EJERCICIOS UNIDAD 3: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Ejercicio 1:

9 S **Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

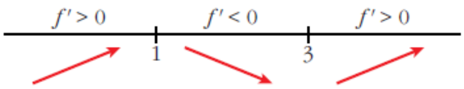
d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x(x-1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = 4 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



Hay un mínimo en $(3, 0)$ y un máximo en $(1, 4)$.

Puntos de inflexión:

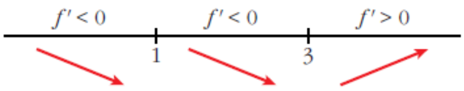
$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\; y = 2$$

Como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y $f''(x) > 0$ para $x > 2$, el punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

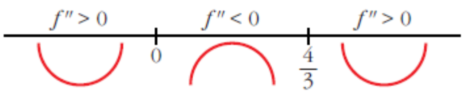
$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 2 \;\rightarrow\; y = -(4/3) \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

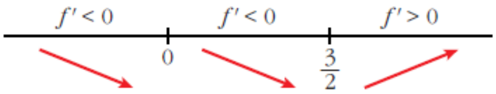
$$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 4/3 \;\rightarrow\; y = -(64/81) \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

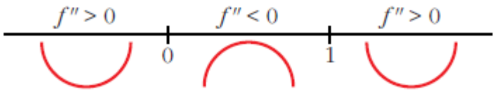
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x^2(4x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\to\; y = 0 \\ x = 3/2 \;\to\; y = -(27/16) \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16}\right)$.

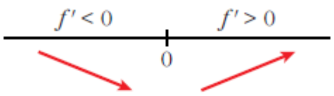
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\to\; y = 0 \\ x = 1 \;\to\; y = -1 \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $(1, -1)$.

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \;\to\; 4x(x^2 + 1) = 0 \;\to\; x = 0 \;\to\; y = 0$



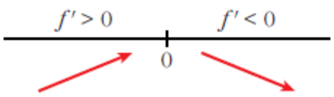
Hay un mínimo en $(0, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

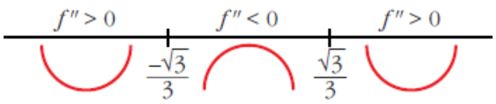
$f'(x) = 0 \;\to\; -2x = 0 \;\to\; x = 0 \;\to\; y = 1$



Hay un máximo en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\to\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\to\; y = \frac{3}{4}$$

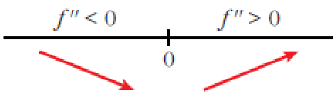


Hay un punto de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \rightarrow xe^x = 0 \rightarrow x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x)

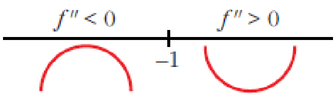
$y = -1$



Hay un mínimo en $(0, -1)$.

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = \frac{-2}{e}$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \frac{-2}{e}\right)$.

Ejercicio 2:

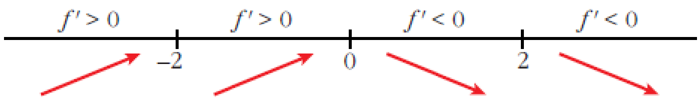
Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximo o mínimos:

a) $y = \frac{1}{x^2-4}$ **b)** $y = \frac{2x-3}{x+1}$ **c)** $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ **d)** $y = \frac{x^2-1}{x}$

a) $y = \frac{1}{x^2-4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de la derivada:



La función: crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$

b) $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq -1$.

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

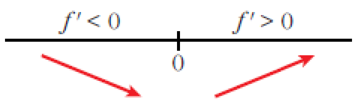
No tiene máximos ni mínimos.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-2x \cdot x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) > 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función: decrece en $(-\infty, 0)$

crece en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x-(x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2-x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

<u>**Ejercicio 3**</u>:

Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

d) $y = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}$ **e)** $y = x^3-3x^2-9x$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)} = \dfrac{8-3x}{x^2-2x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

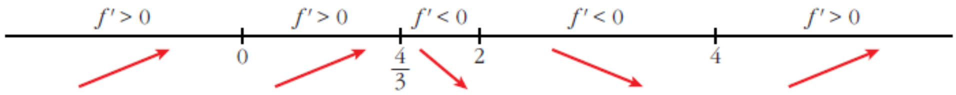
$$f'(x) = \frac{-3(x^2-2x)-(8-3x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+6x-16x+16+6x^2-6x}{(x^2-2x)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2-16x+16}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2-16x+16=0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256-192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$

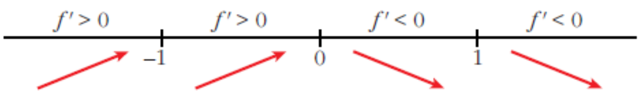
tiene un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$

b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

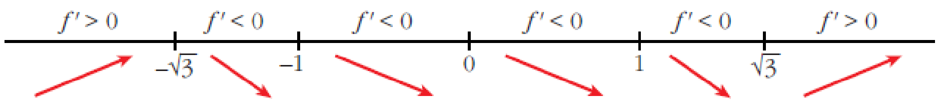
tiene un máximo en $(0, -1)$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 3) = 0 \;\left\langle\; \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right.$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{2\}$

