UNIDAD 0: REPASO

Contenido

1. NÚMEROS NATURALES

Los números naturales se usan para contar y ordenar los elementos de un conjunto.

Los números naturales se representan por la letra $\mathbb{N}$ y son $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,.........\}$ que como vemos son infinitos.

También además de para contar sirven para ordenar, 1º (primero), 2º (segundo), 3º (tercero), …

Las dos operaciones básicas son la suma (adición) y la multiplicación (producto), y su resultado siempre es un nº natural, por eso se dicen que son operaciones internas. Es necesario saber las tablas de multiplicar hasta el 10 como mínimo, pues ello nos permite agilizar nuestros cálculos sin usar la calculadora.

La resta (sustracción o diferencia) no es una operación interna pues la resta de dos números naturales puede que no sea un número natural, como por ejemplo $2-7$ cuyo resultado es, como sabemos, -5 que es entero pero no natural.

Lo mismo ocurre con la división (cociente) entre dos números naturales, como por ejemplo $\frac{3}{5}$ que es un número racional.

<u>Ejercicio 1</u>: Realiza las siguientes operaciones con números naturales sin usar la calculadora:

a) $4+14-12+8-6=$

b) $123-8{\cdot}7=$

c) $144:6+20:5=$

d) $6{\cdot}9{\cdot}2-24:8-7{\cdot}8=$

e) $\frac{81}{9}+\frac{14}{7}-121:11=$

<u>División. Criterios de divisibilidad.</u>

La división es la operación que tenemos que hacer como para repartir un número de cosas entre un número de personas. Se presenta por $a:b$ o bien por $\frac{a}{b}$. Al número a se le llama <u>DIVIDENDO</u> y al número b se le conoce como <u>DIVISOR</u>. El resultado de la división da un <u>COCIENTE</u> (lo que corresponde a cada elemento del divisor) y un <u>RESTO</u> que es lo que sobra.

Si el resto es cero la división se llama <u>exacta</u> y en caso contrario inexacta y se podrán calcular decimales si fuera necesario.

Cuando la división $\frac{a}{b}$ es exacta diremos que el nº a es <u>divisible</u> por el nº b. También se puede decir que a es un <u>múltiplo</u> de b o que b es un <u>divisor</u> de a.

Hay unas reglas sencillas para saber con rapidez si un número natural es divisible por otro, las más usadas son las siguientes:

Número	**Criterio**	**Ejemplo**
2	El número termina en cero o cifra par (el cero se considera par).	456: porque la última cifra 6 es par.
3	La suma de sus cifras es un múltiplo de 3.	534: porque 5+3+4 = 12 es múltiplo de 3.
4	El número formado por las dos últimas cifras es un múltiplo de 4 o cuando termina en doble cero.	920: porque 20 es múltiplo de 4.

5	La última cifra es 0 ó 5.	715: porque acaba en 5.
6	El número es divisible por 2 y por 3.	36: Por los criterios anteriores
9	La suma de sus cifras es múltiplo de 9.	855: porque 8+5+5 18 es múltiplo de 9.
10	La última cifra es 0.	540: termina en cifra 0.

Un número es <u>primo</u> cuando sólo tiene por divisores al 1 y a el mismo.

En caso contrario diremos que el número es compuesto.

El 0 y el 1 son números especiales que no se consideran ni primos ni compuestos.

<u>Descomposición de números naturales en factores primos</u> (factorización)

La descomposición de un número en sus factores primos es la expresión del número como producto de otros factores más pequeños y que sean números primos.

Para hacer esta descomposición se realizan divisiones sucesivas del número y de los cocientes obtenidos por números primos (elegidos de menor a mayor) y se acaba con el último cociente igual a 1.

<u>Ejemplo</u>**:**

a)
$$\begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Descomposición factorial: **132 =** $\mathbf{2^2 \cdot 3 \cdot 11}$

Los ***factores primos*** de 132 son **2 , 3, 11** .

b)
$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Descomposición factorial: **48 =** $\mathbf{2^4 \cdot 3}$

Los ***factores primos*** de 132 son **2 , 3**

<u>Ejercicio 2</u>: Halla la descomposición factorial de estos números

a) 36 b) 122 c) 81 d) 54 e) 75 f) 125

g) 70 h) 88 i) 170 j) 350 k) 888 l) 1024

<u>Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (MCM) de números naturales</u>

El <u>máximo común divisor</u> es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

Para calcularlo se utiliza el siguiente procedimiento:

1. Se realiza la descomposición factorial de cada número.

2. Se buscan los factores primos comunes a estos números.

3. El MCD es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente con que aparezcan en la descomposición de cada número.

