HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 3: **APLICACIONES DE LAS DERIVADAS**

Ejercicio 1: Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{\frac{2x}{x^2+1}}$. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan)

Ejercicio 2: Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x\neq 0$ y $x\neq 2$. Estudia la monotonía de dicha función.

Ejercicio 3: Sea f la función definida para $x\neq 1$ por $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de dicha función. Estudia también su curvatura y puntos de inflexión.

Ejercicio 4: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=Ln(x^2+1)$. Determina los intervalos de monotonía y sus extremos relativos (puntos donde se alcanzan y valor de la función. Estudia también su curvatura.

Ejercicio 5: Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2-|x|$. Determina los intervalos de crecimiento y sus extremos relativos.

Ejercicio 6: De una función $f:[0,5]\to\mathbb{R}$, se sabe que $f(3)=6$ y que su función derivada está dada por:

$$f'(x)=\begin{cases} 5x-2 & si \quad 0<x<1 \\ x^2-6x+8 & si \quad 1\leq x<5 \end{cases}$$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente y la normal a la gráfica de f en $x=3$
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos donde se obtienen y valores que alcanza la función)

Ejercicio 7: Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1 € / cm^2 y para la base se emplea un material un 50 % más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

Ejercicio 8: De entre todos los rectángulos que tiene uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto a este vértice en la curva $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ $(x>1)$, uno de sus lados sobre el semieje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima.

Ejercicio 9: Una ventana *normanda* consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10 m, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.

Ejercicio 10: Un alambre de 100 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se construye un cuadrado y con el otro trozo un rectángulo cuya base es el doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

Ejercicio 11: Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a $54\ m^2$. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

Ejercicio 12: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calcula los valores de a,b,c y d sabiendo que f verifica:

- El punto $(0,1)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f.
- f tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x=1$.
- La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 1.

Ejercicio 13: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x+e^{-x}$. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f, es decir, estudia su curvatura.

Ejercicio 14: Sea $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$.

a) Estudia la monotonía de f.
b) Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Ejercicio 15: Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan).
b) Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Ejercicio 16: Sea f la función definida para $x\neq 1$ por $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$. Estudia la curvatura de la gráfica de f

Ejercicio 17: Calcula

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{Lnx}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Ejercicio 18: Se sabe que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\alpha\cdot\text{sen}\,x}{x^2}$$

es finito. Determina el valor de α y calcula el límite

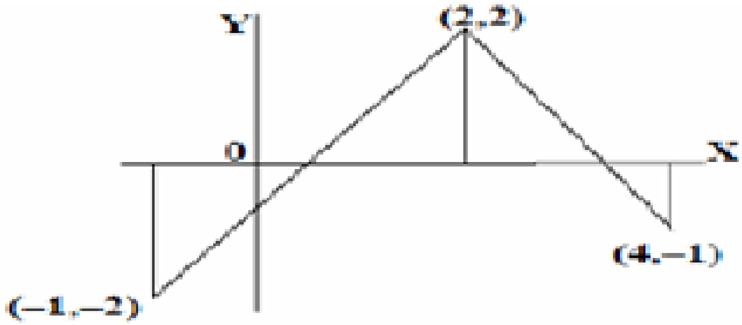
Ejercicio 19: Se sabe que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)$

es finito. Determina el valor de a y calcula el límite

Ejercicio 20: Calcula

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)-\text{sen}\,x}{x\cdot\text{sen}\,x}$$

Ejercicio 21: Sea $f:[-1,4]\to\mathbb{R}$ una función cuya derivada tiene por gráfica la de la figura:



a) Estudia la monotonía de f y determina los valores donde alcanza sus extremos relativos.
b) Estudia la curvatura de f. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f ?

Ejercicio 22: Determina el valor de las constantes c y d sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+3x^2+cx+d$ tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y=3x+4$

Ejercicio 23: Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2e^{\frac{x}{2}}$.

a) Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
b) Calcula los intervalos de monotonía y los extremos locales de f

Ejercicio 24: Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\sin x}{x^3-x^2}$

Ejercicio 25: Sea $f:\left[\frac{1}{e},4\right]\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x-\ln x+a & si \quad \frac{1}{e}\le x\le 2 \\ bx+1-\ln 2 & si \quad 2<x\le 4 \end{cases}$$

a) Calcula los valores de a y b para que f sea derivable en el intervalo $\left(\frac{1}{e},4\right)$
b) Para $a=0$ y $b=\frac{1}{2}$, halla los extremos absolutos de f

Ejercicio 26: Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,0)$ y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y=-3x+3$

Ejercicio 27: En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, x, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2+70x$, mientras que para edades superiores o iguales a 50 años los ingresos están determinados por la expresión $\dfrac{400x}{x-30}$. Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a que edad se alcanza.

Ejercicio 28: Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-2x^2+3x-1$, prueba que las rectas $y=-x+1$ e $y=3x-1$ son tangentes a su gráfica