UNIDAD 0: **REPASO** (parte 2)

Contenido

1. INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Definición: Se llama **desigualdad** a toda relación entre expresiones numéricas o algebraicas unidas por uno de los cuatro signos de desigualdad, $<,\ >,\ \leq,\ \geq$

Por ejemplo: $4+6<10$ Falsa $1+4<8$ Verdadera

$(x-1)\cdot(x-2)\geq 0$ Tenemos que ver que valores de la incógnita la hacen verdadera. A esto se le llama inecuación

Definición: Se llama **inecuación** a aquellas desigualdades en las que se encuentra presente en uno cualquiera de los miembros, o en ambos, una o más variables, o incógnitas.

Ejemplos: Las siguientes desigualdades son inecuaciones

$4x-6<10$ $2x^4-x^2+3\geq 3$

Una inecuación se verifica sólo para algunos valores de las variables.

Los valores numéricos para los cuales se verifica la desigualdad son las soluciones de la misma.

Resolver una inecuación consiste en hallar los valores numéricos para los cuales la desigualdad es verdadera.

Definición: **Inecuaciones equivalentes** son aquellas que tienen las mismas soluciones.

Para hallar inecuaciones equivalentes debemos aplicar los Principios de Equivalencia:

- Si sumamos o restamos a los miembros de una inecuación una misma cantidad o expresión algebraica, la inecuación que resulta es equivalente a la dada. Es decir, podemos pasar términos de un miembro a otro simplemente cambiándole el signo, igual que en las ecuaciones

  Ejemplo: $\mathrm{x}-2\leq 3\mathrm{x}-5\Rightarrow \mathrm{x}-2-\mathrm{x}+5\leq 3\mathrm{x}-5-\mathrm{x}+5\Rightarrow 3\leq 2\mathrm{x}$

- Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una inecuación por una misma cantidad positiva y no nula, la inecuación que resulta es equivalente a la dada. Es decir, si tenemos un factor positivo en un miembro lo podemos pasar dividiendo o multiplicando al otro miembro de forma análoga a las ecuaciones

  Ejemplo: $3x+2\leq x-5\Rightarrow 3x-x\leq -5-2\Rightarrow 2x\leq -7\Rightarrow \frac{2x}{2}\leq\frac{-7}{2}\Rightarrow x\leq\frac{-7}{2}$

- Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una inecuación por una misma cantidad negativa, la inecuación que resulta es de sentido contrario a la dada. Análogo al anterior pero al ser negativo el factor hemos de cambiar de sentido a la desigualdad.

  Ejemplo: $-6x\leq x-21\Rightarrow -6x-x\leq -21\Rightarrow -7x\leq -21\Rightarrow \frac{-7x}{-7}\geq\frac{-21}{-7}\Rightarrow x\geq 3$

Definición: Una **inecuación de primer grado con una incógnita** es una inecuación que se puede transformar en otra equivalente de una de las siguientes formas:

$ax\leq b$	$ax\geq b$
$ax<b$	$ax>b$

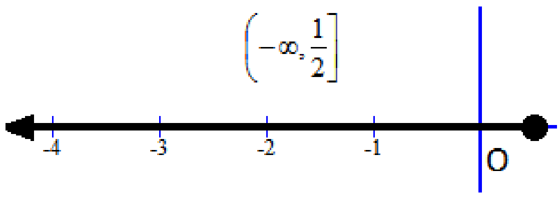
Para resolverlas hemos de seguir los pasos similares a las ecuaciones, obteniendo inecuaciones equivalentes y teniendo muy en cuenta que al multiplicar o dividir por un nº negativo hemos de cambiar el signo de la desigualdad.

Las soluciones de una inecuación suelen ser intervalos de números reales. Veamos con ejemplos cómo resolverlas:

Ejemplo: Resolver la inecuación $5x-2\le x$

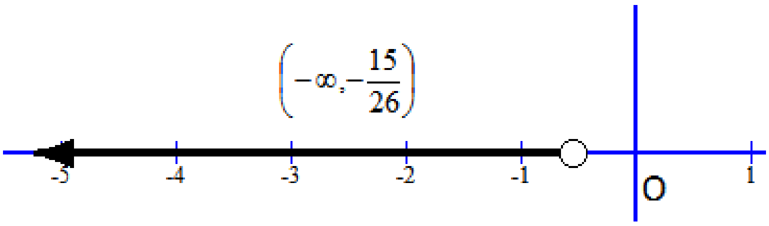
$5x-2\le x$ →(Trasponemos las *x* a un miembro y lo demás a otro) $5x-x\le 2$ → $4x\le 2$ →(Pasamos el 4 dividiendo, como es positivo no pasa nada en la desigualdad) $x\le\frac{2}{4}$ → (Simplificamos) $x\le\frac{1}{2}$ Las soluciones de la inecuación son todos los números reales menores o iguales que $\frac{1}{2}$, y eso lo ponemos así usando intervalos:

$\boxed{\text{Solución} = \left(-\infty,\frac{1}{2}\right]}$ y gráficamente sería:



Ejemplo: Resolver la inecuación $\frac{2}{5}x-1>3x+\frac{1}{2}$ → (Ponemos común denominador) $\frac{4}{10}x-\frac{10}{10}>\frac{30x}{10}+\frac{5}{10}$ → (Eliminamos el denominador) $4x-10>30x+5$ → (Trasponemos) $4x-30x>10+5$ → $-26x>15$ →(Como dividimos por (-26) cambiamos el sentido a la desigualdad) $x<\frac{15}{-26}$ → (Ponemos el signo en el lugar adecuado y ya tenemos la solución) $\boxed{x<-\frac{15}{26}}$

Solución = $\left(-\infty,-\frac{15}{26}\right)$ y gráficamente:



2. SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

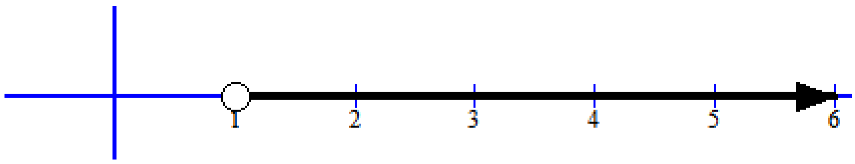
Vamos a limitarnos a sistemas de dos inecuaciones con una sola incógnita, que quedan reducidos a expresiones de la forma: $\boxed{\begin{cases} a_1x<b_1 \\ a_2x<b_2 \end{cases}}$

Veamos con ejemplos como se resuelven, que serán aquellos valores que verifican simultáneamente todas las inecuaciones:

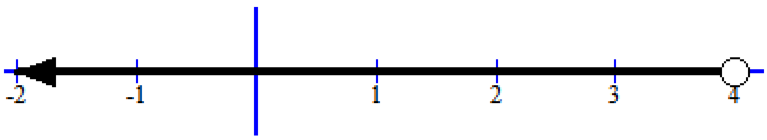
Ejemplo: Resolver $\begin{cases} \frac{2x-2}{5}+\frac{5-2x}{3}<1 \\ \frac{x+2}{3}-\frac{2x-3}{4}>\frac{3}{4} \end{cases}$ Lo primero es poner común denominador para eliminar denominadores →

