UNIDAD 0: **REPASO** (parte 1)

Contenido

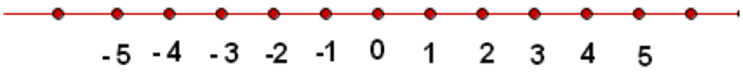
1. NUMEROS NATURALES Y ENTEROS

Con los **números naturales** contamos los elementos de un conjunto (**número cardinal**). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (**ordinal**). Se representa por N y sus elementos son

$$\mathbb{N}=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\}$$

El conjunto de los números enteros son los naturales y sus correspondientes negativos. Se representa por $\mathbb{Z}$ y sus elementos son $\mathbb{Z}=\{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots\}$

Gráficamente se representan en una recta horizontal,



Un nº entero a es menor que otro nº entero b cuando ($b-a$) es positivo, o bien gráficamente cuando a está a la izquierda de b. Se nota por $a<b$ y gráficamente es,

Un nº entero a es mayor que otro nº entero b cuando ($b-a$) es negativo, o bien gráficamente cuando a está a la derecha de b. Se nota por $a>b$ y gráficamente es,

Un concepto asociado a los números enteros es el de valor absoluto, que de manera burda consiste en convertir al nº en positivo si fuera negativo, y si es positivo dejarlo tal cual.

La definición correcta es la siguiente: $|a|=\begin{cases} a & si \quad a\geq 0 \\ -a & si \quad a<0 \end{cases}$

Ejemplos:

|-4| = -(-4) = 4 |9| = 9 |0| = 0

2. NÚMEROS RACIONALES. POTENCIAS

Se llama número **racional** a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero. Matemáticamente se expresa como sigue:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \text{ tales que } a\in\mathbb{Z};\ b\in\mathbb{Z};\ b\neq 0\right\}$$

El concepto de potencia de un nº racional y exponente natural es análogo al conocido para los enteros, así por ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^4}{3^4}$$

Así, se define la potencia de base un nº racional, $\frac{a}{b}$, y exponente entero como:

- Si el exponente es entero positivo: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- Si el exponente es cero: $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$
- Si el exponente es entero negativo: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

Estas potencias tienen las mismas propiedades que las potencias de base un nº entero

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$	2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$
3) $\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$	4) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$
5) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$	6) $\left[\left(\frac{a}{b}\right):\left(\frac{c}{d}\right)\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$

<u>NOTA</u>: Jerarquía de operaciones:

1) Los paréntesis y/o corchetes y empezar por los más internos
2) Potencias
3) Productos y divisiones
4) Sumas y rectas

<u>Ejercicios resueltos</u>:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$	2) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{2}{3}$	4) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$
5) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$	6) $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3\right\}^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-24} = \left(\frac{3}{2}\right)^{24}$

7)	8)
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{2}{3}$	$\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}:\left(\frac{27}{8}\right)^{-3}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-2}:\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right]^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}:\left(\frac{3}{2}\right)^{-9}=$ $=\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}:\left(\frac{2}{3}\right)^{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-13}=\left(\frac{3}{2}\right)^{13}$

3. RELACIONES ENTRE LOS NÚMEROS RACIONALES Y DECIMALES

Cualquier nº racional se puede expresar como un nº decimal exacto, periódico puro (la parte decimal es sólo periódica) o periódico mixto (la parte decimal tiene una parte no periódica) sin más que dividir numerador entre denominador de la forma habitual

$\frac{131}{20}=6{,}55$ $\qquad$ $\frac{514}{18}=28{,}\overset{\frown}{5}$ $\qquad$ $\frac{272}{220}=1{,}3\overset{\frown}{36}$

Análogamente, cualquier nº decimal exacto, periódico puro o periódico mixto se puede expresar como un nº racional. Veamos unos ejemplos,

$2{,}23=\frac{223}{100}$ $\qquad$ $3{,}\overset{\frown}{12}=\frac{312-3}{99}=\frac{309}{99}=\frac{103}{33}$ $\qquad$ $-4{,}23\overset{\frown}{7}=-\frac{4237-423}{900}=\frac{3814}{900}=\frac{1907}{450}$

Podemos concluir entonces, que los números racionales equivalen al conjunto formado por los decimales exactos, los periódicos puros y los periódicos mixtos.

4. NÚMEROS IRRACIONALES. NÚMEROS REALES

Hay números decimales con infinitas cifras decimales que no son periódicos como, por ejemplo:

3,101001000100001…. $\qquad$ -354,145141451414145…..

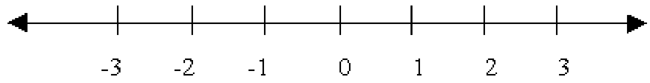
A estos números los llamamos **<u>irracionales</u>** y se notan por I , y son aquellos números que no se pueden representar por una fracción.

Los números irracionales más conocidos son:

- El número π : π = 3,14159265…..
- El número $\sqrt{2}$: $\sqrt{2}$ = 1,41421356….
- El número de oro ϕ (número áureo): $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,61803398….
- El número e : e = 2,7182818284…….

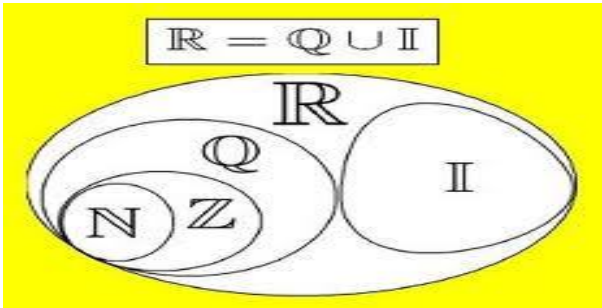
El conjunto de los números racionales en unión con los números irracionales forman el conjunto de los números reales y se denota por la letra $\mathbb{R}$. Se tiene que $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\bigcup I$

Los números reales llenan por completo la recta, cada punto de la recta corresponde a un nº real y viceversa. Por eso la llamamos **recta real**



Resumiendo, en un esquema, los conjuntos de números que hemos visto son:

o bien



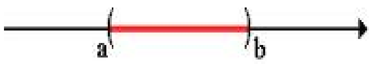
5. INTERVALOS EN LA RECTA REAL

Símbolos matemáticos			
$\in$ Pertenece a	$\notin$ No pertenece a	$\bigcup$ Unión	$\bigcap$ Intersección
$\subset$ Contenido en	$\subseteq$ Contenido o igual a	$\exists$ Existe	$\forall$ Para todo
$\Leftrightarrow$ Sí y sólo si	$\Rightarrow$ Implica	$\neg$ No	$\cong$ Aproximadamente

El **intervalo abierto** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b pero sin incluirlos. Matemáticamente se expresa así: $(a,b)=\{x \in R \text{ tales que } a < x < b\}$

Se representa gráficamente por

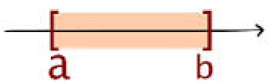
ó por



El **intervalo cerrado** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluidos éstos. Matemáticamente se expresa así: $[a,b]=\{x \in R \text{ tales que } a \le x \le b\}$

