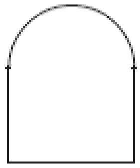
ANÁLISIS - EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA 2011-2014

Ejercicio 1: (2011)

Una ventana *normanda* consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo.



De entre todas las ventanas *normandas* de perímetro 10 m, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.

Ejercicio 2: (2011)

Calcula el valor de $b > 0$, sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = bx$ es de $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

Ejercicio 3: (2011)

Sea $f\colon \left[\frac{1}{e}, 4\right] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - \ln(x) + a & \text{si } \frac{1}{e} \le x \le 2 \\ bx + 1 - \ln(2) & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) Calcula los valores de a y b para que f sea derivable en el intervalo $\left(\frac{1}{e}, 4\right)$.

(b) Para $a = 0$ y $b = \dfrac{1}{2}$ halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 4: (2011)

Sea $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(1 - \ln(x))$, donde ln denota la función logaritmo neperiano. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $P(1, 1)$.

Ejercicio 5: (2011)

Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

Ejercicio 6: (2011)

Considera las funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$

(a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

(b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 7: (2011)

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$ para $x \neq 0$.

(a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

(b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 8: (2011)

Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

(b) Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$. Calcula el área de este recinto.

Ejercicio 9: (2011)

Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1,0), y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y = -3x + 3$.

Ejercicio 10: (2011)

Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = 4 - 3|x| \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2$$

(a) Esboza las gráficas de f y g. Determina sus puntos de corte.

(b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 11: (2011)

En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$. Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

Ejercicio 12: (2011)

Calcula:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$$

Ejercicio 13: (2011)

Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?

Ejercicio 14: (2011)

Calcula un número positivo a, menor que 2, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = \frac{1}{2}x^2$ y las dos rectas horizontales de ecuaciones $y = a$ e $y = 2$, tenga un área de $\frac{14}{3}$ unidades cuadradas.

Ejercicio 15: (2011)

En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, x, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2+70x$, mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están determinados por la expresión,

$$\frac{400x}{x-30}$$

Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.

Ejercicio 16: (2011)

Dada la función $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-2x^2+3x-1$

(a) Prueba que las rectas $y=-x+1$ e $y=3x-1$ son tangentes a su gráfica.

(b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y las rectas mencionadas en el apartado anterior.

Ejercicio 17: (2011)

Un alambre de 100 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

Ejercicio 18: (2011)

Determina la función $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=\dfrac{1}{x}$ y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,1)$.

Ejercicio 19: (2011)

Sea $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=4-x^2$

(a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.

(b) Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $x+2y-2=0$.

Ejercicio 20: (2011)

Calcula:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}dx$$

Ejercicio 21: (2011)

Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

Ejercicio 22: (2011)

Sea $f\colon (-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x+1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY y la recta $y=1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.

(b) Halla el área del recinto anterior.

Ejercicio 23: (2011)

Sea $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\sqrt{x-1}$. Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2,0)$. ¿Cuál es esa distancia?

Ejercicio 24: (2011)

Halla:

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx$$

Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=e^x$.

Ejercicio 25: (2012)

Sea la función $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $\left[\frac{1}{e},\ e\right]$.

(b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=e$.

Ejercicio 26: (2012)

Sean $f,g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=\cos(x)$ respectivamente.

(a) Realiza un esbozo de las gráficas de f y g en el intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 27: (2012)

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 2$.

(a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal.

Ejercicio 28: (2012)

Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\cos(x)$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(\pi,0)$.

Ejercicio 29: (2012)

Sea la función $f\colon [1,\ e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) Calcula los extremos absolutos y relativos de la función f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(c) Estudia los intervalos de concavidad y de convexidad.

Ejercicio 30: (2012)

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 4x$

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -x - 2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.

(c) Calcula el área del recinto anterior.

Ejercicio 31: (2012)

Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$

(a) Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

(b) Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

(c) Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Ejercicio 32: (2012)

Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$ respectivamente.

(a) Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

(b) Calcula el área de dicho recinto.

Ejercicio 33: (2012)

Sea la función continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Calcula el valor de k.