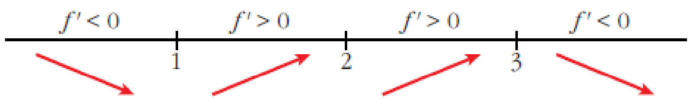
$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \;\left\langle\; \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(1, -1)$

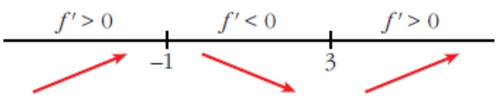
tiene un máximo en $(3, -9)$

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(-1, 3)$

tiene un máximo en $(-1, 5)$

tiene un mínimo en $(3, -27)$

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8x(3x-6)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8(3x-6)}{x^3(x-3)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Signo de la derivada:

La función: es creciente en $(0, 2)$

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un máximo en $(2, -2)$

Ejercicio 4:

Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x-2)^4$

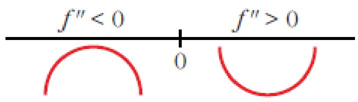
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ **f)** $y = \ln(x+1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

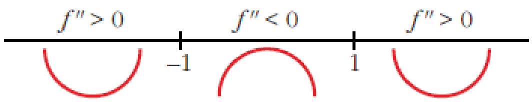
tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f''(x)$:



La función: es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es convexa en $(-1, 1)$

tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

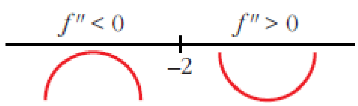
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\,e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -2$ ($e^x \neq 0$ para todo x)

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -2)$

es cóncava en $(-2, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

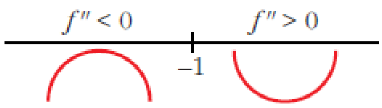
e) $y = \dfrac{2-x}{x+1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1(x+1)-(2-x)}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-2+x}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -1)$

es cóncava en $(-1, +\infty)$

no tiene puntos de inflexión

f) $y = ln(x+1)$. *Dominio* $= (-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

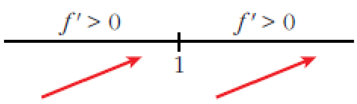
<u>Ejercicio 5</u>:

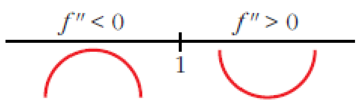
Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de ir flexión en el punto de abscisa $x = 1$:

a) $y = 1 + (x-1)^3$ **b) $y = 2 + (x-1)^4$**

c) $y = 3 - (x-1)^6$ **d) $y = -3 + 2(x-1)^5$**

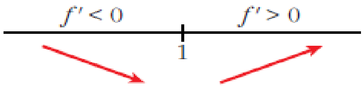
a) $f'(x) = 3(x-1)^2$; $f''(x) = 6(x-1)$

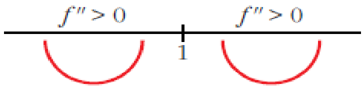




Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

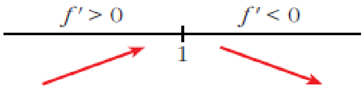
b) $f'(x) = 4(x-1)^3$; $\quad f''(x) = 12(x-1)^2$

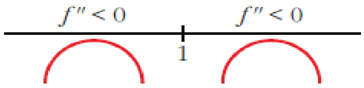




Hay un mínimo en $x = 1$.

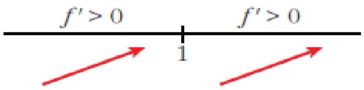
c) $f'(x) = -6(x-1)^5$; $\quad f''(x) = -30(x-1)^4$

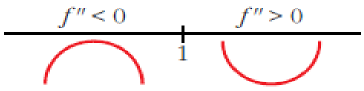




Hay un máximo en $x = 1$.

d) $f'(x) = 10(x-1)^4$; $\quad f''(x) = 40(x-1)^3$





Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

Ejercicio 6:

Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función dada por: $y = |x^2 + 2x - 3|$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

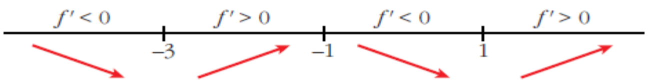
  $2x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

  Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$ y $f'(x) = -2x - 2$ para $-3 < x < 1$

  Por tanto $f'(x)$ se anula en $x = -1$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$

  es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

  tiene un máximo en $(-1, -4)$

  tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$.

Ejercicio 7:

Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.

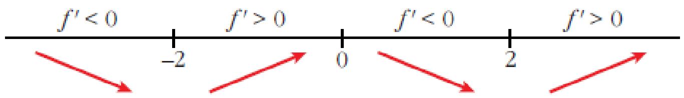
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.
- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en $(0, 4)$.

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right)$.

- Tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$ y otro en $(2, 0)$. En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \geq 0$ para todo x.

Ejercicio 8:

Halla el valor de c de modo que la función $y = \dfrac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único extremo relativo.

¿Se trata de un máximo o de un mínimo?

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + c) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + c)^2} = \frac{e^x(x^2 + c - 2x)}{(x^2 + c)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x + c = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2}$$

Para que solo haya un extremo relativo, ha de ser: $4 - 4c = 0 \;\rightarrow\; c = 1$

En este caso sería:

$$y = \frac{e^x}{x^2 + 1}; \quad f'(x) = \frac{e^x(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 1$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \neq 1 \;\rightarrow\; f(x) \text{ es creciente si } x \neq 1.$$

Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

Ejercicio 9:

Estudia el crecimiento de la función:

$$f(x) = e^x\,(\cos x + \operatorname{sen} x)$$

y determina los máximos y mínimos de la función para $x \in [0, 2\pi]$.