Se representa gráficamente por

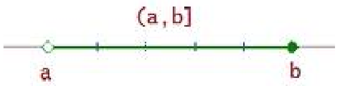
ó por



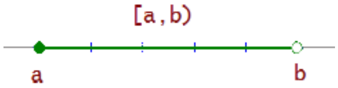
El **intervalo semiabierto o semicerrado** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluido uno sólo de ellos. Matemáticamente se expresa así: $[a,b)=\{x \in R \text{ tales que } a \le x < b\}$ (semicerrado a la izquierda o semiabierto a la derecha)

$(a,b]=\{x \in R \text{ tales que } a < x \le b\}$ (semicerrado a la derecha o semiabierto a la izquierda)

Se representa gráficamente por



Se rellena el extremo que entra dentro del intervalo y sin rellenar el que no está

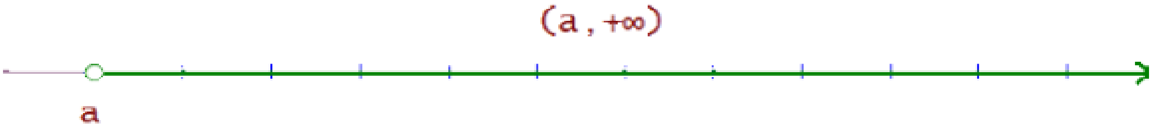


<u>Semirrectas</u>

Las **semirrectas** están determinadas por un número. En una **semirrecta** se encuentran todos los números mayores (o menores) que él.

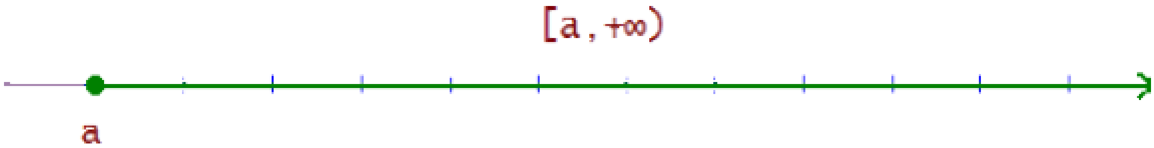
$\mathbf{x > a}$

$(\mathbf{a}, +\infty) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R} \ / \ \mathbf{a} < \mathbf{x} < +\infty \}$



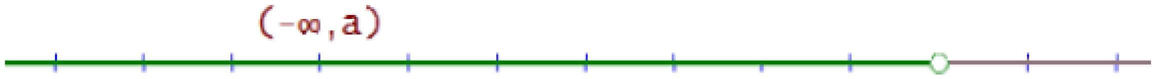
$\mathbf{x \geq a}$

$[\mathbf{a}, +\infty) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R} \ / \ \mathbf{a} \leq \mathbf{x} < +\infty \}$



$\mathbf{x < a}$

$(-\infty, \mathbf{a}) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R} \ / \ -\infty < \mathbf{x} < \mathbf{a} \}$



$\mathbf{x \leq a}$

$(-\infty, \mathbf{a}] = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R} \ / \ -\infty < \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \}$

6. APROXIMACIONES DECIMALES. REDONDEOS Y TRUNCAMIENTOS

Una **aproximación decimal de orden n por defecto** es una estimación en la cual todas las cifras, incluida la que indica el orden, son las mismas que en el nº original y las demás son cero.

Una **aproximación decimal de orden n por exceso** es una estimación en la cual todas las cifras, excluida la que indica el orden, son las mismas que en el nº original; la que indica el orden es una unidad más y el resto de ellas son cero.

<u>Ejemplo</u>:

Con el nº π = 3,14159265….., tenemos que la aproximación decimal de orden 3 (a la milésima) por defecto es $\pi \cong$ 3,141

Y la aproximación decimal por exceso de orden 3 (a la milésima) es $\pi \cong$ 3,142

El **redondeo de orden n** de un nº es la mejor aproximación decimal de orden n que se puede dar de ese número. Se observa la cifra que ocupa el lugar de orden n; si la cifra siguiente es inferior a 5, el redondeo es la aproximación decimal por defecto y, si es mayor o igual que 5, el redondeo es la aproximación decimal por exceso.

Ejemplo:

Con el nº π = 3,14159265….., tenemos que redondeo de orden 3 (a la milésima) es $\pi \cong$ 3,142 pues la 4ª cifra es un 5 y por tanto la milésima se aumenta en una unidad.

Ahora, el redondeo de orden 5 (a la cienmilésima) es $\pi \cong$ 3,14159 pues la 6ª cifra decimal es un 2, y por tanto la cifra de la cienmilésima se queda igual.

El **truncamiento de orden n** de un nº es su aproximación decimal por defecto de orden n

7. NOTACIÓN CIÉNTIFICA

Expresar un nº en notación científica es ponerlo como un producto cuya cifra de unidades es un dígito del 1 al 9 seguido de una parte decimal, por una potencia de base 10 y exponente entero, $a,bcd\ldots\cdot 10^n$

Se suele usar para números muy grandes o muy pequeños.

Ejemplos:

a) 3 452 000 000 = 3,452$\cdot 10^9$

b) -0,000 000 846 = - 8,46 $\cdot 10^{-7}$

8. RADICALES

Se llama **raíz enésima** de un nº a, y se denota por $\sqrt[n]{a}$, a otro número b que cumple que $a = b^n$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, donde a se llama **radicando** y n se llama **índice**

Un mismo nº o radical puede ser escrito de formas diferentes, usando radicales equivalentes, como por ejemplo

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[6]{2^2}$$

Para obtener radicales equivalentes basta multiplicar o dividir por un mismo nº el índice del radical y el exponente del radicando.

Ejemplo: Simplificar los siguientes radicales

a) $\sqrt[12]{2^6} = \sqrt[6\cdot 2]{2^6} = \sqrt{2}$

b) $\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[4]{x^3}$

Ejemplo: Extraer factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{x^8} = \sqrt[3]{x^3\cdot x^3\cdot x^2} = x\cdot x\cdot\sqrt[3]{x^2} = x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}$

b) $\sqrt{16a^5b^7} = \sqrt{4^2\cdot a^2\cdot a^2\cdot a\cdot b^2\cdot b^2 b^2\cdot b} = 4\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot\sqrt{ab} = 4\cdot a^2\cdot b^3\sqrt{ab}$

c) $\sqrt[3]{64a^6z^3} = \sqrt[3]{2^6a^6z^3} = 2^2\cdot a^2\cdot z\cdot\sqrt[3]{1} = 4\cdot a^2\cdot z$

Ejemplo: Introducir factores en los siguientes radicales:

a) $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45}$

b) $a^2\cdot\sqrt[3]{a\cdot b}=\sqrt[3]{\left(a^2\right)^3\cdot a\cdot b}=\sqrt[3]{a^7\cdot b}$

Ejemplo: Efectuar las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\frac{4}{5}\sqrt{2}=\left(3-\frac{2}{3}+5-\frac{4}{5}\right)\sqrt{2}=\left(\frac{45-10+75-12}{15}\right)\sqrt{2}=\frac{98}{15}\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{16}-5\sqrt[3]{54}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{250}=2\sqrt[3]{2^4}-5\sqrt[3]{2\cdot 3^3}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}$

$=2\cdot 2\sqrt[3]{2}-5\cdot 3\sqrt[3]{2}+\frac{1}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=-10\sqrt[3]{2}$

Exponente fraccionario: Todo radical se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario de la siguiente forma $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

Las propiedades de las potencias se cumplen igualmente para las potencias de exponente fraccionario.