4. Si no encontramos factores comunes a todos los números el MCD es 1.

<u>Ejemplo</u>: Calcular el Máximo Común Divisor de 225 , 60 , 315

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

45	3
15	3
5	5
1	

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$225 = 3^2 \cdot 5^2$ $\qquad$ $45 = 3^2 \cdot 5$ $\qquad$ $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Los factores comunes de estos tres números son 3 y 5. Así, MCD (225, 45 , 315) = 3^2 x 5 = 45

El <u>mínimo común múltiplo</u> es el menor de los múltiplos comunes (distinto del cero) de dichos números.

Para calcularlo se utiliza el siguiente procedimiento:

1.- Se realiza la descomposición factorial de cada número.

2.- Se buscan los factores primos comunes a estos números.

3.- El MCM es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente con que aparezcan en la descomposición de cada número.

<u>Ejemplo</u>: Calcular el mínimo común múltiplo de 8 , 12 , 90

8	2
4	2
2	2
3	1
4	

12	2
6	2
3	3
1	

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$8 = 2^3$ $\qquad$ $12 = 2^2 \cdot 3$ $\qquad$ $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

¿Cuáles son los factores comunes (repetidos) a los tres números? .....2..

¿Cuáles son los factores no comunes? ....3 y 5.....

Por tanto, MCM (8, 12, 90) = 2^3 x 3^2 x 5 = 8 · 9 · 5 = 360

<u>Ejercicio 3</u>: Calcula el MCD y el MCM de los siguientes números:

a) 15 y 25 $\qquad$ b) 8 y 12 $\qquad$ c) 24, 6 y 18

d) 9 y 8 $\qquad$ e) 48 y 32 $\qquad$ f) 4, 9, 25 y 36

2. NÚMEROS ENTEROS

Los números enteros son un conjunto de números que incluye a los números naturales distintos de cero (1, 2, 3, ...), los negativos de los números naturales (..., −3, −2, −1) y al 0. Los enteros negativos, como −1 o −3 (se leen «menos uno», «menos tres», etc.), son menores que todos los enteros positivos (1, 2, ...) y que el cero. Para resaltar la diferencia entre positivos y negativos, a veces también se escribe un signo «más» delante de los positivos: +1, +5, etc. Cuando no se le escribe signo al número se asume que es positivo.

El conjunto de todos los números enteros se representa por la letra $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Al igual que los números naturales, los números enteros pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse, de forma similar a los primeros. Sin embargo, en el caso de los enteros es necesario calcular también el signo del resultado.

El opuesto de un número entero es otro número entero con el mismo valor numérico y signo contrario. Todos los números enteros tienen un opuesto.

Ejemplos:

$Op(21) = -21$ $\qquad Op(-1) = +1$ $\qquad Op(0) = 0$

$Op(6) = -6$ $\qquad Op(-51) = +51$ $\qquad Op(17) = -17$

- Para SUMAR números enteros del mismo signo se suman en valor absoluto (sin considerar el signo) y se le pone el signo que tengan:

Ejemplos:

$2 + 54 + 4 = +60$ $\qquad -6 + (-7) + (-17) = -30$

- Para SUMAR números enteros de distinto signo se restan en valor absoluto y se le pone el signo del mayor.

Ejemplos:

a) $52 + (-29) = +23$ $\qquad$ b) $235 + (-425) = -190$

c) $-2 + 6 + (-5) + (-4) + 3 = [6+3] + [(-2) + (-5) + (-4)] = 9 + (-11) = -2$

- Para RESTAR números enteros aplicamos la regla de los signos y resolvemos como una suma.

$$\boxed{\text{Regla de los signos} \begin{cases} + \cdot + = + & \quad - \cdot - = + \\ + \cdot - = - & \quad - \cdot + = - \end{cases}}$$

Ejemplos:

$48 - (+36) = 48 - 36 = +12$ $\qquad -24 - (-15) = -24 + 15 = -9$

$15 - (-6) = 15 + 6 = +21$ $\qquad -35 - (+28) = -35 - 28 = -63$

Ejercicio 4: Calcula:

a) $9 - 12 + 5 - (+1) + 3 - 12 - 8 - 6 - 4 =$ $\qquad$ b) $12 - 6 + 8 - (-3) - 5 + 9 - (-7) + 8 =$

c) $-(-12) + 6 - (+2) - 6 + (-7) - 2 =$ $\qquad$ d) $5 - (-12) - 8 + 6 - (+5) + 10 - 5 - (-9) + 3 =$

e) $9 - 12 - (-7) + 5 - (-8) + 1 - (-12) + 3 =$ $\qquad$ f) $12 - 6 + 8 - (-8) - 5 + 9 - (-9) + 8 =$

g) $-(-12) + 16 - (-19) - 6 + (-21) - 22 + 3 =$ $\qquad$ h) $5 - (-5) + 6 - 15 + 3 - (+8) - 7 + 5 - (+2) + (+24) =$

Ejercicio 5: Calcula:

a) $9 - 12 - (6 + 8 - 4 + 9 - 7 - 3) + 5 - (7 - 8 + 2 - 3) + 1 - (-12 - 8 - 6 - 4) + 3$

b) $-(-12) + 6 - (5 + 4 - 9 - 6 + 2 - 7) - 6 + (-5 + 8 - 4 + 1 - 2 - 7) - 2$

c) $5-(7-6+8-12+3-4)-8+6-(12-13+5-3-7)+10-5-(-5-9)+3$

d) $5-(-5)+6-15+3-(8+2+4-6+8-9)-7+5-(+2)+(-9-5-2+6-13+24)$

e) $-(1-3+5-7)+4-12+13-(2+15-4+3)$

f) $(+325)+(-248)+(-265)$

g) $-951+357-64+852$

- Para MULTIPLICAR números enteros se aplica la regla de los signos y se multiplican los números en valor absoluto (sin considerar el signo).

$$\text{Regla de los signos}\begin{cases} +\cdot+=+ & -\cdot-=+ \\ +\cdot-=- & -\cdot+=- \end{cases}$$

<u>Ejemplos</u>:

$+2\cdot(+54)=+108$ $\qquad$ $-6\cdot(-7)=+42$

$-2\cdot(+25)=-50$ $\qquad$ $+2\cdot(-34)=-68$

- Para DIVIDIR números enteros se aplica la regla de los signos y se dividen los números en valor absoluto (sin considerar el signo).

$$\text{Regla de los signos}\begin{cases} +\cdot+=+ & -\cdot-=+ \\ +\cdot-=- & -\cdot+=- \end{cases}$$

<u>Ejemplos</u>:

$52:(+2)=+26$ $\qquad$ $(-62):(-2)=+31$

$32:(-2)=+16$ $\qquad$ $-39:3=-13$

<u>Ejercicio 6</u>: Realiza las siguientes operaciones:

a) $(-4)\cdot(+12)$ $\qquad$ b) $(+51)\cdot(-7)$ $\qquad$ c) $(+12)\cdot(+8)$

d) $(+7)\cdot(-16)\cdot(-5)$ $\qquad$ e) $(-15)\cdot(-3)\cdot(-2)$ $\qquad$ f) $(-5)\cdot(+17)$

g) $(-8)\cdot(-65)\cdot(-9)$ $\qquad$ h) $(+48):(-8)$ $\qquad$ i) $(+36):(-12)$

j) $(-39):(+3)$ $\qquad$ k) $(+66):(+11)$ $\qquad$ l) $\frac{4976}{311}$

- El orden de resolución de OPERACIONES COMBINADAS viene determinado por la prioridad de las operaciones. Es fácil ver que resolvemos las operaciones de mayor peso primero.
    1) Se resuelven los PARÉNTESIS o CORCHETES y de ellos los más interiores
    2) Se resuelven los PRODUCTOS y DIVISIONES de izquierda a derecha.
    3) Se resuelven las SUMAS y RESTAS de izquierda a derecha o en otro orden si nos resulta más cómodo.

