EJERCICIOS UNIDAD 1: DOMINIOS

Ejercicio 1: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^2 + x - 8$

Sol.:
Dado que se trata de una función polinómica, su dominio son todos los números reales: $Dom(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 4$

Sol.:
Como se trata de una función polinómica, en este caso una función constante, su dominio es: $Dom(f) = \mathbb{R}$

c) $y = \dfrac{x^3 - 2x - 3}{3}$

Sol.:
Se trata de una función polinómica pues es la función $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x - 1$ que resulta del expandir la fracción.

Su dominio es: $Dom(f) = \mathbb{R}$

d) $y = \dfrac{-1}{x-8}$

Sol.:
Se trata de averiguar que números reales anulan el denominador pues para esos números no podríamos dividir por 0.

$x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el 8: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{8\}$

e) $f(x) = \dfrac{x-4}{5x+10}$

Sol.:
Se trata de averiguar que números reales anulan el denominador pues para esos números no podríamos dividir por 0.

$5x + 10 = 0 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el -2: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

f) $f(x) = 6 + \dfrac{x^2}{3x-2}$

Sol.:
Se trata de averiguar que números reales anulan el denominador pues para esos números no podríamos dividir por 0.

$3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$. Por tanto, su dominio es: $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

g) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

Sol.:
Veamos dónde se anula el denominador:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Por tanto, su dominio es: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

h) $y = -3 + x + \dfrac{6}{x^2 + 6x}$

Sol.:

Veamos dónde se anula el denominador:

$x^2+6x=0 \Rightarrow x\cdot(x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+6=0 \Rightarrow x=-6 \end{cases}$. Por tanto, su dominio es: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-6,0\}$

i) $y=\dfrac{-5x+1}{x^2+x-6}$

Sol.:

Veamos dónde se anula el denominador:

$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{2}=2 \\ x=\dfrac{-6}{2}=-3 \end{cases}$. Por tanto, su dominio es:

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-3,2\}$

j) $y=\dfrac{x+9}{x^2+x+12}$

Sol.:

Veamos dónde se anula el denominador:

$x^2+x+12=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-48}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-47}}{2}$, que no tiene soluciones, es decir, no se anula nunca el denominador, y así su dominio son todos los números reales. Por tanto, su dominio es: $Dom(f)=\mathbb{R}$

k) $y=\dfrac{2x+3}{x\cdot(x+2)\cdot(x+1)}$

Sol.:

Veamos dónde se anula el denominador:

$x\cdot(x+2)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$, por lo que: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0,-2,-1\}$

<u>**Ejercicio 2**</u>: Calcula el dominio de las siguientes funciones irracionales:

a) $y=\sqrt[3]{x+2}$

Sol.:

Primero nos fijamos en el índice de radicando que es 3, impar, luego la raíz se puede calcular siempre que el radicando tenga sentido. En este caso, como el radicando es $x+2$ que es un polinomio y siempre tiene sentido, se tiene que: $Dom(f)=\mathbb{R}$

b) $f(x)=\sqrt[7]{\dfrac{x}{5x+10}}$

Sol.:

El índice es impar, 7, y entonces nos fijamos en el radicando $\dfrac{x}{5x+10}$ en el cual hemos de descartar los números reales que anulen el denominador.

$5x+10=0 \Rightarrow 5x=-10 \Rightarrow x=-2$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el -2:

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{2}{x}}$

Sol.:

El índice es impar, 3, y entonces nos fijamos en el radicando $\frac{2}{x}$ en el cual hemos de descartar los números reales que anulen el denominador.

$x=0$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el -2: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

d) $f(x)=\sqrt{-2x+5}$

Sol.:

El índice es par, luego la raíz tiene sentido cuando el radicando sea positivo o 0. Para hacerlo vemos primero dónde se anula el radicando: $-2x+5=0 \Rightarrow -2x=-5 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$

Ahora construimos una tabla de signos para saber dónde es positivo: con los dos intervalos que nos salen al usar $\frac{5}{2}$ para dividir la recta real.

En cada uno de esos intervalos cogemos un número y sustituimos en el radicando y consideramos el signo del número resultante.

	$(-\infty,\frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2},+\infty)$
$-2x+5$	Probando con $x=0$ nos resulta $-2\cdot0+5=5$ que es positivo **+**	Probando con $x=7$ nos resulta $-2\cdot7+5=-14+5=-9$ que es negativo **-**

El dominio es ese intervalo donde ha salido positivo, incluyendo el extremo $x=\frac{5}{2}$, pues la raíz cuadrada de 0 tiene sentido. Por tanto, $Dom(f)=(-\infty,\frac{5}{2}]$

e) $y=\sqrt[8]{3x-6}$

Sol.:

El índice es par, luego la raíz tiene sentido cuando el radicando sea positivo o 0. Para hacerlo vemos primero dónde se anula el radicando: $3x-6=0 \Rightarrow x=2$

Ahora construimos una tabla de signos para saber dónde es positivo: con los dos intervalos que nos salen al usar $x=2$ para dividir la recta real.

En cada uno de esos intervalos cogemos un número y sustituimos en el radicando y consideramos el signo del número resultante.