Ejemplo: Efectúa las siguientes operaciones usando exponente fraccionario:

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}$

b) $\sqrt[5]{2a^4}:\sqrt[5]{2a^3}=\frac{2^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{4}{5}}}{2^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{3}{5}}}=a^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{a}$

c) $a^{-1}\cdot\sqrt[3]{a}=a^{-1}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

d) $\sqrt[4]{27}:\sqrt[3]{9}=\sqrt[4]{3^3}:\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{3}{4}}:3^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{3}$

9. RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Al procedimiento por el cual eliminamos los radicales del denominador de una fracción se llama racionalización

Hay diferentes formas:

a) Del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$: Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt{b}$

Ejemplos: Racionalizar:

1) $\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

2) $\frac{3}{\sqrt{x-1}}=\frac{3}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{3\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=\frac{3\sqrt{x-1}}{x-1}$

b) Del tipo $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}$: Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador

Ejemplos: Racionalizar:

1) $\frac{20}{3-\sqrt{5}}=\frac{20}{3-\sqrt{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{20\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{20\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}=5\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)$

2) $\frac{2}{\sqrt{3}+2}=\frac{2}{\sqrt{3}+2}\cdot\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}{\sqrt{3}^2-2^2}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)}{-1}=-2\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)$

c) Del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$: Análogo al caso anterior

Ejemplos: Racionalizar:

1) $\dfrac{20}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}=\dfrac{20}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}+\sqrt{5}}=\dfrac{20\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{15}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{20\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{5}\right)}{10}=2\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{5}\right)$

2) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{(x-y)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\dfrac{(x-y)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

10. OPERACIONES CON POLINOMIOS

Un **monomio** en la indeterminada x es toda expresión de la forma $a\cdot x^n$ donde a se llama coeficiente y n grado del monomio. Dos monomios se dicen **semejantes** si tiene el mismo grado

Un **polinomio** en la indeterminada x es una expresión algebraica formada por la suma o diferencia de monomios en la misma indeterminada. Se suelen notar por $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$

Se llama **término** de un polinomio a cada uno de los monomios que lo forman. Al monomio de grado cero lo llamamos término independiente.

Se llama **grado** de un polinomio al mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Ejemplo: El polinomio $P(x)=-3x^5+4x^3-x+\dfrac{1}{3}$ tiene grado 5 y su término independiente es $\dfrac{1}{3}$

Operaciones con polinomios

a) Suma y diferencia de polinomios

Para sumar o restar polinomios se suman o restan los monomios semejantes.

Ejemplo:

Dados los polinomios

$P(x)=2x^4-x^2+3$ $\qquad Q(x)=x^3+2x^2-x+1$ $\qquad R(x)=7x^2-7$

Vamos a efectuar $P(x)-[Q(x)+R(x)]$ = $(2x^4-x^2+3)$ - $\left[\left(x^3+2x^2-x+1\right)+\left(7x^2-7\right)\right]$ =

= $(2x^4-x^2+3)$ - $\left(x^3+9x^2-x-6\right)$ = $2x^4-x^3-10x^2+x+9$

b) Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplican todos los monomios del primero por cada uno de los del segundo, y viceversa, y por último se reducen los términos semejantes.

Ejemplo:

Dados los polinomios

$P(x)=2x^4-x^2+3$ $\qquad R(x)=7x^2-7$, calcular $P(x)\cdot R(x)$ = $(2x^4-x^2+3)\cdot(7x^2-7)$ =

$14x^6-14x^4-7x^4+7x^2+21x^2-21=14x^6-21x^4+28x^2-21$

Ejemplo:

Dado el polinomio $P(x)=3x^2-2$, calcular $[P(x)]^2$

$$[P(x)]^2=(3x^2-2)^2=(3x^2)^2-2{\cdot}3x^2{\cdot}2+2^2=9x^4-12x^2+4$$

11. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Veamos con un ejemplo como se realiza la división de dos polinomios.

Sean $P(x)=2x^4+x^3-x^2+3$ y $Q(x)=-x^2+7$, vamos a efectuar la división $P(x):Q(x)$ ó $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

A $P(x)$ se le llama polinomio dividendo y a $Q(x)$ se le llama polinomio divisor

Hay que seguir estos pasos para dividir polinomios:

- Para poder dividir polinomios el grado del polinomio dividendo (en este caso 4) ha de ser mayor que el del polinomio divisor (en este caso 2)
- Se ordenan los polinomios dividendo y divisor de mayor a menor grado. Si el dividendo estuviera incompleto, dejamos huecos o espacios en blanco correspondientes a los términos que faltan.

$$\begin{array}{ccccc|l}
2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6}
\end{array}$$

- Hacemos la división o cociente entre el primer término del dividendo y el primer término del divisor. En este ejemplo, $\dfrac{2x^4}{-x^2}=-2x^2$. Éste será el primer término del cociente

$$\begin{array}{ccccc|l}
2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6}
 & & & & & -2x^2
\end{array}$$

- El cociente obtenido lo multiplicamos por el divisor y los pasamos con signo opuesto o cambiado debajo de los términos del polinomio dividendo

$$\begin{array}{ccccc|l}
2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2
\end{array}$$

- Sumamos los polinomios de la parte del dividendo, y vemos que siempre el de mayor grado se cancela

$$\begin{array}{ccccc|l}
2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2 \\ \cline{1-5}
0 & +x^3 & +13x^2 & & +3 &
\end{array}$$

- Con el polinomio resultante, volvemos a realizar el mismo proceso, es decir, dividimos el de mayor grado del nuevo $+x^3$ entre el de mayor grado del divisor $-x^2$, $\frac{x^3}{-x^2} = -x$, que será el nuevo término del polinomio cociente

$$\begin{array}{ccccc|l}
2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2-x \\ \cline{1-5}
0 & +x^3 & +13x^2 & & +3 &
\end{array}$$

- Volvemos a multiplicar, en este paso $-x$ por el divisor y lo pasamos al otro lado con signo cambiado y sumamos

$$\begin{array}{ccccc|l}
2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2-x \\ \cline{1-5}
0 & +x^3 & +13x^2 & & +3 & \\
 & -x^3 & & +7x & & \\ \cline{2-5}
 & 0 & +13x^2 & +7x & +3 &
\end{array}$$

- Hacemos lo mismo, repetidamente hasta que el grado del polinomio dividendo resultante sea menor que el grado del polinomio divisor. Todavía hay que hacerlo una vez más, en este paso $\frac{13x^2}{-x} = -13$

$$\begin{array}{ccccc|l}
2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2-x-13 \\ \cline{1-5}
0 & +x^3 & +13x^2 & & +3 & \\
 & -x^3 & & +7x & & \\ \cline{2-5}
 & 0 & +13x^2 & +7x & +3 & \\
 & & -13x^2 & & +91 & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & +7x & +94 &
\end{array}$$