$\begin{cases} \frac{3\cdot(2x-2)}{15}+\frac{5\cdot(5-2x)}{15}<\frac{15}{15} \\ \frac{4\cdot(x+2)}{12}-\frac{3\cdot(2x-3)}{12}>\frac{9}{12} \end{cases}$ → $\begin{cases} 6x-6+25-10x<15 \\ 4x+8-6x+9>9 \end{cases}$ → $\begin{cases} -4x<-4 \\ -2x>-8 \end{cases}$ →(aquí cambiamos de sentido las desigualdades pues en ambas dividimos por un nº negativo) $\begin{cases} x>1 \Rightarrow (1,+\infty) \\ x<4 \Rightarrow (-\infty,4) \end{cases}$. Nos salen dos intervalos y la solución es la intersección de ambos, lo vemos gráficamente:

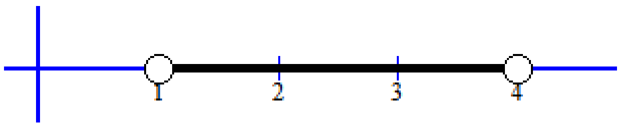
$(1,+\infty)$ →



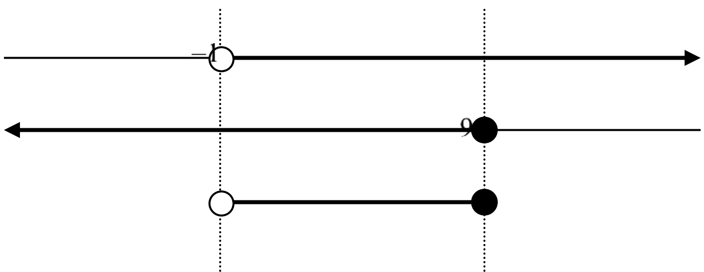
$(-\infty,4)$ →



La solución es el intervalo común: Solución = $(1,4)$



Ejemplo: Resolver $\begin{cases} x+2>1 \\ 2x-5\leq x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\leq 9 \end{cases}$, los intervalos de solución son $(-1,\infty)$ para la primera y $(-\infty,9]$ para la segunda. Luego la solución común a ambas está en la intersección de ambos, es decir, en $(-1,9]$, gráficamente tal



vez se vea mejor.

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases}(x-2)^2 > (x+3)^2 \\ (x-3)\cdot(x+3) \le (x-5)\cdot(x+6)\end{cases}$ →(operamos) $\begin{cases}x^2-4x+4 > x^2+6x+9 \\ x^2-9 \le x^2+x-30\end{cases}$ →

$\begin{cases}-10x > 5 \\ 21 \le x\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \\ x \ge 21 \Rightarrow [21,+\infty)\end{cases}$ Se puede observar fácilmente que no tienen ningún nº real en común, no hay números reales mayores o iguales que 21 y menores que -1/2

Diremos que no tiene solución el sistema.

Ejemplo: Resolver

$$3x < 2x+6 < 4x$$

En este caso tenemos una doble desigualdad que se transforma en un sistema de dos inecuaciones con dos incógnitas
$\begin{cases}3x < 2x+6 \\ 2x+6 < 4x\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x < 6 \\ -2x < -6\end{cases}$ →(ojo con los menos) $\begin{cases}x < 6 \Rightarrow (-\infty,6) \\ x > 3 \Rightarrow (3,+\infty)\end{cases}$

La solución es: Solución = $\boxed{(3,6)}$

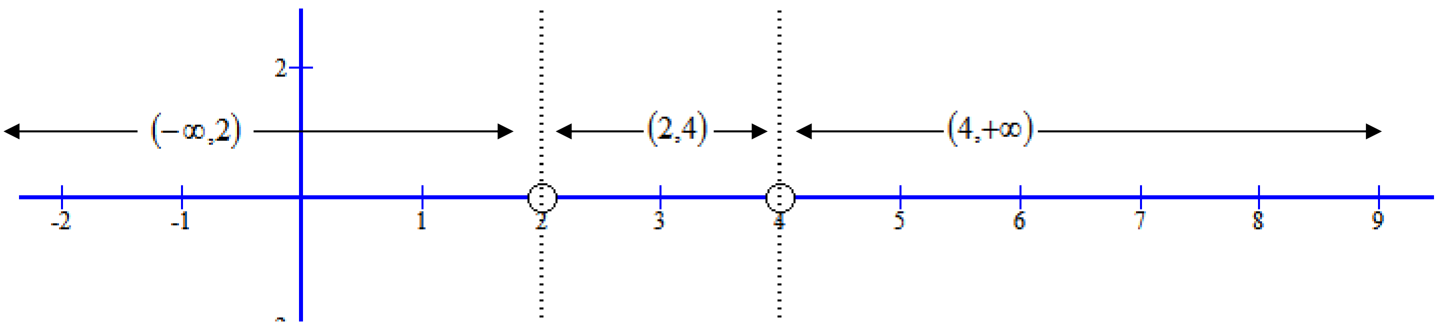
3. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA DE GRADO SUPERIOR A UNO

Son inecuaciones donde la incógnita tiene grado mayor a 1. Para resolverlas se calculan primero los valores que anulan a la expresión algebraica (polinomio) y estos valores dividen a la recta real en intervalos donde se mantiene constante el signo. Veamos con ejemplos como se resuelven:

Ejemplo: Resolver la inecuación $x^2-6x \ge -8$. Lo primero es dejar la inecuación con uno de los miembros a 0, así nos queda: $x^2-6x+8 \ge 0$. Consideremos el polinomio $P(x)=x^2-6x+8$ y veamos donde se anula:

$P(x)=x^2-6x+8=0 \Rightarrow \begin{cases}x=2 \\ x=4\end{cases}$ Estas dos soluciones nos dividen la recta real en tres intervalos, a saber:

$(-\infty,2)$, $(2,4)$ y $(4,+\infty)$. Nos fijamos que los intervalos siempre hemos de tomarlos abiertos, ya veremos más adelante que pasa con los extremos, en este caso el 2 y el 4



Ahora hemos de construir una tabla de signos, pues se cumple que en esos intervalos el signo del polinomio $P(x)=x^2-6x+8$ se mantiene constante, es decir, siempre es positivo o siempre es negativo. Por ello basta elegir un nº real que pertenezca a dichos intervalos y sustituir en el polinomio y el signo que obtengamos se mantiene en todo ese intervalo.

	$(-\infty,2)$	$(2,4)$	$(4,+\infty)$
$P(x)=x^2-6x+8$	Calculamos el valor para *x* = 0 que es de este intervalo y resulta $P(0)=+8$ que es positivo. Aquí todas la x van dar positivo **+**	Calculamos el valor para *x* = 3 que es de este intervalo y resulta $P(3)=9-18+8=-1$ que es negativo. Aquí todas la x van dar negativo **-**	Calculamos el valor para *x* = 5 que es de este intervalo y resulta $P(5)=25-30+8=+3$ que es positivo. Aquí todas la x van dar positivo **+**

No se pueden usar el 2 y el 4 pues al sustituir da 0 y este no tiene signo como sabemos. La inecuación que teníamos era $x^2-6x+8\geq 0$, es decir, las soluciones son aquellas que lo hacen positivo ó 0, luego son los intervalos $(-\infty,2)$ y $(4,+\infty)$, y además hemos de incluir el 2 y el 4 que lo hacen valer 0, por eso serán intervalos cerrados en el 2 y en el 4.