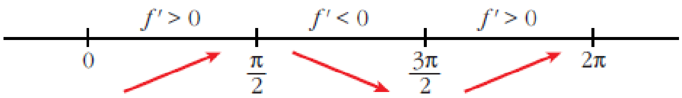
Consideramos la función: $f(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + e^x(-\operatorname{sen} x + \cos x) = e^x(2\cos x) = 2e^x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \cos x = 0 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\[2mm] x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \left(\text{para } x \in [0, 2\pi]\right)$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, e^{\pi/2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -e^{3\pi/2}\right)$

Ejercicio 10:

Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que la función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.

$$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(1) = 0 \;\rightarrow\; 12a + 18b - 6 = 0 \\ f''(1/2) = 0 \;\rightarrow\; 3a + 9b - 6 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2a + 3b - 1 = 0 \\ a + 3b - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Restando las igualdades: $a + 1 = 0 \;\rightarrow\; a = -1$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $3b - 3 = 0 \;\rightarrow\; b = 1$

Ejercicio 11:

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) Halla a, b, c y d.

b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

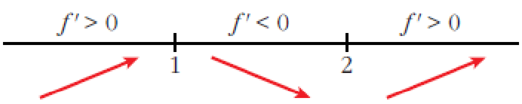
a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 & \rightarrow & a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 2 & \rightarrow & c = 2 \\ f'(1) = 0 & \rightarrow & 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 & \rightarrow & 12a + 4b + c = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a + b + d = -2 \\ c = 2 \\ 3a + 2b = -2 \\ 6a + 2b = -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{-3}{2} \\ c = 2 \\ d = \dfrac{-5}{6} \end{array}$$

Así: $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - \dfrac{5}{6}$; $\quad f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$

b) Signo de la derivada:



Hay un máximo para $x = 1$ y un mínimo para $x = 2$.

Ejercicio 12:

La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en (2, 1). Calcula a, b y c.

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(-1) = 0 & \rightarrow & -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 & \rightarrow & 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 & \rightarrow & 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}$$

Ejercicio 13:

De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$.

a) Halla a y b.

b) Determina sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

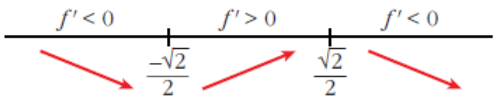
a) $f(x) = ax^3 + bx; \quad f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \;\rightarrow\; a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \;\rightarrow\; 3a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f'(x) = -6x^2 + 3$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -3(2x^2 - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

es creciente en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

Ejercicio 14:

La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.

☛ ***Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber una inflexión en $x = 1$.***

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \;\rightarrow\; 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \;\rightarrow\; 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \;\rightarrow\; 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

Ejercicio 15:

Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.

Si en $x = 1$ tiene un punto de inflexión con tangente horizontal, ha de ser $f'(1) = f''(1) = 0$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = 0 \quad \rightarrow \quad 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \quad \rightarrow \quad 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$$

Ejercicio 16:

La curva $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ corta al eje OX en $x = 1$ y tiene un punto de inflexión en (3, 2). Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje OX.

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$; $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$; $f''(x) = 6x + 2\alpha$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ f(3) = 2 \quad \rightarrow \quad 27 + 9\alpha + 3\beta + \gamma = 2 \\ f''(3) = 0 \quad \rightarrow \quad 18 + 2\alpha = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = -9 \\ \beta = 24 \\ \gamma = -16 \end{array}$$

Así: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$; $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

- Puntos con tangente horizontal:

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6} \begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}$$

- Los puntos son (4, 0) y (2, 4).

Ejercicio 17:

Halla el dominio de definición, máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 \ln x$ **b)** $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

a) $y = x^2 \ln x$. *Dominio* = $(0, +\infty)$

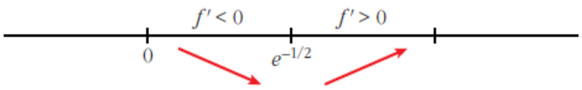
$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x(2\ ln\ x + 1) = 0$

$x = 0$ (no vale, pues no está en el dominio)

$2\ ln\ x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad ln\ x = -\dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $(0, e^{-1/2})$

es creciente en $(e^{-1/2}, +\infty)$

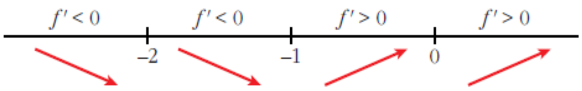
tiene un mínimo en $\left(e^{-1/2}, \dfrac{-1}{2e}\right)$

b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{2x + 2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}}$ (La función no es derivable en $x = 0$ ni en $x = -2$).

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $(-\infty, -1)$

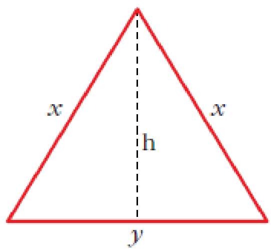
es creciente en $(-1, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-1, -1)$

Ejercicio 18:

Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?

