & \text{si } x\geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^3+3x^2 & x<3 \\ x^3-3x^2 & x\geq 3 \end{cases}$$

- Continuidad en $x=3$

$f(3)=0$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3} -x^3+3x^2=0$

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3} x^3-3x^2=0$

Es continua en todo $\mathbb{R}$, es producto de dos funciones continuas en todo $\mathbb{R}$

- Derivabilidad en $x=3$

$$f'(x)=\begin{cases} -3x^2+6x & x<3 \\ 3x^2-6x & x>3 \end{cases}$$

$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-} f'(x)=\lim_{x\to 3} -3x^2+6x=-27+18=-9$

$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+} f'(x)=\lim_{x\to 3} 3x^2-6x=27-18=+9$

$f'_-(3)\neq f'_+(3)$ no es derivable en $x=3$

f es derivable en $\mathbb{R}-\{3\}$

Ejercicio 14: La recta tangente a la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=mx^2+nx-3$, en el punto $(1,-6)$ es paralela a la recta de ecuación $y=-x$. Determina las constantes m y n y halla la ecuación de dicha recta tangente.

14) $f(x)=mx^2+nx-3$ r_t en $P(1,-6)$ es paralela a $y=-x$

Debe ser $f'(1)=-1$ y $f(1)=-6$. $m=-1$

$f'(x)=2mx+n$

$f'(1)=2m+n=-1$

$f(1)=-6$

$f(1)=m+n-3$

$$\left.\begin{array}{l} 2m+n=-1 \\ m+n=3 \end{array}\right\} \qquad m+n-3=-6 \qquad m+n=-3$$

$$\left.\begin{array}{l} 2m+n=-1 \\ -m-n=+3 \end{array}\right\} \longrightarrow n=-1-2m \qquad n=-1-2\cdot 2$$

$$m=+2 \qquad m=2 \qquad n=-5$$

$$\boxed{\text{Debe ser } f(x)=2x^2-5x-3}$$

Ejercicio 15: Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2 Ln(x)$. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\sqrt{e}$

$f(x)=x^2\cdot Ln x$, r_t en $x=\sqrt{e}$

$f'(x)=2x\cdot Ln x+\frac{x^2}{x}$; $\quad P(\sqrt{e}, f(\sqrt{e}))=(\sqrt{e}, \frac{e}{2})$

$f'(x)=2x\cdot \ln x+x$

$f'(\sqrt{e})=2\cdot\sqrt{e}\cdot \ln(\sqrt{e})+\sqrt{e}=2\sqrt{e}$

$$\boxed{y-\frac{e}{2}=2\sqrt{e}\,(x-\sqrt{e})}$$

$$y=2\sqrt{e}\,x-2e+\frac{e}{2}; \quad \boxed{y=2\sqrt{e}\,x-\frac{3e}{2}}$$

Ejercicio 16: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} |2-x| & si \quad x<a \\ x^2-5x+7 & si \quad x\geq a \end{cases}$ donde a es un número real.

a) Determina a .

$f(x)=\begin{cases} |2-x| & si \quad x<a \\ x^2-5x+7 & si \quad x\geq a \end{cases}$ $\quad a\in\mathbb{R}$, a) si es continua determine a b) Halle $f'(x)$

a) $f(a)$ está definida

$\lim_{x\to a^-} f(x)=|2-a|$

$\lim_{x\to a^+} f(x)=a^2-5a+7$

$$|2-a|=a^2-5a+7 \quad \left\{\begin{array}{l} \bullet\ 2-a=a^2-5a+7 \\ \bullet\ -2+a=a^2-5a+7 \end{array}\right.$$

$0=a^2-4a+5 \longrightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}\notin\mathbb{R}$

$0=a^2-6a+9 \longrightarrow a=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}$, $a=3$

b) $f(x)=\{\ |2-x| \quad si \quad x<3$

b) Halla la función derivada de f .

b) $f(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{si } x<3 \\ x^2-5x+7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

$|2-x| = \begin{cases} -2+x & \text{si } 2<x \\ 2-x & \text{si } 2 \geq x \end{cases} = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 2 \\ -2+x & \text{si } x>2 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 2 \\ -2+x & \text{si } 2<x<3 \\ x^2-5x+7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<2 \\ 1 & \text{si } 2<x<3 \\ 2x-5 & \text{si } x>3 \end{cases}$

$f'_-(2) \neq f'_+(2)$ $\quad \left. \begin{array}{l} f'_-(2)=-1 \\ f'_-(2)=1 \end{array} \right\}$

$f'_-(3) = f'_+(3)$

$\left. \begin{array}{l} f'_-(3)=1 \\ f'_+(3)=1 \end{array} \right\}$

Entonces:

$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<2 \\ 1 & \text{si } 2<x<3 \\ 2x-5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Si $a=3$ f es continua en $\mathbb{R}$

y f es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$