- Con esto ya tenemos hecha la división donde el polinomio cociente es $C(x) = -2x^2 - x - 13$ y el polinomio resto es $R(x) = 7x + 94$. Si nos fijamos vemos que el polinomio resto siempre ha de tener menor grado que el polinomio divisor.
- Por último, si queremos podemos realizar la comprobación efectuando

dividendo = **divisor** x **cociente** + **resto**

que en este ejemplo sería hacer ($-x^2+7$) ·($-2x^2-x-13$) + ($7x+94$) y ver que el resultado es
$P(x)=2x^4+x^3-x^2+3$

Ejemplo:

Efectuar la división $(3x^4-4x^3+5x^2-2x+12):(x^2-3x+5)$

Solución: Cociente: $C(x)=3x^2+5x+5$ Resto: $R(x)=-12x-13$

12. REGLA DE RUFFINI

Esta regla se aplica cuando el divisor es un polinomio de la forma ($x-a$). Veamos con un ejemplo como se procede:

Vamos a dividir el polinomio ($2x^3-3x^2+5$) entre el polinomio $(x-2)$

- Ponemos los coeficientes del polinomio dividendo en orden de mayor a menos grado y el término independiente del divisor cambiado de signo de la siguiente forma

	2	-3	0	5
2				

- Bajamos el primer término del dividendo y lo multiplicamos por el término independiente. Lo ponemos debajo del siguiente término del polinomio dividendo

	2	-3	0	5
2		4		
	2			

- Sumamos

	2	-3	0	5
2		4		
	2	1		

- Volvemos a operar de manera similar

	2	-3	0	5
2		4	2	
	2	1	2	

- Continuamos hasta el final de igual manera

	2	-3	0	5
2		4	2	4
	2	1	2	9

- El último número es el resto de la división
- Los otros números son los coeficientes del polinomio dividendo, que es de un grado menos que el grado del polinomio dividendo

	2	-3	0	5
2		4	2	4
	2	1	2	9

- Por tanto tenemos que Cociente: $C(x) = 2x^2 + x + 2$ Resto: $R(x) = 9$

Ejemplo:

Dividir por Ruffini $(3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 12) : (x+1)$

	3	-4	5	-2	-12
-1		-3	7	-12	14
	3	-7	12	-14	2

Por tanto tenemos que Cociente: $C(x) = 3x^3 - 7x^2 + 12x - 14$ Resto: $R(x) = 2$

13. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

Para descomponer un polinomio en factores, es decir, como producto de polinomios de menor grado, se han de seguir diferentes métodos que nos permitirán realizarlo:

- Sacar factor común:

Ejemplo: Extraemos factores comunes del polinomio $P(x) = 12x^4 + 4x^3 - 80x^2 = 4x^2 \cdot (3x^2 + x - 20)$

Ejemplo: Extraemos factores del polinomio $P(x) = (x+3)^3 - 2(x+3)^2 = (x+3)^2 \cdot [(x+3) - 2] = (x+3)^2 \cdot (x+1)$

- Usar las igualdades notables:

Recordemos las igualdades notables, que son:

$$\boxed{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2}$$

$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$
$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

Teniendo en cuenta lo anterior, lo aplicamos a los siguientes ejemplos:

Ejemplo: $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Ejemplo: $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \Rightarrow x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

Ejemplo: $x^2 - 16 = (x-4) \cdot (x+4)$

Ejemplo: $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = [(x-1) \cdot (x+1)]^2 \Rightarrow$
$x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2 \cdot (x+1)^2$

Ejemplo: $x^4 - 16 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) = (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 4)$

- Usar Ruffini:

Llamamos raíz de un polinomio $P(x)$ a cada uno de los números a para los cuales el valor numérico del polinomio es cero, es decir, a es raíz del polinomio $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$. En estos casos, el polinomio $(x-a)$ es un factor del polinomio $P(x)$

Las raíces enteras de un polinomio son divisores del término independiente siempre que este no sea nulo.

Ejemplo: Vamos a descomponer por Ruffini el polinomio $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$. Las posibles raíces enteras son los divisores del término independiente, -6. Por tanto debemos probar con ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6.

Empezamos y vamos probando, aquí sólo ponemos las que nos interesan, dan de resto 0

	3	6	-3	-6
1		3	9	6
	3	9	6	0
-1		-3	-6	
	3	6	0	
-2		-6		
	3	0		

Con lo cual nos queda, $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6 = 3 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+2)$

Ejemplo: Vamos a descomponer por Ruffini el polinomio $P(x)=2x^2-9x+9$. Las posibles raíces enteras son los divisores del término independiente, +9. Por tanto debemos probar con ±1, ±3, ±9

	2	-9	9
3		6	-9
	2	-3	0
$\frac{3}{2}$		3	
	2	0	

La raíz racional $\frac{3}{2}$ la hemos obtenido dividiendo -3 entre 2 y cambiándole el signo. Esta regla sirve siempre para la última de las raíces. Por tanto nos queda que, $P(x)=2x^2-9x+9=2\cdot(x-3)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)$

14. MCD Y MCM DE POLINOMIOS

El máximo común divisor de varios polinomios, MCD, se obtiene con los factores comunes a los polinomios con su menor exponente. Si no hubiera ninguno, el MCD es 1, es decir son primos entre sí.

El mínimo común múltiplo de varios polinomios, MCM, se obtiene tomando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo: Vamos a calcular el MCD y MCM de los polinomios $P(x)=x^3-9x^2+24x-16$ y $Q(x)=2x^4-12x^3-46x^2+120x-64$

Descomponemos por Ruffini cada uno de ellos

	1	-9	24	-16
1		1	-8	16
	1	-8	16	0
4		4	-16	
	1	-4	0	
4		4		
	1	0		

Así, $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = (x-1)(x-4)^2$

	2	-12	-46	120	-64
1		2	-10	-56	64
	2	-10	-56	64	0
1		2	-8	-64	
	2	-8	-64	0	
-4		-8	64		
	2	-16	0		
8		16			
	2	0			

Así, $Q(x) = 2x^4 - 12x^3 - 46x^2 + 120x - 64 = 2\cdot(x-1)^2\cdot(x+4)(x-8)$

Por tanto,

$$MCD(P(x), Q(x)) = (x-1)$$

$$MCM(P(x), Q(x)) = 2\cdot(x-1)^2\cdot(x-4)^2\cdot(x+4)(x-8)$$

15. FRACCIONES ALGEBRAICAS. OPERACIONES

Una **fracción algebraica** es el cociente de dos polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$, como por ejemplo $\frac{x-1}{2x+3}$ ó $\frac{1}{x}$

Análogamente a las fracciones numéricas, si multiplicamos o dividimos el numerador y el denominador de una fracción algebraica por un mismo polinomio, obtenemos una fracción equivalente a la dada. Esto nos permite simplificar o complicar una fracción algebraica

<u>*Ejemplos*</u>:

a) $\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 5x}$ = (descomponemos en factores numerador y denominador) $\frac{(x-5)^2}{x\cdot(x-5)} = \frac{x-5}{x}$ Esto es lo que se llama **simplificar**

b) $\frac{1-x}{x}$ = (multiplicamos por el mismo polinomio en numerador y denominador) $\frac{(1-x)\cdot(1+x)}{x\cdot(1+x)} = \frac{1-x^2}{x+x^2}$

- <u>Suma de fracciones algebraicas</u>

Se opera de forma análoga a la suma de fracciones numéricas.