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$3x-6$	Probando con $x=0$ nos resulta $3\cdot0-6=-6$ que es negativo **-**	Probando con $x=4$ nos resulta $3\cdot4-6=6$ que es positivo **+**

Por tanto, $Dom(f)=[2,+\infty)$

f) $y=\sqrt{x^2-3x-4}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el radicando:

Sol.:

$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-1 \end{cases}$ Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,4)$	$(4,+\infty)$
x^2-3x-4	Probando con $x=-2$ nos resulta $(-2)^2-3\cdot(-2)-4=4+6-4=6$ que es positivo **+**	Probando con $x=0$ nos resulta $0^2-3\cdot 0-4=-4$ que es negativo **-**	Probando con $x=5$ nos resulta $5^2-3\cdot 5-4=25-15-4=6$ que es positivo **+**

Como los extremos tienen sentido: $Dom(y)=(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$

g) $y=\sqrt[6]{2x^2-1}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el radicando:

Sol.:

$2x^2-1=0 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$
$2x^2-1$	Probando con $x=-2$ nos resulta $2\cdot(-2)^2-1=8-1=7$ que es positivo **+**	Probando con $x=0$ nos resulta $2\cdot 0^2-1=-1$ que es negativo **-**	Probando con $x=5$ nos resulta $2\cdot 5^2-1=50-1=49$ que es positivo **+**

Como los extremos tienen sentido: $Dom(y)=(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$

h) $y=\sqrt{x^2+x+1}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el radicando:

Sol.:

$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ No existen soluciones. Se trata de un caso especial, en el cual el radicando siempre es positivo o siempre es negativo. Comprobamos con un valor de x si es positivo o negativo, por ejemplo, para $x=0$ sustituimos: $0^2+0+1=1>0$. Podemos deducir que siempre es positivo, así, por tanto, $Dom(y)=\mathbb{R}$

i) $f(x)=\sqrt{\frac{-2x}{x-3}}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el numerador y el denominador del radicando:

Sol.:

$\begin{cases} -2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$ Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$

$\frac{-2x}{x-3}$	Probando con $x=-2$ nos resulta $\frac{4}{-5}=-\frac{4}{5}$ que es negativo -	Probando con $x=1$ nos resulta $\frac{-2}{-2}=1$ que es positivo +	Probando con $x=5$ nos resulta $\frac{-10}{2}=-5$ que es negativo -

Por lo que obtenemos que es factible en el intervalo $(0,3)$. Veamos que ocurre en $x=0$ y en $x=3$ para ver si son del dominio.

En $x=0$ al sustituir nos queda $f(0)=\sqrt{\frac{-2\cdot 0}{0-3}}=\sqrt{0}=0$ luego $x=0$ es del dominio.

En $x=3$ al sustituir nos queda $f(0)=\sqrt{\frac{-2\cdot 3}{3-3}}=\sqrt{\frac{-6}{0}}\Rightarrow \text{No } \exists$ luego $x=3$ NO es del dominio.

Concluimos entonces que $Dom(f)=[0,3)$

j) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{-2x}{x-3}}$ Es parecida a la función anterior, pero como el índice es impar, vemos dónde se anula el denominador del radicando que serán los puntos que no son del dominio:

Sol.:

$x-3=0\Rightarrow x=3\Rightarrow \; Dom(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

Ejercicio 3: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

FUNCIÓN	DOMINIO
a. $f(x)=9-4x^2$	$Dom\ f=R$
b. $g(x)=\frac{x}{7-x^2}$	$Dom\,g=R-\{\sqrt{7},-\sqrt{7}\}$
c. $h(x)=\frac{x-1}{x^3-2x^2-5x+6}$	$Dom\,h=R-\{-2,1,3\}$
d. $y=1+\frac{1}{x}-\frac{x}{x-1}$	$Dom\,y=R-\{0,1\}$
e. $f(x)=\sqrt[5]{\frac{x}{7-x^2}}$	$Dom\ f=R-\{\sqrt{7},-\sqrt{7}\}$
f. $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x}}$	$Dom\ f=(0,+\infty)$
g. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$	$Dom\,y=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$
h. $y=\frac{-2}{\sqrt{x^2-5x+6}}$	$Dom\,y=(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$
i. $y=\frac{-2}{\sqrt[7]{x^2-5x+6}}$	$Dom\,y=R-\{2,3\}$
j. $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{3x-5}}$	$Dom\ f=(-\infty,-2]\cup\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$
k. $g(x)=\sqrt[4]{x^2+5x+8}$	$Dom\,g=R$
l. $l(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$	$Dom\,l=[-1,3]$
m. $m(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x+1}$	$Dom\,m=[-3,3]-\{-1\}$
n. $y=e^{1/x}+2^{-1/x-7}$	$Dom\,y=R-\{0,7\}$

ñ. $\tilde{n}(x)=\ln(2x+3)$	$Dom\ \tilde{n}=\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$
o. $k(x)=\ln(2x+3)+\frac{1}{x}$	$Dom\ k=\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)-\{0\}$
p. $f(x)=sen\sqrt{1-x^2}$	$Dom\ f=[-1,1]$
q. $f(x)=x^2-3x+\ln 5^{\cos x}$	$Dom\ f=$ R

Ejercicio 4:

Determina el dominio de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{7}$ b) $f(x)=\dfrac{7}{x-3}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ d) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x}$

a) $\text{Dom } f=\mathbb{R}$

b) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{3\}$

c) $\text{Dom } f=\mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-2,0\}$

Ejercicio 5:

Estudia el dominio de las siguientes funciones.

a) $y=\sqrt{x+3}$

b) $y=\sqrt{2x^2+3x-2}$

c) $y=\sqrt{x^2-4x+4}$

d) $y=\sqrt{5-2x}$

e) $y=\sqrt{x^2+2x+9}$

f) $y=\sqrt{6+x-x^2}$

a) $\text{Dom } f=[-3,+\infty)$

b) $2x^2+3x-2=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\text{Dom } f=(-\infty,-2)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

c) $x^2-4x+4=0 \rightarrow x=2$

$\text{Dom } f=\mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f=\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$

e) $x^2+2x+9=0 \rightarrow \Delta=-32<0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones.

$\text{Dom } f=\mathbb{R}$

f) $6+x-x^2=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$

$\text{Dom } f=[-2,3]$