ANÁLISIS - EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA 2019-

Ejercicio 1: (2019)

Ejercicio 1.- Según un determinado modelo, la concentración en sangre de cierto medicamento viene dada por la función $C(t) = te^{-t/2}$ mg/ml, siendo t el tiempo en horas transcurridas desde que se le administra el medicamento al enfermo.

(a) [2 puntos] Determina, si existe, el valor máximo absoluto de la función y en qué momento se alcanza.

(b) [0,5 puntos] Sabiendo que la máxima concentración sin peligro para el paciente es 1 mg/ml, señala si en algún momento del tratamiento hay riesgo para el paciente.

Ejercicio 2: (2019)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Dado un número real $a > 0$, considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - ax$, y la recta $y = 2ax$. Determina a sabiendo que el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta anterior es 36.

Ejercicio 3: (2019)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dada $f\colon (1, e) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(x)$ (ln denota la función logaritmo neperiano), determina la recta tangente a la gráfica de f que tiene pendiente máxima.

Ejercicio 4: (2019)

Ejercicio 2.- Sea $f\colon \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea F la primitiva de f que cumple $F(0) = \dfrac{\pi}{3}$ y $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \pi$. Calcula:

(a) [1 punto] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3f(x) - \cos(x))\, dx$

(b) [1,5 puntos] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}(F(x))\, f(x)\, dx$

Ejercicio 5: (2019)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dada la función $f\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$, calcula sus máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la gráfica de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 6: (2019)

Ejercicio 2.- Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 8 & \text{si} \quad x \le 4 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

(a) [1,5 puntos] Calcula los puntos de corte entre la gráfica de f y la recta $y = 2x - 4$. Esboza el recinto que delimitan la gráfica de f y la recta.

(b) [1 punto] Calcula el área del recinto anterior.

Ejercicio 7: (2019)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{a\,x+b}{c\,x+1} \quad \text{para} \quad cx+1 \neq 0\,.$$

Determina a, b y c sabiendo que la recta $x=-1$ es una asíntota vertical a la gráfica de f y que $y=2\,x+4$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

Ejercicio 8: (2019)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -4x^2 + a$, siendo $a > 0$ un número real. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=0$. Calcula a sabiendo que el área del recinto es 18.

Ejercicio 9: (2019)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de f y la recta $y=0$.

Ejercicio 10: (2019)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,0)$.

Ejercicio 11: (2019)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se sabe que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) + ax + b & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

Ejercicio 12: (2019)

Ejercicio 2.- Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xe^{-x^2}$.

(a) **[1,25 puntos]** Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) **[1,25 puntos]** Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0,a]$ y el eje de abscisas.

Ejercicio 13: (2019)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^{-2\,x} - 2\,x}{\operatorname{sen}^2(x)}$

Ejercicio 14: (2019)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Calcula $\int \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) dx$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Ejercicio 15: (2019)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+2b & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

Ejercicio 16: (2019)

Ejercicio 2.- Sean las funciones $f,g\colon [0,\pi]\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=\operatorname{sen}(2x)$.

(a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

(b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{3}$.

Ejercicio 17: (2019)

Ejercicio 1.- Se considera la función $f\colon (-2\pi,2\pi)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{\cos(x)}{2+\cos(x)}$$

(a) [1,5 puntos] Calcula sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

(b) [1 punto] Halla sus máximos y mínimos relativos (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 18: (2019)

Ejercicio 2.- Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$ para $x\neq 1,-1$.

(a) [2 puntos] Halla todas las funciones primitivas de f.

(b) [0,5 puntos] Calcula la primitiva que pasa por $(2,0)$.

Ejercicio 19: (2019)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se sabe que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c\,,$$

tiene un punto de inflexión para $x=1$ y que la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en ese punto es $y=-6x+6$. Calcula a, b y c.

Ejercicio 20: (2019)

Ejercicio 2.- Considera las funciones $f,g\colon [-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\cos(x)$ y $g(x)=\operatorname{sen}(x)$.

(a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

(b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto delimitado por las gráficas de f y de g en el intervalo $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

Ejercicio 21: (2019)

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad \text{para} \quad x \neq -1.$$

(a) [1,5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Ejercicio 22: (2019)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Sea la función $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

Ejercicio 23: (2019)

Ejercicio 1.- Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-a)e^x$.

(a) [1,25 puntos] Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$.

(b) [1,25 puntos] Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Ejercicio 24: (2019)

Ejercicio 2.- Considera la funciones $f\colon (-2,+\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x+2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

(a) [1 punto] Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

(b) [1,5 puntos] Determina el área del recinto anterior.