Por tanto concluimos que la solución es:

Solución $=(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$

NOTA:

En muchos libros y muchos profesores usan la descomposición en factores del polinomio para hacer la tabla de signos, que en este caso es $P(x)=x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$ y la tabla queda de la siguiente manera:

	$(-\infty,2)$	$(2,4)$	$(4,+\infty)$
$x-2$	Calculamos para *x* = 0 y sale -2 que es negativo **-**	Calculamos para *x* = 3 y sale 1 que es positivo **+**	Calculamos para *x* =5 y sale 3 que es positivo **+**
$x-4$	Calculamos para *x* = 0 y sale -4 que es negativo **-**	Calculamos para *x* = 3 y sale -1 que es negativo **-**	Calculamos para *x* = 5 y sale 1 que es positivo **+**
$P(x)=(x-2)(x-4)$	**(-)·(-) = +**	**(+)·(-) = -**	**(+)·(+) = +**

En la última fila multiplicamos los signos correspondientes a cada factor y sale como vemos el mismo resultado.

Ejemplo: Resolver $9-x^2>0$

Vemos donde se anula el polinomio $P(x)=9-x^2=0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$. Nos vuelven a salir 3 intervalos y hacemos la tabla de signos:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,+\infty)$
$P(x)=9-x^2$	Calculamos el valor para *x* = -4 que es de este intervalo y resulta $P(-4)=-7$ que es negativo. Aquí todas la x van dar negativo **-**	Calculamos el valor para *x* = 0 que es de este intervalo y resulta $P(3)=9$ que es positivo. Aquí todas la x van dar positivo **+**	Calculamos el valor para *x* = 4 que es de este intervalo y resulta $P(0)=-7$ que es negativo. Aquí todas la x van dar negativo **-**

En esta inecuación el signo de desigualdad es mayor estricto ($9-x^2>0$), por tanto los extremos, el 3 y el -3 no son soluciones pues son los que hacen que valga 0.

Concluimos que las soluciones son: Solución $=(-3,3)$

Ejemplo: Resolver $x^3-2x^2\leq -x^2+2x$

Operamos para dejar un miembro a 0 $\rightarrow x^3-x^2-2x\leq 0$

Vemos donde se anula el polinomio asociado$\rightarrow P(x)=x^3-x^2-2x=0 \rightarrow x\cdot(x^2-x-2)=0 \rightarrow$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases} \end{cases}$$

En este caso al tener 3 soluciones en la ecuación nos aparecen 4 intervalos, que son $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,2)$ y $(2,+\infty)$. Pasamos ya a construir la tabla de signos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$P(x)=x^3-x^2-2x$	Calculamos el valor para *x* = -2 que es de este intervalo y resulta $P(-2)=-8$ que es negativo. **-**	Calculamos el valor para *x* = $-\frac{1}{2}$ que es de este intervalo y resulta $P(-\frac{1}{2})=\frac{5}{8}=0{,}625$ que es positivo. **+**	Calculamos el valor para *x* = 1 que es de este intervalo y resulta $P(1)=-2$ que es negativo **-**	Calculamos el valor para *x* = 3 que es de este intervalo y resulta $P(3)=12$ que es positivo **+**

La inecuación era $x^3 - x^2 - 2x \le 0$, por tanto las soluciones son donde sale negativo e incluyendo los extremos pues se trata de un menor o igual, así: Solución $= (-\infty,-1] \cup [0,2]$

En este ejemplo, quizás hubiese sido mejor aplicar la descomposición en factores pues no tenemos que operar con potencias cúbicas ni cuadradas y nos limitamos al final a un producto de signos. Al descomponer en factores el polinomio nos queda la inecuación $x \cdot (x+1) \cdot (x-2) \le 0$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
x	—	—	+	+
$x+1$	—	+	+	+
$x-2$	—	—	—	+
Producto	—	+	—	+

Ejemplo: Resolver $x^2 - 5x + 8 \ge 0$

En este caso intentamos resolver la ecuación asociada $x^2 - 5x + 8 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{-7}}{2}$ que como observamos no tiene solución. Entonces no tenemos intervalos donde ver el signo. El signo se mantiene constante en toda la recta real, y la tabla queda:

	$IR = (-\infty,+\infty)$
$x^2 - 5x + 8$	Probando con *x* = 0 resulta +8 que es positivo **+**

La solución es toda la recta real: Solución = $\mathbb{R}$

Ejemplo: Resolver $x^2 - 5x + 8 \le 0$

Este ejemplo es similar al anterior pero aquí no tiene solución como se puede ver fácilmente, como el hecho en el ejemplo anterior, pues aquí las soluciones serían los negativos.

4. INECUACIONES RACIONALES

Son inecuaciones donde aparece alguna fracción algebraica

Son del tipo $\dfrac{ax+b}{cx+d} \le 0$ o con los otros signos de desigualdad $\ge, <, >$. Pueden ser también el numerador y el denominador de grado mayor a 1.

Método de resolución: Descomponer factorialmente los polinomios numerador y denominador conociendo sus raíces. Posteriormente se procede como con las inecuaciones de grado mayor que uno, ya que se trata en el fondo de averiguar el signo final que va a tener un cociente de polinomios.

Veamos ejemplos resueltos:

<u>*Ejemplo*</u>: Resolver $\frac{x}{x-3} \leq 0$ Vemos donde se anulan el numerador y el denominador $\begin{cases} x = 0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$

Nos salen dos valores luego tenemos 3 intervalos:

En la tabla de signos podemos hacerlo todo junto o bien separar los signos del numerador y el denominador y después dividirlos. Vamos a hacerlo así ahora:

	$(-\infty,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
x	**-**	**+**	**+**
$x-3$	**-**	**-**	**+**
$\frac{x}{x-3}$	$\frac{-}{-}=$ **+**	$\frac{+}{-}=$ **-**	$\frac{+}{+}=$ **+**

Por último, nos queda ver si los extremos entran o no.

En $x=0$ al ser del numerador, hace que la fracción valga $\frac{0}{0-3}=0$ que tiene sentido al ser la desigualdad menor o igual. Luego $x=0$ es solución	En $x=3$ al ser del denominador, hace que la fracción valga $\frac{3}{3-3}=\frac{3}{0}$ que no tiene sentido pues no se puede dividir por 0. Luego $x=3$ no es solución

Con ello, deducimos que: Solución = $[0,3)$

<u>*Ejemplo*</u>: Resolver la inecuación $\frac{x+2}{x^2-x} > 0$

Vemos donde se anulan numerador y denominador: $\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x^2-x=0 \Rightarrow x\cdot(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$

Tenemos entonces 4 intervalos de posibles soluciones:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$x+2$	Con x = -3 sale **-**	Con x = -1 sale **+**	Con x = 0,5 **+**	Con x = 2 **+**

$x^2 - x$	Con x = -3 sale **+**	Con x = -1 sale **+**	Con x = 0,5 **-**	Con x = 2 **+**
$\dfrac{x+2}{x^2-x}$	$\dfrac{-}{+} =$ **-**	$\dfrac{+}{+} =$ **+**	$\dfrac{+}{-} =$ **-**	$\dfrac{+}{+} =$ **+**

Por último, los números que anulan el denominador, el 0 y el 1, no son soluciones puesto que no se puede dividir por 0.

Los números que anulan el numerador, en este caso el 2, puede ser solución, pero no lo es pues es una desigualdad estricta (mayor estricto).

Por tanto las soluciones son: $\boxed{\text{Solución } = (-2,0)\cup(1,+\infty)}$

5. INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Una inecuación de primer grado con dos incógnitas es una inecuación que en forma reducida se puede expresar de la siguiente forma:

$$a{\cdot}x + b{\cdot}y > c \quad \text{ó} \qquad a{\cdot}x + b{\cdot}y < c \quad \text{ó} \qquad a{\cdot}x + b{\cdot}y \leq c \quad \text{ó} \qquad a{\cdot}x + b{\cdot}y \geq c$$

Para resolver este tipo de inecuaciones debemos saber representar rectas en el plano haciendo una pequeña tabla de valores.

