EJERCICIOS UNIDAD 1: LÍMITES

Ejercicio 1:

a) Calcular $\lim_{x\to 2} 3$ **Solución:** $\lim_{x\to 2} 3 = 3$	b) Calcular $\lim_{x\to 2} x$ **Solución:** $\lim_{x\to 2} x = 2$
c) Calcular $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+1}$ **Solución:** $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+1} = \frac{(3)^2-9}{3+1} = \frac{0}{4} = 0$	d) Encontrar $\lim_{x\to 3} x^3$. **Solución:** $\lim_{x\to 3} x^3 = (\lim_{x\to 3} x)^3 = (3)^3 = 27$
e) Evaluar $\lim_{x\to -1}(x^3-3x+2)$. **Solución:** $\lim_{x\to -1}(x^3-3x+2) =$ $(-1)^3-3(-1)+2 = 4$	f) Encontrar $\lim_{x\to -2}(6x+1)(2x-3)$ **Solución:** $\lim_{x\to -2}(6x+1)(2x-3) =$ $(6(2)+1)(2(2)-3) = (13)(1) = 13$.
g) Determinar $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+13}$. **Solución:** $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+13} =$ $= \sqrt{3+13} = \sqrt{16} = 4$	h) Evaluar $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}}{2x-10}$ **Solución:** $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}}{2x-10} =$ $= \frac{\sqrt{7+2}}{2(7)-10} = \frac{\sqrt{9}}{14-10} = \frac{3}{4}$
i) Encuentre $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$ **Solución:** $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} =$ $= \frac{\sqrt{4^2+9}}{4} = \frac{5}{4}$	j) Calcular $\lim_{x\to 1}\sqrt[5]{x^2-x}+(x^2+4)^2$. **Solución:** $\lim_{x\to 1}\sqrt[5]{x^2-x}+(x^2+4)^2 =$ $= \sqrt[5]{(1)^2-1}+((1)^2+4)^2 = 0+25 = 25$

Ejercicio 2:

Calcula.

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim_{x\to+\infty} (x^4 + 2x^3 + x^2 - 17x)$

c) $\lim_{x\to+\infty} (-2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 27x - 42)$

d) $\lim_{x\to+\infty} (1 - 3x^3 + 5x^2 - 6x)$

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} (x^4 + 2x^3 + x^2 - 17x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} (-2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 27x - 42) = -\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty} (1 - 3x^3 + 5x^2 - 6x) = -\infty$

Ejercicio 3:

Determina los límites.

a) $\lim_{x\to-\infty} (6x^3 + x^2)$

b) $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 12x + 1)$

c) $\lim_{x\to-\infty} (5x^3 - 3x^2 - 16x + 3)$

d) $\lim_{x\to-\infty} (7 - 12x + 3x^2 + 9x^3)$

a) $\lim_{x\to-\infty} (6x^3 + x^2) = -\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 12x + 1) = +\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} (5x^3 - 3x^2 - 16x + 3) = -\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} (7 - 12x + 3x^2 + 9x^3) = -\infty$

Ejercicio 4:

Determina los límites, y si es preciso, calcula los límites laterales.

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 6}{x - 2}$

b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{3}{9 - x^2}$

c) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2 + 2x}{8 - 2x}$

d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+6}{x-2} \to \frac{10}{0}$ $\qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+6}{x-2} = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+6}{x-2} = +\infty$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{3}{9-x^2} \to \frac{3}{0}$ $\qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{3}{9-x^2} = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to 3^+} \frac{3}{9-x^2} = -\infty$

c) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2+2x}{8-2x} \to \frac{24}{0}$ $\qquad \lim_{x\to 4^-} \frac{x^2+2x}{8-2x} = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to 4^+} \frac{x^2+2x}{8-2x} = -\infty$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{4-2x}{x^2-2x+1} \to \frac{2}{0}$ $\qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{4-2x}{x^2-2x+1} = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{4-2x}{x^2-2x+1} = +\infty$

Ejercicio 5:

Calcula los límites laterales y el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9} \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x-3} \to \frac{5}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9} = +\infty \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9} = +\infty \end{array}\right\} \to \lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9} = +\infty$$

Ejercicio 6:

Resuelve los límites.

a) $\lim_{x\to -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-9x+10}{3x^2-7x+2}$

c) $\lim_{x\to -4} \frac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8}$

d) $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10}$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16}$

f) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}$

a) $\lim_{x\to -3} \dfrac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{9}{2}$$

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^2-9x+10}{3x^2-7x+2} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-9x+10}{3x^2-7x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x-5)}{(x-2)(3x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{3x-1} = -\frac{1}{5}$$

c) $\lim_{x\to -4} \dfrac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -4} \frac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8} = \lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(3x^2-1)}{(x+4)(x^2+3x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{3x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{47}{6}$$

d) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x^2-4x-5)}{(x-5)(x^2+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2+2} = 0$$

e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x-7)}{(x-2)(4x-8)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-7}{4x-8} \to -\frac{3}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16} = -\infty$$

f) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2(x-1)}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x} = 2$$

Ejercicio 7:

Ejemplo A.4
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt[3]{x+1}+2x}$

De nuevo vemos que se trata de un límite de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Observamos los términos que aparecen:

- en el numerador aparecen $\sqrt{x^4+1}$, cuyo comportamiento cuando $x\to+\infty$ es como $\sqrt{x^4}=x^{4/2}=x^2$, y x^2.
- en el denominador aparecen $\sqrt[3]{x+1}$, cuyo comportamiento es como $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$, y $2x$.

Por tanto lo que tiende a infinito más rápidamente es x^2 (es la mayor potencia de x que aparece). Se puede, pues, aplicar la técnica de dividir numerador y denominador por x^2.