Perímetro $= 2x + y = 30 \quad \rightarrow \quad y = 30 - 2x$



Altura $= \text{h} = \sqrt{x^2 - \dfrac{y^2}{4}}$

$$\acute{A}rea = \frac{y \cdot \text{h}}{2} = \frac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{x^2 - \dfrac{(3c - 2x)^2}{4}}}{2} =$$

$$= \frac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{30x - 225}}{2} = (15 - x)\sqrt{30x - 225} = \sqrt{(15 - x)^2(30x - 225)} =$$

$$= \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

Tenemos que maximizar la función área:

$$f(x) = \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

$$f'(x) = \frac{90x^2 - 2\,250x + 13\,500}{2\sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 90x^2 - 2\,250x + 13\,500 = 0$$

$$90(x^2 - 25x + 150) = 0$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 15 \quad \text{(no vale)} \\ x = 10 \end{cases}$$

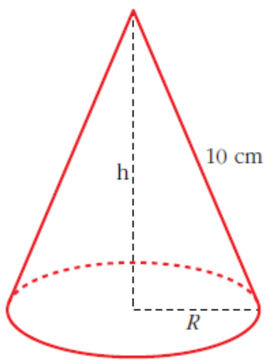
($x = 15$ no vale, pues quedaría $y = 0$, al ser perímetro = 30)

($f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 10$. Por tanto, en $x = 10$ hay un máximo).

Luego, el triángulo de área máxima es el equilátero de lado 10 cm, cuya área es $25\sqrt{3} \approx 43{,}3 \text{ cm}^2$.

Ejercicio 19:

Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?



$$h^2 + R^2 = 100 \quad \to \quad R^2 = 100 - h^2$$

$$Volumen = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2)$$

$$f'(h) = 0 \quad \to \quad 100 - 3h^2 = 0 \quad \to \quad h = \sqrt{\frac{100}{3}}$$

(consideramos la raíz positiva, pues $h \geq 0$).

$\left(f'(h) > 0 \right.$ a la izquierda de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ y $f'(h) < 0$ a la derecha de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$.

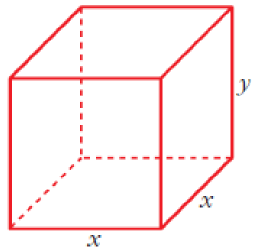
Luego, en $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ hay un máximo$\left.\right)$.

Por tanto, el radio de la base será:

$$R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \quad \to \quad R = \sqrt{\frac{200}{3}}$$

Ejercicio 20:

Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm³. Averigua las dimensiones de la caja para que su superficie exterior sea mínima.



Volumen $= x^2y = 8 \text{ dm}^3 \rightarrow y = \dfrac{8}{x^2}$

Superficie $= 4xy + 2x^2 = 4x\dfrac{8}{x^2} + 2x^2 = \dfrac{32}{x} + 2x^2$

Tenemos que hallar el mínimo de la función superficie:

$$f(x) = \frac{32}{x} + 2x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{-32}{x^2} + 4x = \frac{-32 + 4x^3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -32 + 4x^3 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 2$$

(En $x = 2$ hay un mínimo, pues $f'(x) < 0$ para $x < 2$ y $f'(x) > 0$ para $x > 2$).

Por tanto, la caja ha de ser un cubo de lado 2 dm.

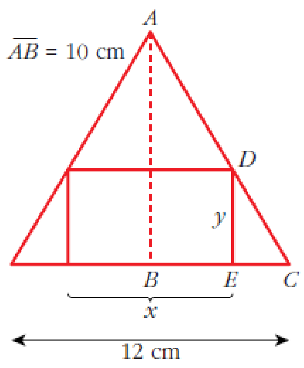
Ejercicio 21:

En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:

a) Expresa el área, A, del rectángulo en función de la longitud de su base, x, y di cuál es el dominio de la función.

b) Halla el valor máximo de esa función.

a)



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEC}$ son semejantes; luego:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Como $\overline{AB} = 10$ cm $\qquad \overline{DE} = y$

$\overline{BC} = 6$ cm $\qquad \overline{EC} = \dfrac{12 - x}{2}$

tenemos que:

$$\frac{10}{y} = \frac{6}{\frac{12 - x}{2}} \rightarrow \frac{10}{y} = \frac{12}{12 - x}$$

$$10(12 - x) = 12y \rightarrow y = \frac{10(12 - x)}{12} = \frac{5(12 - x)}{6} = \frac{60 - 5x}{6}$$

Por tanto, el área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y = x \cdot \frac{(60 - 5x)}{6} = \frac{60x - 5x^2}{6} \rightarrow A(x) = \frac{60x - 5x^2}{6}$$

x puede tomar valores entre 0 y 12. Por tanto, el dominio de $A(x)$ es:

Dominio $= (0, 12)$

b) Hallamos el máximo de $A(x)$:

$$A'(x) = \frac{60 - 10x}{6}$$

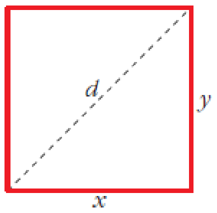
$$A'(x) = 0 \;\to\; 60 - 10x = 0 \;\to\; x = 6 \;\to\; y = 5$$

(En $x = 6$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ para $x < 6$ y $A'(x) < 0$ para $x > 6$).