El proceso es el siguiente:

- Representamos gráficamente la función lineal o afín $a{\cdot}x + b{\cdot}y = c$ cuya gráfica es una recta. Lo habitual es hacer una tabla de valores.
- La recta anterior divide al plano en dos semiplanos. Uno de esos semiplanos es el conjunto solución, para saber cuál es, se toma un punto de uno de ellos y se comprueba si verifica la inecuación. Si la verifica, el semiplano que contiene a ese punto es solución, y si no la verifica, el otro semiplano es solución.
- Por último queda ver si la frontera de separación entre los dos semiplanos es parte de la solución o no. En las inecuaciones con desigualdad estricta (< ó >), la frontera no es solución. En los casos $\leq$ ó $\geq$ la frontera si es parte de la solución.

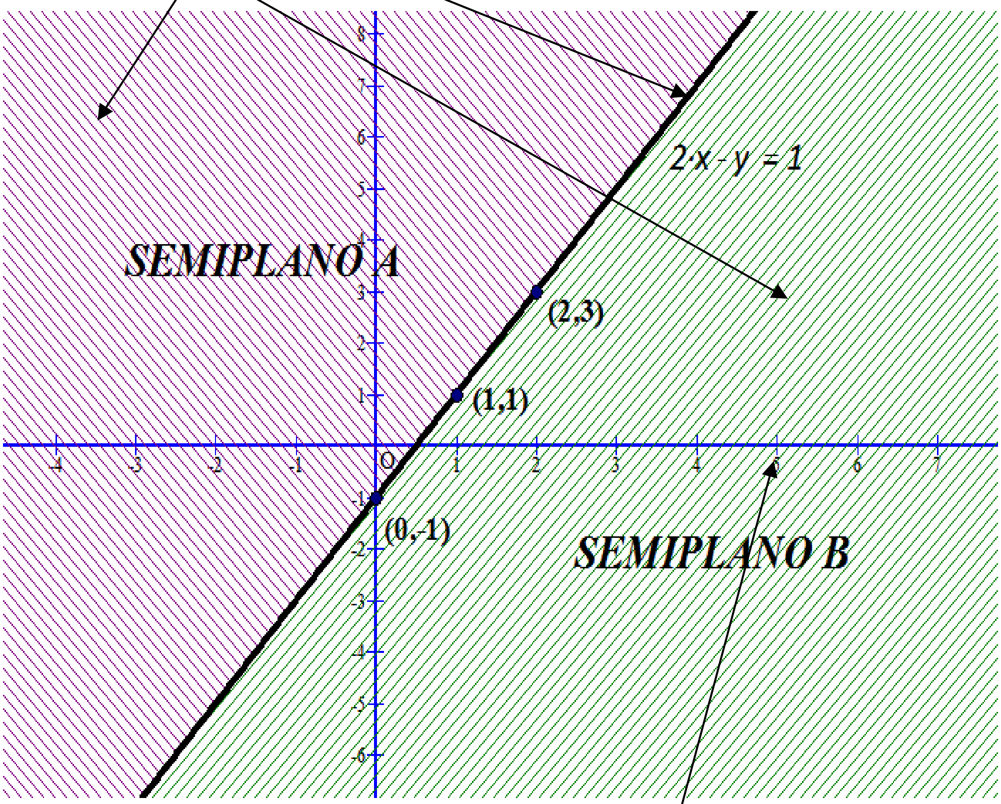
Aquí la solución se tiene que dar de forma gráfica. Veamos con ejemplo como aplicar lo dicho.

__Ejemplo__: Resolver la inecuación $2x - y < 1$

Representamos la recta $2x - y = 1$ haciendo una tabla de valores:

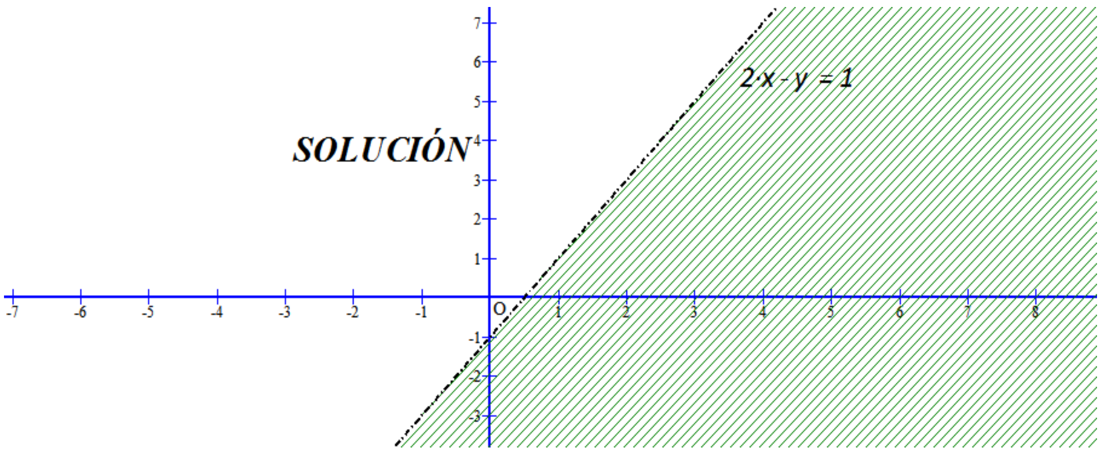
x	1	0	2
y	1	-1	3

En el dibujo se observan los semiplanos y la frontera (que es la recta en sí):



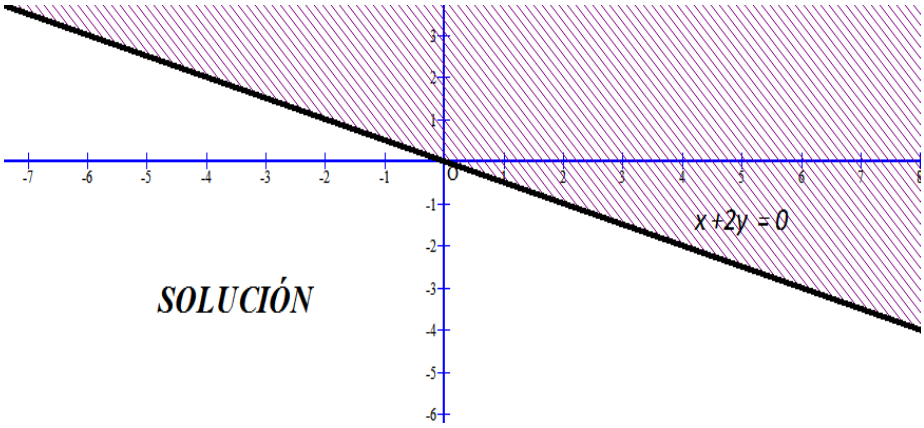
Para ver que semiplano es solución, vamos por ejemplo a tomar el punto $P(5,0)$ que es un punto del semiplano B y sustituimos en la inecuación "x" por 5 e "y" por 0 para comprobar si la verifica o no.

$2\cdot5-0<1\Rightarrow10<1$ Lo que es obviamente falso, por tanto, el semiplano solución es el A y además no entra la frontera pues es un menor estricto.



Ejemplo: Resolver $x+2y\leq0$

Os dejo la solución, y tened en cuenta que en este caso la frontera entra.



6. SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Un *sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas* es un conjunto de inecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y \leq c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y > c_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n \cdot x + b_n \cdot y < c_n \end{cases}$$

(los signos de desigualdad pueden variar)

El conjunto solución está formado por todos aquellos valores que verifican simultáneamente todas las inecuaciones. Suele ser una región del plano que se denomina *región factible*

Para resolverlo procedemos de la siguiente manera:

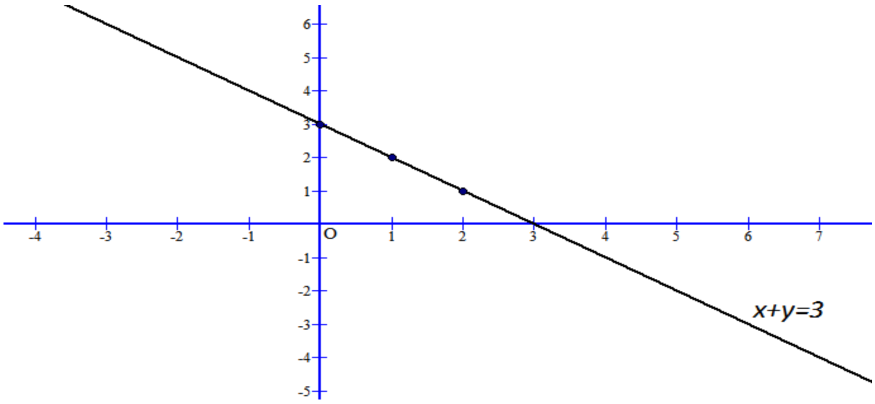
- Resolvemos cada inecuación como hemos visto en el punto 5), y sombreamos o rayamos el semiplano que NO es solución.
- Una vez hecho lo anterior con todas las inecuaciones, nos queda en blanco la región factible.
- Muchas veces hay que calcular o nos piden que calculemos los vértices de la región factible, que lo haremos intersectando las rectas que lo determinan

Veamos con ejemplos como se procede.

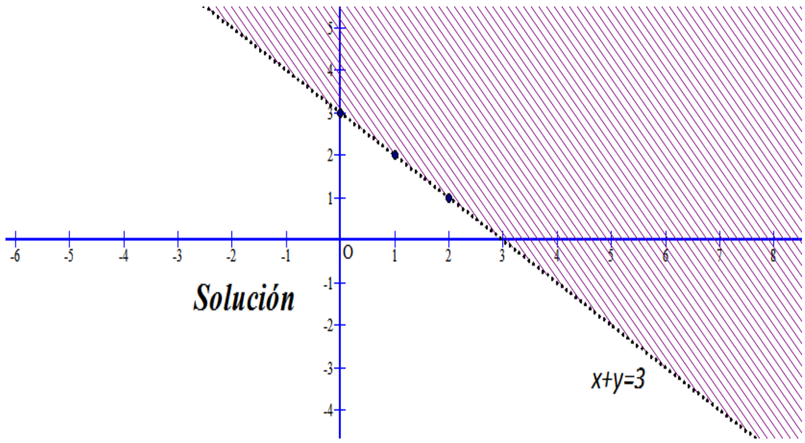
Ejemplo: Resuelve el sistema de inecuaciones siguiente $\begin{cases} x+y<3 \\ y-3 \leq 3x \end{cases}$

Empezamos con la primera inecuación. Dibujamos la recta $x+y=3$ haciendo una tabla de valores

x	1	0	2
y	2	3	1



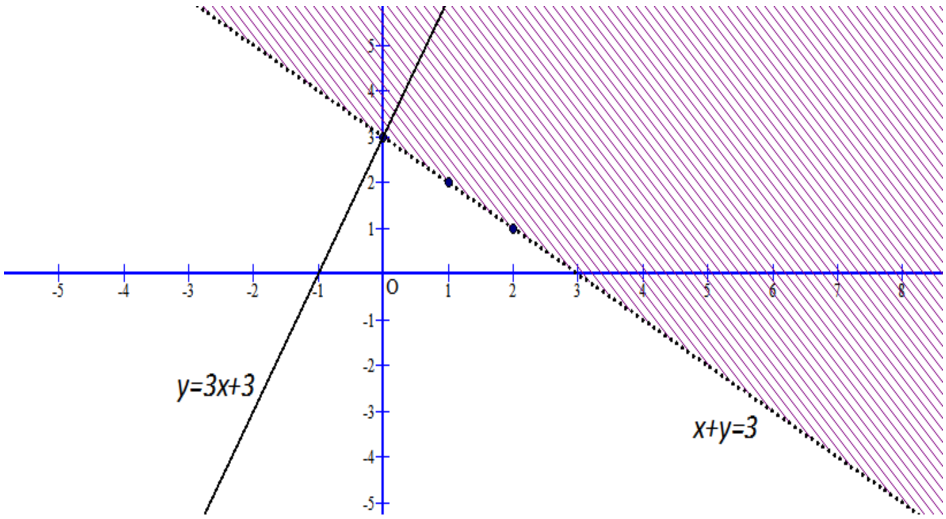
Probamos con el $O(0,0)$ en la inecuación para ver el semiplano solución→ $0+0<3$ Lo cual es cierto, por tanto tenemos en esta primera inecuación la siguiente región solución y además como es menor estricto la frontera, es decir, la recta no entra.



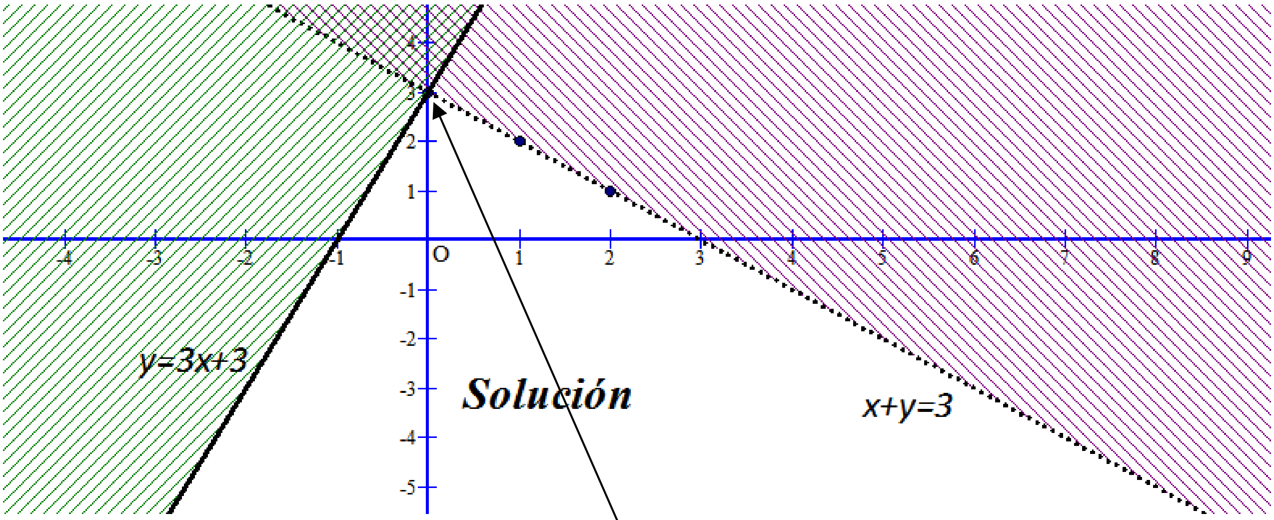
Sobre la misma gráfica vamos a resolver la segunda inecuación: $y-3\leq 3x$