Sin embargo, es más fácil tener en cuenta sólo los términos dominantes, como antes:

- cuando $x\to+\infty$ el numerador se comporta como $x^2+x^2=2x^2$.
- cuando $x\to+\infty$ el denominador se comporta como $2x$.

En consecuencia se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt[3]{x+1}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Ejercicio 8:

Ejemplo A.5
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

Es de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ así que razonamos como antes.

El numerador, en el límite, se comporta como $\sqrt[4]{x^2}=x^{2/4}=x^{1/2}$, mientras que el denominador se comporta como $\sqrt{x}+\sqrt{x}=2x^{1/2}$.

En consecuencia, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2+1}+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{2x^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 9:

Resolver los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$; *b)* $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x-5}{x^2-25}$; *c)* $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$;

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$; *e)* $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$;

a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ indeterminación de la forma $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por -1:

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to-1} \frac{x^2-x+1}{x-1} = -\frac{3}{2}$$

b) $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$ indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por 5:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}$$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 3:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

e) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)}=\pm\infty$$

Ejercicio 10:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 2} - (x - 5) \right)$$

Solución

Tenemos una resta de infinitos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 2} - (x - 5) \right) = \infty - \infty$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - (x - 5) =$$

$$= \left(\sqrt{x^2 + x + 2} - (x - 5) \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + (x - 5)}{\sqrt{x^2 + x + 2} + (x - 5)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 2} \right)^2 - (x - 5)^2}{\sqrt{x^2 + x + 2} + (x - 5)} =$$

$$= \frac{x^2 + x + 2 - (x^2 + 25 - 10x)}{\sqrt{x^2 + x + 2} + (x - 5)} =$$

$$= \frac{11x - 23}{\sqrt{x^2 + x + 2} + (x - 5)}$$

Así, es más fácil calcular el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{11x - 23}{\sqrt{x^2 + x + 2} + (x - 5)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{11x - 23}{\sqrt{x^2} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{11x - 23}{x + x} = \frac{11}{2}$$

Ejercicio 11:

Problema 60. Calcular $\lim\limits_{x \to 7} = \dfrac{x - 7}{\sqrt{x - 4} - \sqrt{3}}$, x − 7 ≠ 0

Solución:

$$\lim_{x \to 7} = \frac{x-7}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3}} = \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}\right)}{(\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{3})^2} =$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{(x-7)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}\right)}{x-4-3} = \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}\right)}{x-7} = \lim_{x \to 7} \sqrt{x-4}+\sqrt{3} == \sqrt{3}+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Ejercicio 12:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - \sqrt{x^2 - 1}}{5 - \sqrt{1 + x^2}}$$

Solución

Tenemos infinito partido infinito.

El límite depende de los sumandos x^2, así que podemos omitir los otros:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5 - \sqrt{x^2 - 1}}{5 - \sqrt{1 + x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{-\sqrt{x^2}} = 1$$

Ejercicio 13:

Problema 58. Calcular el $\lim_{x \to -4} \frac{x+4}{\sqrt{x+4}}$, $x + 4 \neq 0$

Solución:

$$\lim_{x \to -4} \frac{x+4}{\sqrt{x+4}} = \lim_{x \to -4} \frac{(x+4)(\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x+4})} = \lim_{x \to -4} \frac{(x+4)(\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+4})^2} = \lim_{x \to -4} \frac{(x+4)(\sqrt{x+4})}{x+4}$$

$$\lim_{x \to -4} \sqrt{x+4} = \sqrt{-4+4} = 0$$

Ejercicio 14: Calcula los siguientes límites:

a.- $\displaystyle lím_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{4x-1}}$	Sol: 1/2		b.- $\displaystyle lím_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[5]{3x^2 - x + 1}}{\sqrt{4x-1}}$	Sol: 0
c.- $\displaystyle lím_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4-x}}{x^{\frac{1}{3}}}$	Sol: $-\infty$		d.- $\displaystyle lím_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x}{5x^2 - x + 1}$	Sol: $+\infty$
e.- $\displaystyle lím_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$	Sol:3/2		f.- $\displaystyle lím_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}\right)$	Sol:0
g.- $\displaystyle lím_{x \to +\infty} \frac{x}{x - \sqrt{x^2 + 3x}}$	Sol: $+\infty$		h.- $\displaystyle lím_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$	Sol:0

i.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-4}$	Sol:1		j.- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$	Sol:-1
k.- $\lim\limits_{x\to5}\left(\sqrt[3]{x^2+2}-x\right)$	Sol:-2		l.- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-6x^2+5x}{x^4-x^3+x-1}$	Sol:-2
m.- $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+1)^3}{(x+3)^4}$	Sol: $-\infty$		n.- $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}$	Sol:-2
ñ.- $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}$	Sol:9/17		o.- $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$	Sol:2
p.- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\lvert x\rvert}{2x}$	Sol:0		q.- $\lim\limits_{x\to3^+}\left(\dfrac{x-1}{2x-4}\right)^{\frac{1}{x-3}}$	Sol: $e^{\frac{-1}{2}}$
r.- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2-4}\right)^{\frac{1}{x-3}}$	Sol:1		s.- $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-x}{3x^4+1}\right)^{\frac{-1}{x}}$	Sol:e
t.- $\lim\limits_{x\to3^+}\left(2-\dfrac{x-1}{2x-4}\right)^{\frac{1}{x-3}}$	Sol : $\sqrt{e}$		u.- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}\right)^{2x-3}$	Sol : 1
v.- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)^x$	Sol : $\dfrac{\sqrt{e}}{e}$		x.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$	Sol : -1
y.- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{x^2-2\lvert x-1\rvert-1}$	Sol : 1/3		z.- $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-x}{3x^4+1}\right)^{\frac{-1}{x}}$	Sol :e