<u>Ejemplo</u>:

$2\cdot 3-4-5\cdot(-2)-9+4\cdot 2-6+5=6-4+10-9+8-6+5=29-19=+10$

Ejercicio 7: Calcula el resultado de las siguientes operaciones combinadas:

a) $6+28:7-12\cdot(-9)+3\cdot(-5)+14-8:2=$

b) $5\cdot(-2)+(-8):(-4)-5=$

c) $7-(-3)+(-8):(-8)-3-(-1)=$

d) $(5-1):(3-1)-3\cdot 2-5\cdot(-3)+7=$

e) $9-3\cdot 4-5-(2-4+1)\cdot(-2)+7=$

f) $1+[2-5:(-1)]-4\cdot 2+5-7\cdot 2=$

g) $9-4-7-(3-5-4)+6\cdot 2-5\cdot 3=$

h) $2-[2-9:(3-2\cdot 3)+1\cdot(-2)]+6:(-8+4+(-2)\cdot 2+5)=$

3. NÚMEROS RACIONALES

Si se necesita además dividir, surgen los números racionales (o fraccionarios, o quebrados), que se representa por $\mathbb{Q}$. Los números racionales son todas las fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ donde los números a y b son números enteros. $\mathbb{Q}=\left\{\ldots,\frac{-23}{4},\frac{1}{2},\frac{12}{5555},0,-6,\ldots\right\}$

Al número entero a se le llama NUMERADOR y al número b se le llama DENOMINADOR. Así un número racional es $\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$.

Hay que tener en cuenta que todos los números enteros son racionales pues tienen como denominador al número 1 que no se suele poner. Por ejemplo, $7=\frac{7}{1}$ $\qquad -8=\frac{-8}{1}$

- Simplificación de fracciones

Las fracciones se pueden reducir o simplificar; y el resultado sería una fracción equivalente. Por ejemplo, $\frac{3}{6}$ se puede simplificar dividiendo por un número que sea divisible por 3 y 6; en este caso, el 3:

$$\frac{3}{6}=\frac{3:3}{6:3}=\frac{1}{2}$$

Normalmente es conveniente simplificar las fracciones, pues nos facilitará los cálculos.

Ejercicio 8: Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{28}{36}$ b) $\frac{84}{126}$ c) $\frac{510}{850}$ d) $\frac{75}{90}$

e) $\frac{21}{49}$ f) $\frac{-300}{6}$ g) $\frac{1024}{-16}$ h) $\frac{48}{581}$

- Suma y resta de fracciones

Si las fracciones tienen el mismo denominador, se suman o restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

Ejemplo:

a) $\frac{7}{22}+\frac{5}{22}=\frac{12}{22}$

Y además simplificamos si podemos, dando por resultado $\frac{6}{11}$

b) $\frac{-5}{3}-\frac{-7}{3}=\frac{-5+7}{3}=\frac{2}{3}$

Si las fracciones tienen distinto denominador, se ha de calcular el MCM de los denominadores y realizar unos pequeños cálculos, veamos cómo se hace mediante un ejemplo:

Vamos a realizar $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{5}{3}=$. En primer lugar calculamos el común denominador, que es el MCM de los denominadores: $MCM(4,6,3)=12$. Este número (12) será el denominador de todas las fracciones $\frac{}{12}+\frac{}{12}-\frac{}{12}=$. Ahora hemos de calcular los numeradores.

Para ello dividimos el MCM (12) entre cada uno de los denominadores antiguos:

$12:4=3$ $\quad 12:6=2$ $\quad 12:3=4$ y los multiplicamos por el numerador antiguo correspondiente.

Nos queda: $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{5}{3}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}-\frac{20}{12}=$ Y por último, ya con el mismo denominador, sólo nos queda operar y dejar como una sola fracción, sin olvidarnos de simplificar el resultado si se pudiera.

$\frac{-9}{12}=\frac{-3}{4}$

Ejercicio 9: Realiza las siguientes operaciones con fracciones:

a) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

d) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}+\frac{7}{6}$ e) $\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$

g) $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-2$ h) $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)$ i) $-3-\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{16}-1\right)=$

- Producto de fracciones (multiplicación)

En la multiplicación de fracciones sólo hay que multiplicar por una parte el numerador y por otra el denominador: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ Y no nos olvidemos de simplificar

Ejemplo:

$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$ $\qquad \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{-60}{40}=\frac{-3}{2}$

- Cociente de fracciones (división)

En la división de fracciones hay que multiplicar en cruz las dos fracciones:

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ ó $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Ejemplo:

$\frac{2}{3}:\frac{1}{6}=\frac{12}{3}=4$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{7}}=\frac{35}{6}$

Ejercicio 10: Realiza las siguientes operaciones con números racionales:

a) $\frac{-5}{6}\cdot\frac{2}{3}$ b) $\frac{8}{9}\cdot\frac{-3}{4}$ c) $\frac{-10}{15}\cdot\frac{-50}{20}$ d) $\frac{400}{15}\cdot\frac{75}{200}$

e) $-5\cdot\frac{-1}{10}$ f) $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ g) $\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{-4}{6}}$ h) $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}-\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}$

i) $6-\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}-\frac{8}{9}$ j) $\left(\frac{3}{8}-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(7-\frac{2}{3}:\frac{6}{7}\right)$ k) $\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}-7$

- Prioridad de operaciones en operaciones combinadas

El orden de resolución de OPERACIONES COMBINADAS viene determinado por la prioridad de las operaciones. Es fácil ver que resolvemos las operaciones de mayor peso primero.