Dibujamos la recta $y-3=3x \Rightarrow y=3x+3$ haciendo la tabla de valores

x	-1	0
y	0	3



Probamos también con el punto O(0,0) por ser el más cómodo en la inecuación: $0-3\leq 3\cdot 0 \Rightarrow -3\leq 0$ lo cual es cierto luego el semiplano solución es donde se encuentra el punto O(0,0) y rayamos el otro. Además aquí entra el borde o frontera al ser menor o igual. La región factible o solución es la región blanca del dibujo siguiente:



A veces es necesario calcular los vértices de la región, para ello se resuelve el sistema de ecuaciones dado por las dos rectas que lo determina. En este ejemplo sólo hay un vértice y se calcula resolviendo $\begin{cases} x+y=3 \\ y-3=3x \end{cases}$, que como se ve en el dibujo anterior tiene que salir $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ que nos da el punto A(0,3)

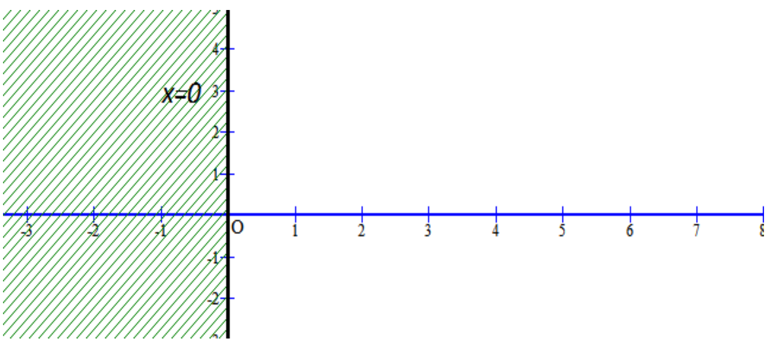
__Ejemplo__: Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 6x+5y\leq 30 \\ x+2y\leq 8 \end{cases}$

Procedemos igual que antes:

- Dibujamos $x=0$ con su tabla de valores. Si nos fijamos, es el eje OY o de ordenadas (el vertical)

x	0	0
y	1	3

Probamos con el (1,1) y lo verifica, por tanto nos queda

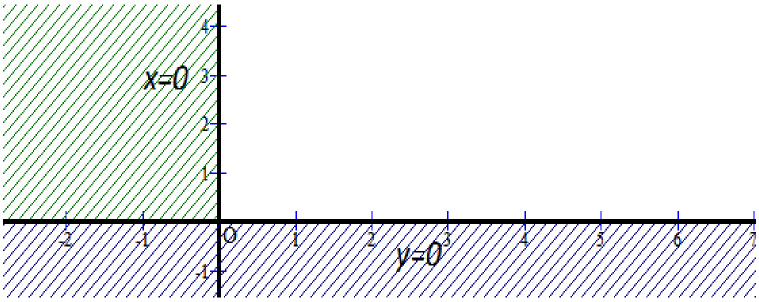


- Dibujamos $y=0$ con su tabla de valores. Si nos fijamos, es el eje OX o de abscisas (el horizontal)

x	0	1
y	0	0

Probamos con el (1,1) y lo verifica, por tanto nos queda

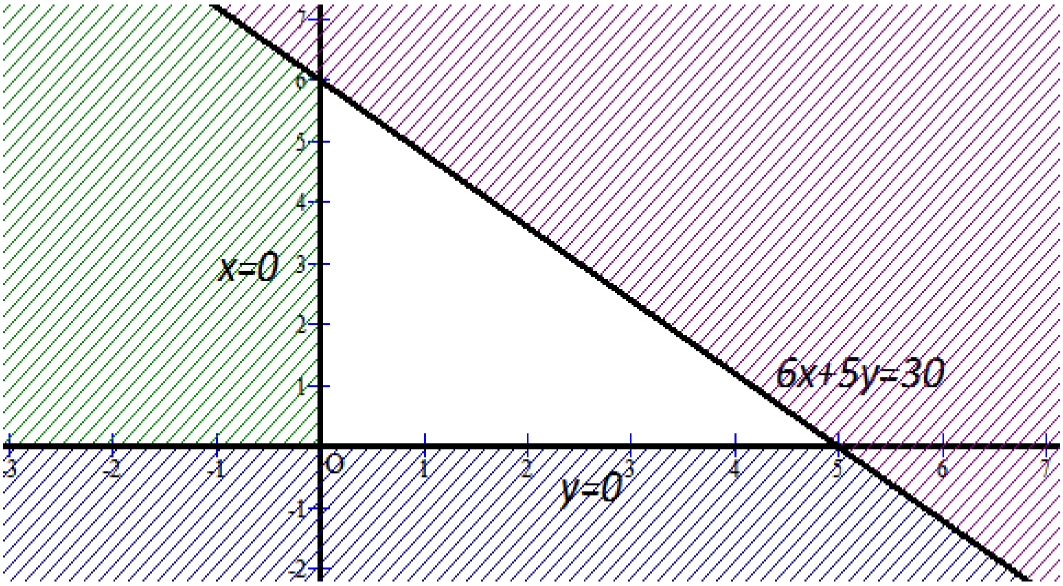
-



- Dibujamos $6x+5y=30$ con su tabla de valores.

x	5	0
y	0	6

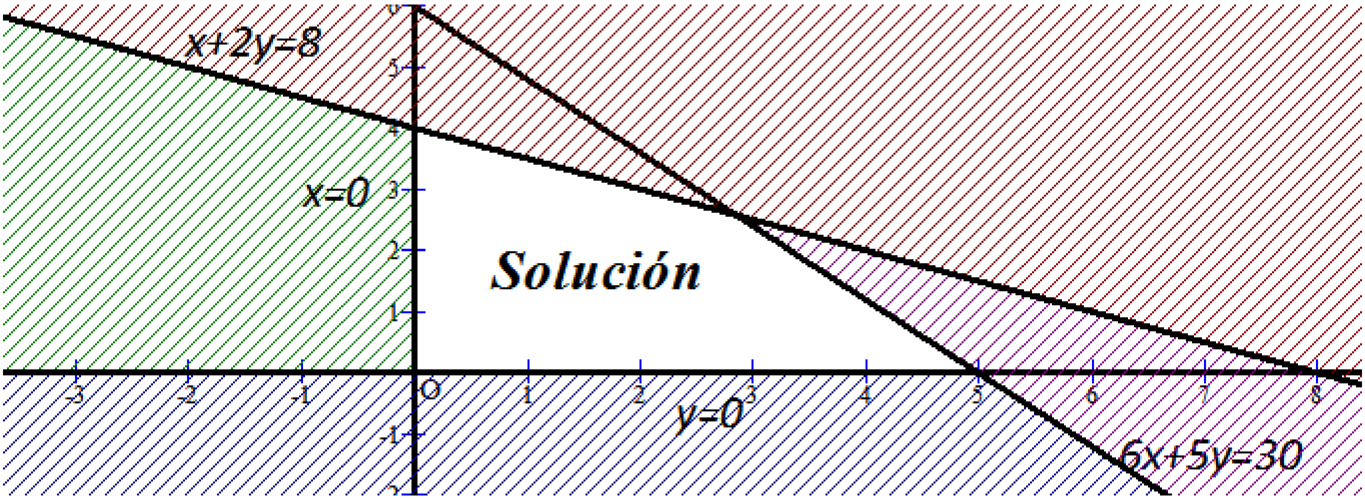
Probamos con el (0,0) y lo verifica, por tanto nos queda



- Dibujamos $x+2y=8$ con su tabla de valores.

x	0	8
y	4	0

Probamos con el $O(0,0)$ y lo verifica, por tanto nos queda



Donde se observa la región factible de este sistema. Y como no había ninguna desigualdad estricta, todos los bordes entran.