Ejemplo: Efectuar

a) $\frac{1-x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}=\frac{1-x-2x+2}{x^2+1}=\frac{-3x+3}{x^2+1}$

b) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{3x+1}{x-2}=$

Calculamos el MCM de los denominadores, $\left.\begin{array}{r} x^2-4=(x-2)\cdot(x+2) \\ x-2=x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow MCM=(x-2)\cdot(x+2)$ que es el denominador común. Ahora hacemos igual que con las fracciones, dividimos el denominador común (MCM) por el denominador antiguo y el resultado lo multiplicamos por el numerador correspondiente. Así nos queda,

$$\frac{2}{x^2-4}-\frac{3x+1}{x-2}=\frac{2\cdot 1}{(x-2)\cdot(x+2)}-\frac{(3x+1)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{2-(3x+1)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{2-(3x^2+6x+x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=$$
$$\frac{-3x^2-7x}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{-3x^2-7x}{x^2-4}=$$

- <u>Producto y potencia de fracciones algebraicas</u>

Se opera de forma análoga a las fracciones numéricas

Ejemplo: Efectuar

a) $\frac{2}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{2\cdot(x^2-2x)}{(x^2-4)\cdot(x-1)}=$ (ahora factorizamos por si se pudiera simplificar) =

$\frac{2\cdot x(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)}=$(simplificamos) $\frac{2\cdot x}{(x+2)\cdot(x-1)}=\frac{2\cdot x}{x^2+x-2}$

b) $x+\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{x^2-1}=x+\frac{x-1}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=$(simplificamos) $x+\frac{1}{x\cdot(x+1)}=$ (ahora sumamos poniendo denominador común)= $\frac{x\cdot x\cdot(x+1)+1}{x\cdot(x+1)}=\frac{x^2\cdot(x+1)+1}{x\cdot(x+1)}=\frac{x^3+x^2+1}{x\cdot(x+1)}$

- <u>Cociente de fracciones algebraicas</u>

Se opera de forma análoga a las fracciones numéricas

Ejemplo: Efectuar

a) $\frac{x}{x^2-4}:\frac{-3}{x+2}=$ (multiplicamos en cruz)= $\frac{x\cdot(x+2)}{-3\cdot(x^2-4)}=$(factorizamos para ver si se puede simplificar)

$=\frac{x\cdot(x+2)}{-3\cdot(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{-x}{3\cdot(x-2)}$

b) $\frac{x^2-6x+9}{x}:\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{(x^2-6x+9)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2-9)}=$ (descomponemos en factores) $\frac{(x-3)^2\cdot(x+3)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{x-3}{x\cdot}$

Ejemplos:

a) $\frac{x^2+x}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x^2+x}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}\right)=\frac{x^2+x}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x^2+x-x+1}{(x-1)\cdot(x+1)}\right)=\frac{x^2+x}{x^2+1}\cdot\left(\frac{x^2+1}{(x-1)\cdot(x+1)}\right)=$

$\frac{(x^2+x)\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=$ (descomponemos y simplificamos) $\frac{x\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x}{x-1}$

b) $\frac{x+\frac{x}{x-1}}{x-\frac{x}{x-1}}=\frac{\frac{x\cdot(x-1)+x}{x-1}}{\frac{x\cdot(x-1)-x}{x-1}}=\frac{\frac{x^2}{x-1}}{\frac{x^2-2x}{x-1}}=\frac{x^2}{x-1}:\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{x^2\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2-2x)}=\frac{x^2}{(x^2-2x)}=\frac{x^2}{x\cdot(x-2)}=\frac{x}{x-2}$

c) $2-\frac{2}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-4x+3}=$

Descomponemos en factores los denominadores y calculamos el común denominador:

$$\left.\begin{array}{r} 1=1 \\ x^2-3x+2=(x-1)\cdot(x-2) \\ x^2-4x+3=(x-1)\cdot(x-3) \end{array}\right\}\Rightarrow MCM=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$$ Y así tenemos que:

$$2-\frac{2}{(x-1)\cdot(x-2)}+\frac{1}{(x-1)\cdot(x-3)}=+\frac{2\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)-2\cdot(x-3)+1\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}=\frac{2x^3-12x^2+10x-7}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}$$

16. ECUACIONES DE 2º GRADO. RESOLUCIÓN

Una **identidad** es una igualdad literal que se verifica para cualquier valor numérico que se dé a las letras que entran en la igualdad.

Ejemplo:

$(x-2)^2=x^2-4x+4$ es una identidad

Una **ecuación** es una igualdad literal que sólo se verifica para valores específicos o determinados que se den a las letras que entran en la igualdad.

Ejemplo: $x^2-2=2$ es una ecuación.

Ejemplos: Decir si son identidades o ecuaciones las siguientes igualdades:

a) $(x-3)\cdot(x+3)=x^2-9$ Identidad

b) $2x+4=6$ Ecuación

c) $(x-3)\cdot(x+3)=x^2+9$ Ecuación

d) $x+1=3x-7$ Ecuación

Ejemplo: (REPASO) Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado

a) $x+2\cdot(x-1)=4$

b) $\frac{1}{8}\cdot(x-2)-\frac{2}{3}\cdot(2x+6)+x=-4$

c) $3ax-2x=3a-2$

d) $\frac{a}{x-2a}+\frac{x-2a}{a}=\frac{x}{a}$

Las **ecuaciones de 2º grado** son ecuaciones de la forma $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ donde $a\neq 0$ pues si fuera 0 sería una ecuación de primer grado.

Las soluciones se obtienen mediante la fórmula: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$

Al nº $(b^2-4\cdot a\cdot c)$ se le llama discriminante y se representa por la letra griega delta $\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c$. Se tiene que:

- Si $b^2-4\cdot a\cdot c>0$, va a tener dos soluciones
- Si $b^2-4\cdot a\cdot c=0$, va tener una sola solución que se llama *doble*
- Si $b^2-4\cdot a\cdot c<0$, no va a tener soluciones pues raíces cuadradas de números negativos no existen.

Ejemplo: Resolver $3x^2-5x+2=0$

Aplicando la fórmula de las soluciones de una ecuación de 2º grado tenemos que:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm 1}{6}$$

De lo anterior tenemos dos soluciones según tomemos el + ó el –

$$x_1=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}\Rightarrow x_1=1$$
$$x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}\Rightarrow x_2=\frac{2}{3}$$

Un estudio aparte merecen las llamadas **ecuaciones de 2º grado incompletas** que son aquellas donde el coeficiente de primer grado (b) o el término independiente (c) valen 0. Veamos cómo se resuelven.