El máximo de la función $A(x)$ se alcanza en $x = 6$, que corresponde al rectángulo de base 6 cm y altura 5 cm. En este caso, el área es de 30 cm^2 (que es el área máxima).

Ejercicio 22:

De todos los rectángulos de área 100 dm^2, halla las dimensiones del que tenga la diagonal mínima.



$$\textit{Área} = x \cdot y = 100 \text{ dm}^2 \;\to\; y = \frac{100}{x}$$

La diagonal mide:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{100}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{10\,000}{x^2}}$$

Tenemos que minimizar la función:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{10\,000}{x^2}}$$

$$d'(x) = \frac{2x - \dfrac{20\,000}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \dfrac{10\,000}{x^2}}} = \frac{2x^4 - 20\,000}{2x^3\,\dfrac{\sqrt{x^4 + 10\,000}}{x}} = \frac{x^4 - 10\,000}{x^2\sqrt{x^4 + 10\,000}}$$

$$d'(x) = 0 \;\to\; x^4 - 10\,000 = 0 \;\to\; x = \sqrt[4]{10\,000} = 10 \;\to\; x = 10 \;\to\; y = 10$$

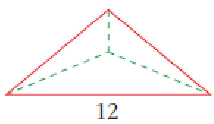
(En $x = 10$ hay un mínimo, pues $d'(x) < 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $d'(x) > 0$ a la derecha de $x = 10$).

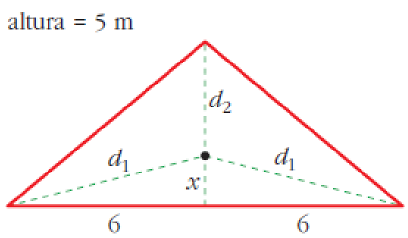
Por tanto, la diagonal mínima corresponde al cuadrado de lado 10 dm.

Ejercicio 23:

Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m.

Encuentra un punto sobre la altura tal que la suma de distancias a los tres vértices sea mínima.





La suma de las distancias a los tres vértices es:

$$S = 2d_1 + d_2$$

Pero: $d_1 = \sqrt{x^2 + 36}$ y $d_2 = 5 - x$

Por tanto:

$$S(x) = 2\sqrt{x^2 + 36} + 5 - x$$

Tenemos que minimizar la función $S(x)$:

$$S'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}}$$

$$S'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x - \sqrt{x^2+36} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = \sqrt{x^2+36}$$

$$4x^2 = x^2 + 36 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 36 \quad \rightarrow \quad x^2 = 12 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

(consideramos solo la raíz positiva, pues $x \geq 0$).

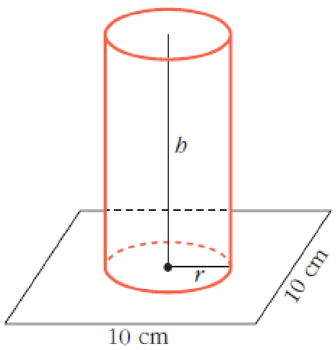
(En $x = 2\sqrt{3}$ hay un mínimo, pues $S'(x) < 0$ a la izquierda de este valor y $S'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto buscado se encuentra a $2\sqrt{3}$m de la base, situado sobre la altura.

Ejercicio 24:

En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm².

¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea el mayor posible?



Área lateral cilindro $= 2\pi r\text{h} = 50 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad \text{h} = \dfrac{50}{2\pi r}$

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 \text{h} = \pi r^2 \cdot \frac{50}{2\pi r} = 25r \quad \rightarrow \quad V(r) = 25r$$

Al estar apoyada la base sobre el cuadrado, tenemos que el dominio de $V(r)$ es el intervalo $(0, 5]$.

Tenemos que maximizar $V(r) = 25r$, con $r \in (0, 5]$.

Como $V(r)$ es una función creciente, su máximo se alcanza en $r = 5$.

Ejercicio 25:

Dada la función $f\colon [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.

La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$. Tenemos que hallar el máximo de:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]$$

Calculamos la derivada de $f'(x)$; es decir, $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 2 - x = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \in [1, e]$$

(En $x = 2$ hay un máximo relativo de $f'(x)$, pues $f''(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $f''(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos $f'(x)$ en $x = 2$ y en los extremos del intervalo $[1, e]$:

$$f'(2) = \frac{1}{4} = 0{,}25; \quad f'(1) = 0; \quad f'(e) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}23$$

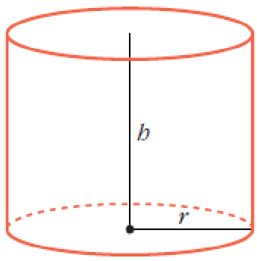
Por tanto, la recta tangente con pendiente máxima es la recta tangente en $x = 2$. La hallamos:

$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2; \quad f'(2) = \frac{1}{4}$$

La recta es: $y = \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{4}(x-2)$

<u>Ejercicio 26</u>:

Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total $54\ cm^2$. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.



Área total $= 2\pi r h + 2\pi r^2 = 54\ cm^2$

$$h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

Volumen $= \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = r(27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$

Tenemos que maximizar la función $V(r) = 27r - \pi r^3$:

$$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$$

$$V'(r) = 0 \;\rightarrow\; 27 - 3\pi r^2 = 0 \;\rightarrow\; r^2 = \frac{27}{3\pi} = \frac{9}{\pi} \;\rightarrow\; r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

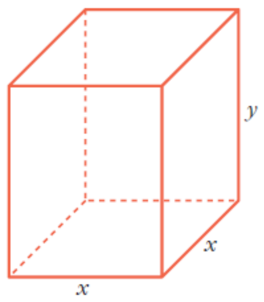
(En $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ hay un mínimo, pues $V'(r) < 0$ a la izquierda de este valor y $V'(r) > 0$ a su derecha).