7. LOGARITMO DE UN NÚMERO

Consideremos la ecuación: $2^x = 8$.

Como vemos la incógnita está en el exponente, lo que la hace diferente a todos los tipos vistos hasta ahora. "x" es el exponente al que tenemos que elevar 2 para que de cómo resultado 8.

En matemáticas diremos que "x" es el logaritmo en base 2 de 8

En este ejemplo es fácil ver que $x = 3$ pues $2^3 = 8$

<u>*Definición*</u>: Llamamos <u>*logaritmo*</u> en base un nº real "a"(positivo y distinto de 1) de un nº real "b" (positivo) como el exponente al que tenemos que elevar "a" para que de cómo resultado "b".

Matemáticamente se representa así: $$\log_a b = z \Leftrightarrow a^z = b$$

Veamos ejemplos para entenderlo mejor:

<u>*Ejemplos*</u>:

a) $\log_2 16 = z \Leftrightarrow 2^z = 16 \Leftrightarrow 2^z = 2^4 \Leftrightarrow z = 4$ Por tanto concluimos que $\log_2 16 = 4$	d) $\log_2 \sqrt{2} = z \Leftrightarrow 2^z = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^z = 2^{\frac{1}{2}}$ $\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$ Por tanto concluimos que $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$
b) $\log_3 243 = z \Leftrightarrow 3^z = 243 \Leftrightarrow 3^z = 3^5$ $\Leftrightarrow z = 5$ Por tanto concluimos que $\log_3 243 = 5$	e) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = z \Leftrightarrow 3^z = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^z = 3^{-2}$ $\Leftrightarrow z = -2$ Por tanto concluimos que $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$

c) $\log_{10}100 = z \Leftrightarrow 10^z = 100 \Leftrightarrow 10^z = 10^2$ $\Leftrightarrow z = 2$ Por tanto concluimos que $\log_{10}100 = 2$	f) $\log_7 1 = z \Leftrightarrow 7^z = 1 \Leftrightarrow 3^z = 7^0 \Leftrightarrow z = 0$ Por tanto concluimos que $\log_7 1 = 0$

<u>Propiedades inmediatas de los logaritmos</u>:

- El logaritmo en cualquier base del nº 1 es 0

  $\log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$

- El logaritmo en cualquier base de la base es 1

  $\log_a a = 1$ pues $a^1 = a$

- El logaritmo en cualquier base de un nº que sea una potencia de la base es el exponente de dicha potencia

  $\log_a a^p = p$ que resulta evidente

- Sólo tienen logaritmos los números positivos, pues como sabemos el resultado de una potencia siempre es positivo. No tiene sentido, por ejemplo, $\log_2(-4)$, no existe

<u>Logaritmos decimales</u>

Se llaman logaritmos decimales a aquellos cuya base es 10. También se les conoce como vulgares y en su representación no se pone la base 10, por tanto se notan $\log x$.

<u>Ejemplos</u>:

a) $\log 100 = 2$

b) $\log \sqrt[4]{1000000} = \log 10^{\frac{6}{4}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

c) $\log 0{\acute{}}0001 = \log 10^{-4} = -4$

Estos logaritmos se pueden obtener con la calculadora, usando la tecla LOG que aparece en ella

<u>Ejemplos</u>:

a) $\log 3 = 0{\acute{}}4777121...$

b) $\log 254 = 2{\acute{}}404833...$

c) $\log \sqrt{805} = 1{\acute{}}452897...$

d) $\log(-100) = Error$ No existes logaritmos de números negativos

<u>Logaritmos neperianos</u>

El nº irracional $e = 2{\acute{}}71828182\ldots$ se usa muy a menudo como base de logaritmos.

Se llaman logaritmos neperianos a aquellos cuya base es e . También se les conoce como naturales y su representación es $\ln x$ ó $L\,x$

Habitualmente habrá que obtenerlos mediante la calculadora usando la tecla correspondiente $\ln$ ó L según el modelo de calculadora.

Ejemplos:

a) $\ln 3 = 1'098612..$

b) $L\sqrt{e} = L\, e^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\ln 179'28 = 5'188948..$

8. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

a) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$\log_a(m\cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Ejemplo: Obtener sin calculadora

$$\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6(4\cdot 9) = \log_6 36 = 2$$

Ejemplo: Sabiendo que $\log_5 x = 3'4$ obtener sin calculadora $\log_5 5x$

Como $\log_5 5x = \log_5 5 + \log_5 x = 1 + 3'4 = 4'4$

b) El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y del divisor

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

Ejemplo: Obtener sin calculadora

$$\log_2 6 - \log_2 48 = \log_2\left(\frac{6}{48}\right) = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 2^{-3} = -3$$

c) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base

$$\log_a m^n = n\cdot\log_a m$$

Ejemplo: Calcular

$$\ln\left(\frac{e}{\sqrt[5]{e^2}}\right) = \ln\left(\frac{e}{e^{\frac{2}{5}}}\right) = \ln e^{\left(1-\frac{2}{5}\right)} = \ln e^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}\cdot\ln e = \frac{3}{5}\cdot 1 = \frac{3}{5}$$

d) El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz

$$\log_a \sqrt[n]{m} = \frac{\log_a m}{n}$$

Ejemplo: Calcular

$$\log\sqrt[6]{12} = \frac{\log 12}{6} = 0\'179863...$$

e) Relación entre logaritmos de distintas bases

El logaritmo en base *a* de un número se puede transformar en el logaritmo de otra base *b* cualquiera mediante la expresión:

$$\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$$

Ejemplo: Obtén con la calculadora de dos formas distintas $\log_{11} 29$:

Pasando a logaritmo decimal: $\log_{11} 29 = \frac{\log 29}{\log 11} = \frac{1\'4623...}{1\'01413...} = 1\'40427...$

Pasando a logaritmo neperiano: $\log_{11} 29 = \frac{\ln 29}{\ln 11} = \frac{3\'3672...}{2\'3978...} = 1\'40427...$

9. ECUACIONES EXPONENCIALES

Una ecuación es **exponencial** cuando la incógnita aparece en el exponente de una potencia

Como ejemplos son ecuaciones exponenciales las siguientes.

$3^{2x-1} = 1$; $\qquad 2^x - 2^{x+1} = -2$

No hay un procedimiento general para resolver este tipo de ecuaciones, sólo con la práctica aprenderemos a resolverlas.

Ejemplo: Resuelve

$4\cdot 3^{2x-1} = 36 \Rightarrow 3^{2x-1} = \frac{36}{4} \Rightarrow 3^{2x-1} = 9 \Rightarrow 3^{2x-1} = 3^2 \Rightarrow$ (igualamos exponentes)

$2x - 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Ejemplo: Resuelve

$5^x = 12$ Si nos fijamos *x* es el exponente al cual tenemos que elevar 5 para que de 12, es decir, *x* es el logaritmo en base 5 de 12 $\Rightarrow x = \log_5 12 \Rightarrow$ Hacemos un cambio a base decimal para poder usar la calculadora

$x = \frac{\log 12}{\log 5} \Rightarrow x = 1\'54396$

NOTA: De forma general, si tenemos una ecuación exponencial del tipo $a^x = m \Rightarrow x = \log_a m$ por la propia definición de logaritmo.