- Si $b=0\Rightarrow a\cdot x^2+c=0\Rightarrow x^2=\dfrac{-c}{a}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}\Rightarrow x_1=\sqrt{\dfrac{-c}{a}},\quad x_2=-\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

- Si $c=0\Rightarrow a\cdot x^2+b\cdot x=0\Rightarrow x\cdot(a\cdot x+b)=0\Rightarrow x_1=0,\quad x_2=-\dfrac{b}{a}$

Ejemplo: Resolver $4x^2-9=0$

Aplicando lo anterior tenemos que: $4x^2=9\Rightarrow x^2=\dfrac{9}{4}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{9}{4}}\Rightarrow \begin{array}{l} x_1=\dfrac{3}{2} \\ x_2=-\dfrac{3}{2}\end{array}$

Ejemplo: Resolver: $x^2+6x=0$

Por lo anterior tenemos que, sacando factor común x:

$$x\cdot(x+6)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x+6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-6\end{cases}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $2x^2 - x - 45 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+360}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{361}}{4} = \frac{1 \pm 19}{4}$ => $\begin{cases} x_1 = \frac{20}{4} = 5 \\ x_2 = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2} \end{cases}$

Propiedad: Si tenemos una ecuación de 2º grado $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ cuyas soluciones son x_1 y x_2 se cumple que:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ La suma de las soluciones es b partido por a y cambiado de signo
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ El producto de las soluciones es c partido por a

Esto es muy útil cuando queremos calcular una ecuación que tenga dos determinadas soluciones y usando como $a = 1$. Por ejemplo, supongamos que queremos tener una ecuación cuyas soluciones sean $x_1 = -3$ y $x_2 = 5$. Entonces $x_1 + x_2 = -3 + 5 = 2$ y $x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot 5 = -15$. Con esto la ecuación de 2º grado que va a tener esas soluciones es: $x^2 - 2 \cdot x - 15 = 0$

Propiedad: Las soluciones de una ecuación de 2º grado nos sirve para factorizar el polinomio de 2º grado asociado. Así si las soluciones de la ecuación de 2º grado $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ son x_1 y x_2. Entonces, como ya sabemos, podemos poner $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Ejemplo: Descomponer en factores el polinomio $P(x) = 2x^2 - x - 45$. Las soluciones son $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{-9}{2} \end{cases}$. Por tanto, nos queda factorizado como sigue $P(x) = 2x^2 - x - 45 = 2 \cdot (x-5) \cdot (x + \frac{9}{2})$

17. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A 2

- *Ecuaciones bicuadradas*

Son ecuaciones de la forma $a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0$ y que se pueden transformar en ecuaciones de 2º grado. Veamos con ejemplos como se resuelven.

Ejemplo: Resolver $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Nos damos cuenta de que la ecuación se puede poner de la siguiente forma $\left[x^2\right]^2 - 13\left[x^2\right] + 36 = 0$, que se puede entender como una ecuación de 2º grado en $[x^2]$, y aplicando la fórmula tenemos que:

$$x^2 = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} \rightarrow x^2 = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$$ Estas son las soluciones de x^2

y para cada una de ellas resolvemos: $\begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$ Por tanto nos salen cuatro soluciones.

<u>Ejemplo</u>: Resolver $x^4-3x^2-4=0$. Análogamente tenemos que darnos cuenta que se puede poner como $\left[x^2\right]^2-3\left[x^2\right]-4=0$ y resolvemos

$$x^2=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}\rightarrow x^2=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\begin{cases}4\\-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}\\x^2=-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\Rightarrow \text{No existe}\end{cases}$$

En este caso sólo hay dos soluciones

- *<u>Ecuaciones que pueden factorizarse</u>*

En este tipo de ecuaciones lo que hemos de hacer es descomponer en factores y después igualar cada factor a 0 resolviendo las ecuaciones resultantes que serán de menor grado. Veamos cómo se realiza con ejemplos.

<u>Ejemplo</u>: Resolver la ecuación $x^3+x^2-5x-5=0$

Descomponemos en factores aplicando Ruffini,

	1	1	-5	-5
-1		-1	0	5
	1	0	-5	0

Ya el cociente es de grado 2, y tenemos que $x^3+x^2-5x-5=(x+1)\cdot(x^2-5)=0$ Si el producto de factores da 0, eso implica que alguno de los factores es 0, luego tenemos que $\begin{cases}x+1=0\Rightarrow x=-1\\x^2-5=0\Rightarrow x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}\end{cases}$ Nos han salido 3 soluciones de la ecuación, que son: $\begin{cases}x_1=-1\\x_2=\sqrt{5}\\x_3=-\sqrt{5}\end{cases}$

<u>Ejemplo</u>: Resolver la ecuación $x^4-x^3+2x^2-4x-8=0$

Aplicamos Ruffini para descomponer hasta que lleguemos a un polinomio de 2º grado como cociente

	1	-1	2	-4	-8
-1		-1	2	-4	8
	1	-2	4	-8	0
2		2	0	8	
	1	0	4	0	

Así nos queda, $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x+1)(x-2)(x^2+4) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+4=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-4} \Rightarrow \text{No tiene soluciones} \end{cases}$$

Luego en esta ecuación sólo hay dos soluciones $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$

18. ECUACIONES IRRACIONALES

Son aquellas ecuaciones en las cuales la incógnita aparece bajo el signo de radical. Nos vamos a limitar a aquellas en las que aparecen radicales cuadráticos (raíces cuadradas). El proceso para resolverlas es el siguiente:

- Se deja un radical en un miembro de la ecuación y nos llevamos todos los demás al otro miembro
- Se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación
- Si existe todavía algún radical, se repite el proceso anterior
- Se resuelve la ecuación resultante y es obligatorio comprobar que las soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación inicial, pues al elevar al cuadrado una ecuación pueden generarse otras soluciones.

Ejemplo: Resolver $x - \sqrt{x} = 6$

Aislamos el radical: $x - 6 = \sqrt{x}$

Elevamos al cuadrado: $(x-6)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

Resolvemos la ecuación de 2º grado: $x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Comprobamos las soluciones sustituyendo en la ecuación inicial: $\begin{cases} x_1 = 9 \Rightarrow 9 - \sqrt{9} = 6 \text{ Es cierto o válido} \\ x_2 = 4 \Rightarrow 4 - \sqrt{4} = 6 \text{ No es cierto o no válido} \end{cases}$

En este caso sólo hay una solución $x_1 = 9$

Ejemplo: Resolver $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1$

Aislamos el radical: $\sqrt{x} = 1 + \sqrt{x-3}$

Elevamos al cuadrado:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{x-3}\right)^2 \Rightarrow x = 1 + 2\sqrt{x-3} + \left(\sqrt{x-3}\right)^2 \Rightarrow x = 1 + 2\sqrt{x-3} + x - 3 \Rightarrow 0 = -2 + 2\sqrt{x-3}$$

Aislamos nuevamente el radical: $2 = 2\sqrt{x-3} \rightarrow$(simplificamos) $1 = \sqrt{x-3}$

Elevamos al cuadrado de nuevo: $1^2 = \left(\sqrt{x-3}\right)^2 \Rightarrow 1 = x - 3 \Rightarrow x = 4$

Comprobamos la solución: $x = 4 \Rightarrow \sqrt{4} - \sqrt{4-3} = 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1$ Es una solución válida

19. SISTEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO

Un sistema de ecuaciones es de 2º grado cuando alguna de las incógnitas es de 2º grado

Para resolverlos tenemos dos métodos

- *Método de sustitución*: Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra la expresión obtenida. Y la ecuación resultante se resuelve por los métodos adecuados. Este método es el más usado.
- *Método de igualación*: Se despeja la misma incógnita de las dos ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas. Y resolvemos por los métodos adecuados la ecuación resultante. Es menos usado.