1) Se resuelven los PARÉNTESIS o CORCHETES y de ellos los más interiores
2) Se realizan las potencias, si las hubiera.
3) Se resuelven los PRODUCTOS y DIVISIONES de izquierda a derecha.
4) Se resuelven las SUMAS y RESTAS de izquierda a derecha o en otro orden si nos resulta más cómodo.

Ejercicio 11: Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) $1+\frac{3}{2}:\frac{3}{5}$	b) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\dfrac{\frac{1}{5}}{3}\cdot\frac{3}{2}$	c) $-3+\frac{10}{9}\cdot\frac{27}{20}+2$
d) $18+2\cdot(5-9)-3\cdot(10-7)$	e) $16-30:[6-2\cdot(3-1)+3]$	f) $14-24:3+6:2$
g) $2-6:3\cdot4-5\cdot(-1)-[(-4)\cdot(-3)-18:(-9)]$		h) $\frac{3}{2}-\frac{7}{12}+\frac{6}{8}=$
i) $\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{4}\right):\frac{1}{2}=$	j) $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=$	k) $3+3\cdot\left(1-\frac{7}{9}\right)=$
l) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right):\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+5\right)=$	m) $\dfrac{1-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}+3}$	n) $\dfrac{\left(\frac{4}{3}-1\right)-\left(\frac{2}{3}+3\right)}{\frac{4}{5}-1+\frac{3}{2}}$

Ejercicio 11: Carlos tiene una caja con 24 bolígrafos que reparte entre sus primos de la forma siguiente:

a) Rosa recibe la tercera parte.

b) Sergio, la cuarta parte.
c) Dani, la mitad de la tercera parte.
d) Rocío, la cuarta parte de la mitad.
e) ¿Cuántos bolígrafos recibe cada uno? ¿Sobra alguno? Escribe los que sobran mediante una fracción.

Ejercicio 12: Determine si las siguientes frases son verdaderas o falsas.
a) Si a un número positivo se le resta un número negativo el resultado es positivo.
b) Si se suman dos números negativos el resultado es negativo.
c) Si resta dos números negativos, el resultado siempre es positivo.
d) Al sumar dos números negativos el resultado es siempre negativo.
e) Al multiplicar una cantidad par de números negativos el resultado es positivo

Ejercicio 13: María gasta en libros 3/5 partes de 500 euros que tiene ahorrados.
a) ¿Qué parte le queda sin gastar?
b) ¿Cuánto dinero ha gastado?
c) Si le deja a su hermana ¼ de lo que le queda, ¿qué cantidad de dinero tiene ahora María?

Ejercicio 14: En una carrera, un ciclista tiene que recorrer 150 km. Ya lleva recorrido los 4/5 del trayecto. ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos? ¿Cuántos le faltan?

Ejercicio 15: Una piscina contiene 1.200 litros de agua cuando está llena hasta $\frac{1}{4}$ de su capacidad.
a) ¿Cuál es la capacidad total de la piscina?
b) ¿Cuántos litros le faltan para llenarla?

Ejercicio 16: Entre tres amigos, Elena, Alejandro y Raquel se repartes 1800 eruos de modo que a Elena le corresponde 1/3, a Alejandro 2/5 y a Raquel el resto de dicha cantidad.
a) ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?
b) ¿Qué fracción del total le corresponde a Raquel?

Ejercicio 17: Después de haberse estropeado las 2/9 partes de fruta de un almacén, aún quedan 63 toneladas. ¿Cuánta fruta había antes de estropearse?

Ejercicio 18: Acertijo:

1º Escribe un número que sea menor que diez y que no sea cero.
2º Súmale 29.
3º Saca la última cifra de la suma.
4º Multiplica lo que queda por diez.
5º Súmale 4 al producto.
6º Multiplica lo obtenido por 3.
7º Resta 2 al producto.

¿Cuál es el resultado que se repite?, ¿A qué crees que se deba este resultado?