Para $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \;\rightarrow\; h = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, dimensiones del cilindro de volumen máximo.

<u>Ejercicio 27</u>:

Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro.

Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.



$Volumen = x^2y = 80 \text{ cm}^3 \;\rightarrow\; y = \dfrac{80}{x^2}$

Para la tapa y el lateral $\rightarrow$ z €/cm^2

Para la base $\rightarrow$ $1{,}5z$ €/cm^2

El precio total será:

$$P = z(x^2 + 4xy) + 1{,}5z(x^2) = z\left(x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2}\right) + 1{,}5x^2z =$$

$$= z\left(x^2 + \frac{320}{x}\right) + 1{,}5x^2z = z\left(x^2 + \frac{320}{x} + 1{,}5x^2\right) =$$

$$= z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

Tenemos que minimizar la función que nos da el precio:

$$P(x) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

$$P'(x) = z\left(5x - \frac{320}{x^2}\right) = z\left(\frac{5x^3 - 320}{x^2}\right)$$

$$P'(x) = 0 \;\rightarrow\; 5x^3 - 320 = 0 \;\rightarrow\; x^3 = 64 \;\rightarrow\; x = 4 \;\rightarrow\; y = 5$$

(En $x = 4$ hay un mínimo, pues $P'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $P'(x) > 0$ a su derecha).

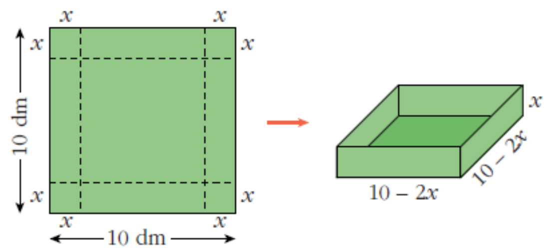
El envase debe tener la base cuadrada de lado 4 cm y 5 cm de altura.

__Ejercicio 28__:

Con una lámina cuadrada de 10 dm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados de los vértices.

Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.

Si la altura de la caja no puede pasar de 2 dm, ¿cuál es la medida del lado del cuadrado que debemos recortar?



El volumen de la caja es:

$V(x) = x(10 - 2x)^2, \quad x \in (0, 5)$

Tenemos que maximizar esta función:

$$V(x) = x(10 - 2x)^2 = x(100 + 4x^2 - 40x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4(3x^2 - 20x + 25)$$

$$V'(x) = 0 \quad \to \quad x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{6} = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} \begin{cases} x = 5 & \text{(no vale)} \\ x = 5/3 \end{cases}$$

(En $x = 5/3$ hay un máximo, pues la derivada es positiva a la izquierda de este valor y es negativa a su derecha).

Por tanto, el lado del cuadradito es $x = 5/3$.

Si la altura no puede pasar de 2 dm; es decir, si $x \in (0, 2)$, obtenemos el mismo resultado: $x = 5/3$.

<u>Ejercicio 29</u>:

Dado $r > 0$, prueba que entre todos los números positivos x e y tales que $x^2 + y^2 = r$, la suma $x + y$ es máxima cuando $x = y$.

Como $x^2 + y^2 = r$ y nos dicen que $y > 0$, entonces: $y = \sqrt{r - x^2}$

Así, la suma es: $S = x + y = x + \sqrt{r - x^2}$

Tenemos que maximizar la función $S(x) = x + \sqrt{r - x^2}$:

$$S'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{r - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{r - x^2}} = \frac{\sqrt{r - x^2} - x}{\sqrt{r - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \quad \to \quad \sqrt{r - x^2} = x \quad \to \quad r - x^2 = x^2 \quad \to \quad r = 2x^2 \quad \to \quad x^2 = \frac{r}{2}$$

Como $x > 0 \quad \to \quad x = \sqrt{\frac{r}{2}}$

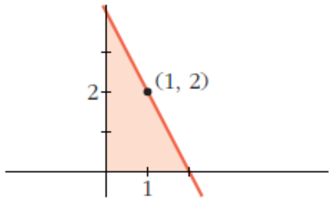
(En $x = \sqrt{\frac{r}{2}}$ hay un máximo, pues $S'(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $S'(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos y: $y = \sqrt{r - x^2} = \sqrt{r - \frac{r}{2}} = \sqrt{\frac{r}{2}}$

Por tanto, la suma es máxima cuando $x = y = \sqrt{\frac{r}{2}}$.

Ejercicio 30:

De todas las rectas que pasan por el punto (1, 2), encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.