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$

De la 1ª ecuación despejamos por ejemplo la x y nos resulta: $x=4-y$

Sustituimos en la 2ª ecuación, $(4-y)^2+y^2=40$ →(desarrollamos) $16-8y+y^2+y^2=40$ →(agrupamos y tenemos una ecuación de 2º grado en y) $2y^2-8y-24=0$ →(simplificamos por 2) $y^2-4y-12=0$

→(resolvemos la ecuación de 2º grado) $y=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}\rightarrow\rightarrow y=\dfrac{4\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm 8}{2}=\begin{cases} y_1=6 \\ y_2=-2 \end{cases}$

Estos valores de *y* nos conducen a las soluciones del sistema calculando sus correspondientes *x*:

$y_1=6\rightarrow x_1=4-6=-2\rightarrow \boxed{x_1=-2,\ y_1=6}$ Esta es una solución del sistema, un par de valores

$y_2=-2\rightarrow x_1=4-(-2)=6\rightarrow \boxed{x_1=6\ \ y_1=-2}$ Esta es la otra solución del sistema, un par de valores

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} x^2+y=x+1 \\ 2x^2+y=3 \end{cases}$

Vamos a hacerlo por igualación (se puede hacer perfectamente por sustitución también). Despejamos la *y* de las dos ecuaciones $\begin{cases} y=-x^2+x+1 \\ y=-2x^2+3 \end{cases}$ Igualamos ahora las dos expresiones de *y* que tenemos:

$-x^2+x+1=-2x^2+3$ Y resolvemos esa ecuación de 2º grado:

$-x^2+x+1+2x^2-3=0\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=\dfrac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-2 \end{cases}$

Para cada valor de *x* calculamos su correspondiente *y* usando cualquiera de las dos expresiones despejadas:

$x_1=1\rightarrow y_1=-2\cdot 1^2+3=-2+3=1\rightarrow \boxed{x_1=1,\ y_1=1}$

$x_1=-2\rightarrow y_1=-2\cdot(-2)^2+3=-8+3=-5\rightarrow \boxed{x_1=-2,\ y_1=-5}$

20. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un ***sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas*** es toda expresión del tipo (las incógnitas tienen grado 1):

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=b_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=b_m \end{cases}$$

Llamamos:

- ***Coeficientes del sistema*** a los números reales a_{ij}
- ***Términos independientes*** a los números reales b_i
- ***Incógnitas*** a los x_j que deben ser calculados

La primera ecuación se denota E_1, la segunda con E_2 y así sucesivamente.

La **solución de un sistema** es cada uno de los conjuntos de números S_1, S_2,…, S_n que, sustituidos en las incógnitas correspondientes, verifican todas y cada una de las igualdades.

Resolver un sistema es encontrar las posibles soluciones del mismo, es decir, los valores que pueden tomar las incógnitas de manera que se verifican simultáneamente las *m* ecuaciones.

<u>*Ejemplos*</u>:

a) $\begin{cases} 2x-3y = 2 \\ -5x+3y = -5 \end{cases}$ es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

b) $\begin{cases} x_1-3x_2 = 0 \\ 2x_1-x_2 = 1 \\ x_1+2x_2 = 4 \end{cases}$ es un sistema lineal de 3 ecuaciones con 2 incógnitas

c) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$ es un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

<u>*TIPOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN FUNCIÓN DE SUS SOLUCIONES*</u>

a) <u>*Incompatibles*</u>: Son aquellos que no tienen solución

$\begin{cases} 2x-3y = 2 \\ 2x-3y = -5 \end{cases}$ es un sistema incompatible.

b) <u>*Compatibles*</u>: Son aquellos que tienen solución

- <u>*Compatibles determinados*</u>: Cuando la solución es única.

  $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ es compatible determinado. Su única solución es $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

- <u>*Compatibles indeterminados*</u>: Cuando tienen infinitas soluciones.

  $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$ es compatible indeterminado. Son soluciones $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$, etc.

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son ***equivalentes*** si tiene las mismas soluciones.

Podemos hacer cambios en un sistema de ecuaciones aplicando los siguientes criterios de equivalencia:

Criterios de equivalencia

1: Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una misma expresión, el sistema resultante es equivalente.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 3 = -6 + 3 \\ 2x + 4y - 5y = 16 - 5y \end{cases} \Longrightarrow x = 2,\ y = 3$$

2: Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de las ecuaciones de un sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante es equivalente.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3\cdot(3x - 4y) = -6\cdot 3 \\ \dfrac{2x + 4y}{2} = \dfrac{16}{2} \end{cases} \Longrightarrow x = 2,\ y = 3$$

3: Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema, el sistema resultante es equivalente al dado.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y + 3x - 4y = 16 - 6 \end{cases} \Longrightarrow x = 2,\ y = 3$$

4: Si en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos, resulta otro sistema equivalente al primero.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ \dfrac{2x + 4y}{2} = \dfrac{16}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y + x + 2y = -6 + 8 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Longrightarrow x = 2, \quad y = 3$$

5: Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases} \Longrightarrow x = 2,\ y = 3$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -4y + 3x = -6 \\ 4y + 2x = 16 \end{cases} \Longrightarrow x = 2,\ y = 3$$

Recordemos ahora los métodos de resolución para sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

1: *Método de sustitución*

Ejemplo – teórico: Resolver por sustitución el sistema: $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

(a) Despejamos una incógnita (la que queramos) de una de las ecuaciones, en este caso de la 2ª ecuación, la "x".

$$\begin{cases} 3x-2y = 10 \\ x+3y = 7 \Rightarrow x = 7-3y \quad \text{(hemos elegido la más fácil de despejar)} \end{cases}$$

(b) Sustituimos el valor de la incógnita despejada en su lugar en la otra ecuación

$$3x-2y=10 \Rightarrow 3\cdot(7-3y)-2y=10$$

(c) Resolvemos la ecuación obtenida en (b)

$$3\cdot(7-3y)-2y=10 \Rightarrow 21-9y-2y=10 \Rightarrow -9y-2y=10-21 \Rightarrow -11y=-11 \Rightarrow 11y=11 \Rightarrow y=1$$

(d) Volvemos a la ecuación de la incógnita despejada al principio, para calcular el valor de esa incógnita

$$x=7-3y \Rightarrow x=7-3\cdot 1 \Rightarrow x=7-3 \Rightarrow x=4$$

(e) Dar la solución

$x=4$	$y=1$

<u>Ejercicio</u>: Resolver por sustitución los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -2x+y = -8 \\ 4x+5y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-2y = 6 \\ 5x+2y = 10 \end{cases}$

2: <u>*Método de igualación*</u>

<u>*Ejemplo – teórico*</u>: Resolver por igualación el sistema $\begin{cases} -2x+3y = 5 \\ 4x+y = 4 \end{cases}$

(a) Despejamos la misma incógnita (la que resulte más cómoda) de las dos ecuaciones. En este sistema vamos a despejar la incógnita "y"

$$\begin{cases} -2x+3y=5 \Rightarrow 3y=5+2x \Rightarrow y=\dfrac{5+2x}{3} \\ 4x+y=4 \Rightarrow y=4-4x \end{cases}$$

(b) Igualamos las expresiones obtenidas.