Ejemplo: Resuelve

$3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 13 \Rightarrow$ Transformamos la ecuación para que 3^x aparezca sólo

$3^x + \frac{3^x}{3} + \frac{3^x}{3^2} = 13 \Rightarrow 3^x + \frac{3^x}{3} + \frac{3^x}{9} = 13$ Ahora hacemos lo que se llama un cambio de variable $\boxed{z = 3^x}$

Con lo cual sustituyendo en la ecuación nos queda otra más fácil de resolver $z + \frac{z}{3} + \frac{z}{9} = 13 \Rightarrow$ Hacemos común denominador y operamos $\frac{9z + 3z + z}{9} = \frac{117}{9} \Rightarrow 13z = 117 \Rightarrow z = 9$

Por último deshacemos el cambio y resolvemos: $z = 3^x \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

Ejemplo: Resuelve

$4^x = 2^{x+2} + 32 \Rightarrow$ Transformamos la ecuación para que 2^x aparezca sólo, nos queda:

$\left(2^2\right)^x = 2^{x+2} + 32 \Rightarrow \left(2^x\right)^2 = 2^x \cdot 2^2 + 32 \Rightarrow$ Hacemos el cambio $\boxed{z = 2^x}$ y sustituyendo nos queda:

$z^2 = z \cdot 4 + 32 \Rightarrow z^2 - 4z - 32 = 0 \Rightarrow z = \frac{4 \pm 12}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 8 \\ z_2 = -4 \end{cases}$ Deshacemos los cambios para cada solución

- Si $z_1 = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 3}$ es una solución de la ecuación exponencial
- Si $z_1 = -4 \Rightarrow 2^x = -4 \Rightarrow x = \log_2(-4)$, que como sabemos no existe pues no hay logaritmos de números negativos o cero

10. SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES

Un sistema de ecuaciones es exponencial si al menos una de sus ecuaciones es exponencial.

No existen métodos fijos de resolución, la práctica nos aportará la experiencia para resolverlos.

Ejemplo: Resuelve $\begin{cases} 2^x \cdot 2^{2y} = 32 \\ \dfrac{2^{3x}}{2^{5y}} = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+2y} = 2^5 \\ 2^{3x-5y} = 2^4 \end{cases} \Rightarrow$ (igualamos exponentes) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases} \Rightarrow$ Se resuelve por el método que queramos y la solución es $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

__Ejemplo__: Resuelve $\begin{cases} 3\cdot 5^x + 2\cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15\cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$

Operamos para dejar preparado el sistema sólo con 5^x y $6^y \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 5^x + 2\cdot 6^y \cdot 6 = 807 \\ 15\cdot 5^x \cdot 5^{-1} - 6^y = 339 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 5^x + 12\cdot 6^y = 807 \\ 15\cdot 5^x \cdot \frac{1}{5} - 6^y = 339 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 5^x + 12\cdot 6^y = 807 \\ 3\cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases}$ Hacemos ahora un cambio de variables o incógnitas: $\Rightarrow \begin{cases} 5^x = z \\ 6^y = t \end{cases}$ y sustituimos, quedándonos el sistema como $\Rightarrow \begin{cases} 3z + 12t = 807 \\ 3z - t = 339 \end{cases}$ Resolvemos por Gauss (E_2-E_1) $\Rightarrow \begin{cases} 3z + 12t = 807 \\ -13t = -468 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z + 12t = 807 \\ t = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 125 \\ t = 36 \end{cases}$ Por último deshacemos el cambio y resolvemos: $\Rightarrow \begin{cases} 5^x = z \\ 6^y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x = 125 \\ 6^y = 36 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}}$

11. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Una ecuación es **__logarítmica__** cuando la incógnita aparece afectada por un logaritmo.

Para resolverlas tampoco hay un método fijo, pero principalmente usaremos:

- La definición de logaritmo: $\log_a m = z \Leftrightarrow a^z = m$
- Igualdad de logaritmos: $\log_a m = \log_a p \Leftrightarrow m = p$
- Propiedades de los logaritmos

__Ejemplo__: Resuelve $2\log x - \log(x-16) = 2$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, $\log x^2 - \log(x-16) = 2 \Rightarrow \log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = 2 \Rightarrow$ Aplicamos la definición de logaritmo $\frac{x^2}{x-16} = 10^2 \Rightarrow x^2 = 100(x-16) \Rightarrow x^2 - 100x + 1600 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{100 \pm 60}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = 80 \\ x_2 = 20 \end{cases}}$$

Ejemplo: Resuelve $\ln(x+1)=\ln(5x-13)-\ln(x-3)\Rightarrow \ln(x+1)=\ln\left(\dfrac{5x-13}{x-3}\right)\Rightarrow$ Por la igualdad de logaritmos, $x+1=\dfrac{5x-13}{x-3}\Rightarrow x^2-2x-3=5x-13\Rightarrow x^2-7x+10=0\Rightarrow x=\dfrac{7\pm 3}{2}\Rightarrow$

$\boxed{\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=2 \end{cases}}$ *NOTA*: La solución $x_2=2$ no es válida pues al sustituir salen logaritmos negativos que no existen en el campo real.

12. SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Un sistema de ecuaciones es **logarítmico** si, por lo menos, una de las ecuaciones es logarítmica.

Ejemplo: Resuelve $\begin{cases} x+y=22 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

En la segunda ecuación, aplicamos las propiedades de los logaritmos y su definición

$$\begin{cases} x+y=22 \\ \log\dfrac{x}{y}=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y=22 \\ \dfrac{x}{y}=10 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y=22 \\ x=10y \end{cases}\Rightarrow$$

Y ya resolvemos por sutitución $\begin{cases} x=20 \\ y=2 \end{cases}$

Ejemplo: Resuelve $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 33 \\ 2^x\cdot 2^y=2^{11} \end{cases}$

$$\begin{cases} \log[(x+y)(x-y)]=\log 33 \\ 2^{x+y}=2^{11} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (x+y)\cdot(x-y)=33 \\ x+y=11 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (x+y)\cdot(x-y)=33 \\ y=11-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 11\cdot(2x-11)=33\Rightarrow 22x=154\Rightarrow x=7 \quad\Rightarrow y=4$$

Lo resolvemos por sustitución:

Ejemplo: Resuelve $\begin{cases} 2\log x-3\log y=7 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$

Vamos a resolverlo de dos maneras distintas:

<u>1ª Forma</u>: Haciendo un cambio de variables y resolviendo el sistema lineal de dos ecuaciones resultante y después deshaciendo el cambio.

Hacemos $\begin{cases} \log x=z \\ \log y=t \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2z-3t=7 \\ z+t=1 \end{cases}\overset{E_1-2\cdot E_2}{\Rightarrow}\begin{cases} -5t=5 \\ z+t=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t=-1 \\ z=2 \end{cases}$

Deshacemos el cambio: $\begin{cases} \log x = z = 2 \\ \log y = t = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 10^2 = 100 \\ y = 10^{-1} = \dfrac{1}{10} \end{cases}}$

<u>2ª Forma</u>: Convirtiendo cada ecuación logarítmica en una ecuación algebraica

$$\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x^2 - \log y^3 = 7 \\ \log(x \cdot y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log \dfrac{x^2}{y^3} = 7 \\ x \cdot y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^3} = 10^7 \\ x \cdot y = 10 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^3} = 10^7 \\ y = \dfrac{10}{x} \end{cases}$ Sustituimos y nos queda: $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{10}{x}\right)^3} = 10^7 \Rightarrow \dfrac{x^5}{10^3} = 10^7 \Rightarrow x^5 = 10^{10} \Rightarrow$

$x = \sqrt[5]{10^{10}} \Rightarrow \boxed{x = 10^2 = 100}$

Y por tanto: $y = \dfrac{10}{10^2} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{1}{10}}$