(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 34: (2012)

$$\text{Sea} \quad I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$$

(a) Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$

(b) Calcula el valor de I.

Ejercicio 35: (2012)

Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

(a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función f.

(b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Ejercicio 36: (2012)

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{9-x^2}{4}$

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $x+2y=5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

Ejercicio 37: (2012)

Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x-2)$

(a) Calcula las asíntotas de f.

(b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) Determina, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Ejercicio 38: (2012)

Sea f una función continua en el intervalo $[2,3]$ y F una función primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$. Calcula:

(a) $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_2^3 (5f(x)-7)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx$

Ejercicio 39: (2012)

Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a\cdot \operatorname{sen}(x) - xe^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.

Ejercicio 40: (2012)

Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

(a) Halla una primitiva de f.

(b) Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2, k]$ sea $\ln(2)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

Ejercicio 41: (2012)

Un alambre de longitud 2 metros se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Calcula las longitudes de dichos trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado resultantes sea mínima.

Ejercicio 42: (2012)

Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = 4x$, $y = 8 - 4x$ y la curva $y = 2x - x^2$.

(a) Realiza un esbozo de dicho recinto.

(b) Calcula su área.

Ejercicio 43: (2012)

Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

Ejercicio 44: (2012)

Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^4 f(x)\, dx = 27 - 8\ln(4)$$

Ejercicio 45: (2012)

Se considera la función derivable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{a}{x-2} & \text{si } x < 1 \\[2ex] a + \dfrac{b}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b.

Ejercicio 46: (2012)

Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(-1, 0)$.

Ejercicio 47: (2012)

De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.

Ejercicio 48: (2012)

Sean las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$ respectivamente.

(a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Realiza un esbozo del recinto que limitan.

(b) Calcula el área de dicho recinto.

Ejercicio 49: (2013)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

Ejercicio 50: (2013)

Ejercicio 2.-

a) **[2 puntos]** Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = (2x + 1)e^{-x}$ y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

b) **[0'5 puntos]** Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 51: (2013)

Ejercicio 1.- Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x^2}$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

a) **[1'75 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[0'75 puntos]** Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Ejercicio 52: (2013)

Ejercicio 2.- Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) **[0'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = 4$.

b) **[1'75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $x - 2y + 2 = 0$. Calcula el área de este recinto.

Ejercicio 53: (2013)

Ejercicio 1.- Sea g la función definida por $g(x) = \dfrac{mx^3}{(x-n)^2}$ para $x \neq n$.

a) **[1'75 puntos]** Halla m y n sabiendo que la recta $y = 2x - 4$ es una asíntota de la gráfica de g.

b) **[0'75 puntos]** Determina si la gráfica de g es simétrica respecto al origen.

Ejercicio 54: (2013)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en $x = 1$, que la gráfica tiene un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d.

Ejercicio 55: (2013)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de f tiene abscisa $x = 1$ y que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$ de valor -9. Calcula a, b y c.

Ejercicio 56: (2013)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5}\,dx$.

Ejercicio 57: (2013)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

Ejercicio 58: (2013)

Ejercicio 2.- Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = |x(x-2)| \quad \text{y} \quad g(x) = x + 4.$$

a) **[1'25 puntos]** Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) **[1'25 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 59: (2013)

Ejercicio 1.- Sea $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si} \quad x \leq 0, \\ a\sqrt{b - x} & \text{si} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$

a) **[1'5 puntos]** Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

b) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 60: (2013)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donde ln denota el logaritmo neperiano). Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Ejercicio 61: (2013)

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$ para $x>0, x\neq 1$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

a) **[1'25 puntos]** Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) **[1'25 puntos]** Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=e$.

Ejercicio 62: (2013)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Sea $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x}}.$$

Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto $P(1,0)$. *Sugerencia:* se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

Ejercicio 63: (2013)

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x\neq a$ y $x\neq \frac{1}{2}$.

a) **[1 punto]** Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x=2$ es una asíntota de dicha gráfica.

b) **[1'5 puntos]** Para $k=4$ y $a=2$, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Ejercicio 64: (2013)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Calcula $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{sen}(2x)\,dx.$

Ejercicio 65: (2013)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm. de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

Ejercicio 66: (2013)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Halla $\displaystyle\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\,dx$. *Sugerencia:* se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

Ejercicio 67: (2013)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y+x=-3$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x=1$.