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{5+2x}{3} \\ y&=4-4x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{5+2x}{3}=4-4x$$

(c) Resolvemos la ecuación obtenida.

$$\frac{5+2x}{3}=4-4x \Rightarrow \frac{5+2x}{3}=\frac{12-12x}{3} \Rightarrow 5+2x=12-12x \Rightarrow 2x+12x=12-5 \Rightarrow 14x=7$$

$$\Rightarrow x=\frac{7}{14} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

(d) Calculamos la otra incógnita sustituyendo el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las dos expresiones obtenidas al principio, en (a), se elige la más fácil.

$$y = 4 - 4x \Rightarrow y = 4 - 4\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow y = 4 - 2 \Rightarrow y = 2$$

(e) Se da la solución: $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$

Ejercicio: Resolver por igualación los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -2x + y = -8 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases}$

3: *Método de reducción*

Este método lo vamos a estudiar por separado dada su potencia.

21. MÉTODO DE GAUSS O DE REDUCCIÓN

El método de Gauss es una generalización del método de reducción y consiste en transformar un sistema dado en otro equivalente de manera que sea triangular y muy fácil de resolver. Este método es el más usado para sistemas de más de dos incógnitas y vamos a ver cómo funciona con un ejemplo práctico

Ejemplo – teórico: Vamos a resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

Observamos que tenemos 3 ecuaciones que las identificamos por E_1, E_2 y E_3

$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Longrightarrow$ Cambiamos o permutamos la E_1 la E_2. Lo notaremos por $E_1 \leftrightarrow E_2$ $\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow$ A la E_2 le restamos el doble de la ecuación E_1. Lo notaremos por: $E_2 \leftrightarrow E_2 - 2E_1$

$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ (2x + y - z) - 2\cdot(x - y + 2z) = 0 - 2\cdot 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ Operamos y obtenemos una nueva E_2 donde no aparece ya la incógnita x $\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3y - 5z = -10 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ A la E_3 le restamos la E_1 $\Longrightarrow$ $E_3 \leftrightarrow E_3 - E_1$

$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3y - 5z = -10 \\ 2y - z = -2 \end{cases} \Longrightarrow$ Ya tenemos la x triangulada. Ahora con la y hacemos lo mismo pero sólo con la E_2 y la E_3 Multiplicamos por 2 la E_2 y por 3 la E_3. Lo notamos como $E_2 \leftrightarrow 2E_2$ $E_3 \leftrightarrow 3E_3$ $\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 6y - 10z = -20 \\ 6y - 3z = -6 \end{cases}$

Ahora efectuamos los siguiente

$E_3 \leftrightarrow E_3 - E_2$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ \quad 6y - 10z = -20 \\ \qquad 7z = 14 \end{cases}$$

Simplificamos la E_2

$E_2 \leftrightarrow \frac{1}{2} E_2$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ \quad 3y - 5z = -10 \\ \qquad 7z = 14 \end{cases}$$

Ya podemos calcular *z* de la E_3

$$\boxed{z = \frac{14}{7} = 2}$$

En la E_2 sustituimos *z* y calculamos y

$3y - 10 = -10 \rightarrow \boxed{y = 0}$

En la E_1 sustituimos *y* y *z* para calcular *x*

$x - 0 + 4 = 5 \rightarrow \boxed{x = 1}$

La solución del sistema es: $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}}$

<u>*Ejemplo – teórico*</u>: Resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \to E_2 - 3 \cdot E_1} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ \quad -5y + 7z = 38 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \to E_3 - 2 \cdot E_1}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ \quad -5y + 7z = 38 \\ \quad -7y + 7z = 28 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \to \frac{1}{7} E_3} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ \quad -5y + 7z = 38 \\ \quad -y + z = 4 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \to E_3} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ \quad -y + z = 4 \\ \quad -5y + 7z = 38 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 \to -5E_2} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ \quad 5y - 5z = -20 \\ \quad -5y + 7z = 38 \end{cases} \xrightarrow[E_2 \to \frac{1}{5} E_2]{E_3 \to E_3 + E_2} \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ \quad y - z = -4 \\ \quad 2z = 18 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ \quad y - z = -4 \\ \quad z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ \quad y - 9 = -4 \Rightarrow y = 5 \\ \quad z = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 10 - 27 = -16 \\ \quad y = 5 \\ \quad z = 9 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 9 \end{cases}}$$

<u>*Ejemplo – teórico*</u>: Resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ x - z = 3 \end{cases}$

22. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ECUACIONES

Pasos a seguir en la resolución de problemas con ecuaciones:

b. Comprender el problema (leerlo tantas veces como sea necesario)
c. Elegir la incógnita o incógnitas
d. Plantear las ecuaciones
e. Resolver la ecuación o sistema
f. Comprobar las soluciones obtenidas, desechando aquellas que carecen de sentido en el contexto del problema

<u>Ejemplo</u>: Un hijo tiene 30 años menos que su padre y éste tiene cuatro veces la edad del hijo. ¿Qué edad tienen cada uno?

Vamos a plantearlo con dos incógnitas: $\begin{cases} x = \text{edad del hijo} \\ y = \text{edad del padre} \end{cases}$

Planteamos las relaciones entre ellas: $\begin{cases} x = y - 30 \\ y = 4x \end{cases}$ Y ahora resolvemos, en este caso lo más fácil es sustitución:

$$\begin{cases} x = 4x - 30 \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x = -30 \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 10 \\ y = 40 \end{cases}}$$

<u>Ejemplo</u>: Pedro tiene 335 € en billetes de 5€ y de 10€; si en total tiene 52 billetes, ¿cuántos tiene de cada clase?

Vamos a plantearlo con una sola incógnita (se puede hacer con dos) Supongamos que:

x = nº de billetes de 5 €, por tanto, el nº de billetes de 10 € es *(52-x)*

Así que: $5x + 10\cdot(52 - x) = 335 \Rightarrow 5x + 520 - 10x = 335 \Rightarrow -5x = -185 \Rightarrow x = 37$

Tenemos por tanto $\boxed{\begin{cases} 37 \text{ billetes de } 5€ \\ 15 \text{ billetes de } 10€ \end{cases}}$

<u>Ejemplo</u>: La suma de las edades de dos personas es 18 años y el producto 77. ¿Qué edad tiene cada una?

Vamos a plantearlo con dos incógnitas: $\begin{cases} x = \text{edad de } 1^{\text{a}} \text{ persona} \\ y = \text{edad de } 2^{\text{a}} \text{ persona} \end{cases}$

Planteamos las relaciones entre ellas: $\begin{cases} x + y = 18 \\ x \cdot y = 77 \end{cases}$ Y ahora resolvemos, en este caso lo más fácil es sustitución:

$\begin{cases} y = 18 - x \\ x \cdot y = 77 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 18 - x \\ x\cdot(18 - x) = 77 \end{cases} \Rightarrow$ Resolvemos la ecuación de 2º grado: $18x - x^2 = 77 \Rightarrow$

$$x^2 - 18x + 77 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \Rightarrow y = 7 \\ x = 7 \Rightarrow y = 11 \end{cases}$$