Las rectas que pasan por el punto $(1, 2)$ son de la forma:

$$y = 2 + m(x - 1)$$

Hallamos los puntos de corte con los ejes de la recta:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 2 - m \rightarrow$ Punto $(0, 2 - m)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 1 - \frac{2}{m} \rightarrow$ Punto $\left(1 - \frac{2}{m}, 0\right)$

El área del triángulo es:

$$A(m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{m}\right)(2 - m) = \frac{1}{2}\left(2 - m - \frac{4}{m} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(4 - m - \frac{4}{m}\right)$$

Hallamos el mínimo de la función:

$$A'(m) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{4}{m^2}\right) = \frac{-m^2 + 4}{2m^2}$$

$$A'(m) = 0 \rightarrow -m^2 + 4 = 0 \left\langle \begin{array}{l} m = 2 \quad \text{(no vale)} \\ m = -2 \end{array} \right.$$

($m = 2$ no vale, pues no formará un triángulo en el primer cuadrante la recta con los ejes).

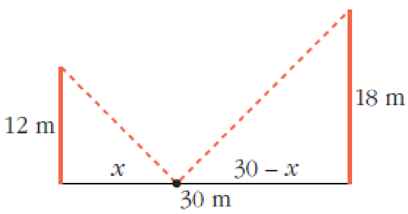
(En $m = -2$ hay un mínimo, pues $A'(m) < 0$ a la izquierda de ese valor y $A'(m) > 0$ a su derecha).

Por tanto, la recta es:

$$y = 2 - 2(x - 1); \text{ es decir: } y = -2x + 4$$

Ejercicio 31:

Dos postes de 12 y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?



La longitud total del cable es:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2}; \text{ es decir:}$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144}}{\sqrt{(x^2 + 144)(x^2 - 60x + 1\,224)}}$$

$$L'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} = -(x - 30)\sqrt{x^2 + 144}$$

$$x^2(x^2 - 60x + 1\,224) = (x - 30)^2(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8\,640x + 900x^2 + 129\,600$$

$$180x^2 + 8\,640x - 129\,600 = 0$$

$$x^2 + 48x - 720 = 0$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2\,304 + 2\,880}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{5\,184}}{2} = \frac{-48 \pm 72}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 12 \\ x = -60 \quad \text{(no vale)} \end{array} \right.$$

(En $x = 12$ hay un mínimo, pues $L'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $L'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto del suelo debe situarse a 12 m del poste de 12 m (y a 18 m del poste de 18 m).

<u>Ejercicio 31</u>:

Calcula el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

La pendiente de la recta tangente a $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en x es $f'(x)$. Tenemos que hallar el máximo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1 + x^2)^2 + 2x \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2(1 + x^2) + 8x^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$f'' > 0$ $\searrow$ $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ $f'' < 0$ $\searrow$ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ $f'' > 0$ $\nearrow$

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$$

En $x = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ hay un máximo (absoluto) de $f'(x)$ y en $x = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ hay un mínimo (absoluto) de $f'(x)$.

Por tanto, el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

Ejercicio 32:

Calcula, utilizando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites, que son del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$:

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2-3x-4}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{ln(e^x+x^3)}{x}$ c) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{1-cos\, x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$ e) $\lim_{x \to 0} \frac{arctg\, x - x}{x - sen\, x}$ f) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{sen\, x}}{1-cos\, x}$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{ln(cos\, 3x)}{x^2}$ h) $\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}}$ i) $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos^2(2x)}{3x^2}$

j) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x - sen\, x}{x\, sen\, x}\right)$

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2-3x-4} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2}{2x-3} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{ln(e^x+x^3)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3} = 1$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{1-cos\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{cos\, x}{sen\, x}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{cos\, x}{sen\, x} = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{cos\, x}{sen\, x} = +\infty$$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-2x}{(1 + x^2)^2}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}}{\cos x} = -2$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x} \cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-3 \operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-3 \operatorname{tg} 3x}{2x} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{-9(1 + \operatorname{tg}^2 3x)}{2} = -\frac{9}{2}$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1 + x}}{\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}} = \lim_{x \to 0} \frac{4\sqrt[4]{x}}{3(1 + x)} = 0$

i) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 (2x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos (2x) \operatorname{sen} (2x) \cdot 2}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 4x}{6x} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \cos 4x}{3} = \frac{4}{3}$

j) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = 0$

<u>Ejercicio 33</u>:

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \ln(\operatorname{tg} x)$

b) $\lim_{x \to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$

c) $\lim_{x \to \pi/2^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

d) $\lim_{x \to 0} (e^x + x^3)^{1/x}$

e) $\lim_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x}$

f) $\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{1 + x}{x}\right)$

g) $\lim_{x \to 0} (1 - \operatorname{sen} 2x)^{\operatorname{cotg} 3x}$

h) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$

a) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \ln(tg\, x) = (0 \cdot +\infty) = \lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \dfrac{\ln(tg\, x)}{\dfrac{1}{\cos x}} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \dfrac{\dfrac{1 + tg^2 x}{tg\, x}}{\dfrac{sen\, x}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \dfrac{1 + tg^2 x}{\dfrac{tg^2 x}{\cos x}} = \lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \dfrac{\cos x(1 + tg^2 x)}{tg^2 x} =$

$= \lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \left(\dfrac{1}{tg^2 x} + 1\right) = 0 \cdot 1 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + sen\, x)^{1/x}$. Tomamos logaritmos:

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(\cos x + sen\, x)^{1/x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x + sen\, x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-sen\, x + \cos x}{\cos x + sen\, x} = 1$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + sen\, x)^{1/x} = e$

c) $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} (tg\, x)^{\cos x}$. Tomamos logaritmos:

$\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \ln(tg\, x)^{\cos x} = \lim\limits_{x \to \pi/2^-} \cos x \cdot \ln(tg\, x) \overset{(*)}{=} 0$ $\quad$ (*)(ver apartado a))

Por tanto: $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} (tg\, x)^{\cos x} = e^0 = 1$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x^3)^{1/x}$. Tomamos logaritmos:

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(e^x + x^3)^{1/x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^x + x^3)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = 1$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x^3)^{1/x} = e$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x}$. Tomamos logaritmos:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + x)^{1/x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + x} = 0$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x} = e^0 = 1$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{1 + x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x =$

$= \ln\left[\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right] = \ln e = 1$

g) $\lim_{x \to 0} (1 - sen\ 2x)^{cotg\ 3x} = \lim_{x \to 0} (1 - sen\ 2x)^{1/tg\ 3x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x \to 0} \ln (1 - sen\ 2x)^{1/tg\ 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 - sen\ 2x)}{tg\ 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{-2\cos 2x}{1 - sen\ 2x}}{(1 + tg^2\ 3x)\cdot 3} = \frac{-2}{3}$$

Por tanto: $\lim_{x \to 0} (1 - sen\ 2x)^{cotg\ 3x} = e^{-2/3}$

h) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\ x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x \to 0} \ln \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\ x} = \lim_{x \to 0} tg\ x \ln \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} [tg\ x\,(-\ln x)] = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x\,(-\ln x)}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\ln x}{\dfrac{\cos x}{sen\ x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{-1}{x}}{\dfrac{-1}{sen^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\, sen\ x \cos x}{1} = 0$$

Por tanto: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\ x} = e^0 = 1$

Ejercicio 34:

Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1}$ **b)** $\lim_{x \to \pi/2} \frac{tg\ x - 8}{\sec x + 10}$ **c)** $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2}$

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{e^x} = 0$

b) $$\lim_{x \to \pi/2} \frac{tg\ x - 8}{\sec x + 10} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{sen\ x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{1}{sen\ x} = 1$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x + 2x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 2}{4} = \frac{3}{4}$$

Ejercicio 35:

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{sen\ x} - \frac{1}{x}\right)$ **b)** $\lim_{x \to \pi/4} \left(\frac{1}{\cos 2x} - \frac{tg\ x}{1 - (4x/\pi)}\right)$

c) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x - 1}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{sen\ x} - \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sen\ x}{x\ sen\ x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos\ x}{sen\ x + x\ cos\ x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{cos\ x + cos\ x - x\ sen\ x} = \dfrac{0}{2} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \left(\dfrac{1}{cos\ 2x} - \dfrac{tg\ x}{1 - (4x/\pi)} \right) = \lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - (4x/\pi) - tg\ x \cdot cos\ 2x}{(cos\ 2x)(1 - (4x/\pi))} =$

$= \lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{-4/\pi - \dfrac{cos\ 2x}{cos^2\ x} + 2\ tg\ x \cdot sen\ 2x}{-2\ sen\ 2x(1 - (4x/\pi)) + cos\ 2x \cdot (-4/\pi)} = \dfrac{2 - 4/\pi}{0}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to \pi/4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to \pi/4^+} f(x) = +\infty \quad \left(\text{siendo } f(x) = \dfrac{1}{cos\ 2x} - \dfrac{tg\ x}{1 - (4x/\pi)}\right).$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{e}{e^x - e} - \dfrac{1}{x - 1} \right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e \cdot x - e - e^x + e}{(e^x - e)(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e \cdot x - e^x}{(e^x - e)(x - 1)} =$

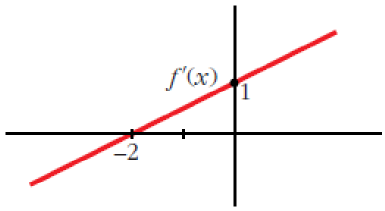
$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e - e^x}{e^x(x - 1) + (e^x - e)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-e^x}{e^x(x - 1) + e^x + e^x} = \dfrac{-e}{2e} = \dfrac{-1}{2}$

Ejercicio 36:

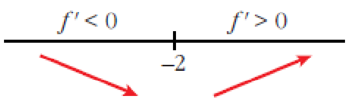
La gráfica adjunta corresponde a la función derivada, f', de una función f.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y di si tiene máximo o mínimo.

b) Estudia la concavidad y convexidad de f. ¿Tiene punto de inflexión?



a) Signo de la derivada:



$f'(-2) = 0$

Por tanto, la función f es decreciente en $(-\infty, -2)$

es creciente en $(-2, +\infty)$

tiene un mínimo en $x = -2$.

b) Como $f'(x)$ es una recta con pendiente $\dfrac{1}{2}$, entonces $f''(x) = \dfrac{1}{2} > 0$.

Por tanto, f es una función cóncava. No tiene puntos de inflexión.

Ejercicio 37:

Un polinomio de $3^{\underline{er}}$ grado $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un máximo relativo en el punto $x = p$. Ese máximo relativo, ¿puede ser máximo absoluto de la función? Razónalo.

Un polinomio de tercer grado *no* tiene máximo absoluto.

Veamos por qué:

- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a > 0$, entonces:

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow f(x)$ *no* tiene máximo absoluto.

- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a < 0$, entonces:

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \rightarrow f(x)$ *no* tiene máximo absoluto.