Ejercicio 68: (2013)

Ejercicio 2.- Sea $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = |\ln(x)|$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

a) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.

b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto anterior.

Ejercicio 69: (2013)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

Ejercicio 70: (2013)

Ejercicio 2.- Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$ para $x \neq -1$.

a) [0'5 puntos] Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g.

b) [0'5 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.

c) [1'5 puntos] Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 71: (2013)

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ para $x \geq -1, x \neq 0$.

a) [1 punto] Calcula los límites laterales de f en $x = 0$.

b) [1'5 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Ejercicio 72: (2013)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}}\,dx$. *Sugerencia:* se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$.

Ejercicio 73: (2014)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

Ejercicio 74: (2014)

Ejercicio 2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) [0'75 puntos] Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = 3 - x$.

b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior.

Ejercicio 75: (2014)

Ejercicio 1.- Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

a) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 76: (2014)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Sea $f\colon(-1,3)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{x+9}{(x+1)(x-3)}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.

Ejercicio 77: (2014)

Ejercicio 1.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

a) **[1'75 puntos]** Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abscisa $x=\frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=0$ tenga por ecuación $y=5-6x$.

b) **[0'75 puntos]** Para $a=3$, $b=-9$ y $c=8$, calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 78: (2014)

Ejercicio 2.- Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por

$$f(x)=\frac{|x|}{2} \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

a) **[1 punto]** Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) **[1'5 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 79: (2014)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

Ejercicio 80: (2014)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Sea f la función definida por $f(x)=x\ln(x+1)$ para $x>-1$ (ln denota el logaritmo neperiano). Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.

Ejercicio 81: (2014)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-e^x+ax}{x\,\mathrm{sen}(x)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Ejercicio 82: (2014)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}dx.$$

Ejercicio 83: (2014)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Ejercicio 84: (2014)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx.$ (Sugerencia: integración por partes).

Ejercicio 85: (2014)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

Ejercicio 86: (2014)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{2x(x+\sqrt{x})}$. (Sugerencia: cambio de variable $t=\sqrt{x}$).

Ejercicio 87: (2014)

Ejercicio 1.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función derivable definida por

$$f(x)=\begin{cases} a-x & \text{si} \quad x\le 1 \\ \dfrac{b}{x}+\ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

donde ln denota el logaritmo neperiano.

a) [1'25 puntos] Calcula a y b.

b) [1'25 puntos] Para $a=3$ y $b=2$ calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 88: (2014)

Ejercicio 2.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^x\cos(x)$.

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

b) [1'5 puntos] Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,0)$.

Ejercicio 89: (2014)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).

Ejercicio 90: (2014)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Determina una función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f(1)=-1$ y que

$$f'(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{si} \quad x<0 \\ e^x-1 & \text{si} \quad x\ge 0. \end{cases}$$

Ejercicio 91: (2014)

Ejercicio 1.- Considera la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$$

a) [1'75 puntos] Calcula a y b.

b) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$.

Ejercicio 92: (2014)

Ejercicio 2.- Considera el recinto limitado por las siguientes curvas

$$y = x^2, \quad y = 2 - x^2, \quad y = 4.$$

a) **[1 punto]** Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

b) **[1'5 puntos]** Calcula el área del recinto.

Ejercicio 93: (2014)

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \ln x$ para $x > 0$ (ln denota el logaritmo neperiano).

a) **[1'75 puntos]** Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

b) **[0'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 94: (2014)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Calcula $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(4 - x)\,dx$ (ln denota el logaritmo neperiano).

Ejercicio 95: (2014)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Halla b, c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$.

Ejercicio 96: (2014)

Ejercicio 2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

a) **[0'5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

b) **[0'75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $2x + y - 7 = 0$ y el eje OX, calculando los puntos de corte.

c) **[1'25 puntos]** Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.