

**EJERCICIOS UNIDAD 1: CONTINUIDAD****Ejercicio 1:**

Estudia la continuidad de las funciones en  $x = 3$ , y si presentan discontinuidad, decide de qué tipo de discontinuidad se trata.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{12}{x-3} & \text{si } x < 3 \\ x - 15 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{12}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$\text{a) } f(3) = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 2x + 3) = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

Como  $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ , la función es continua en  $x = 3$ .

$$\text{b) } f(3) = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{12}{x-1} = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \text{ y la función no es continua en } x = 3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

$$\text{d) } f(3) = -12$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{12}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 15) = -12 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \text{ y la función no es continua en } x = 3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

e)  $f(3) = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-1} = 2$$

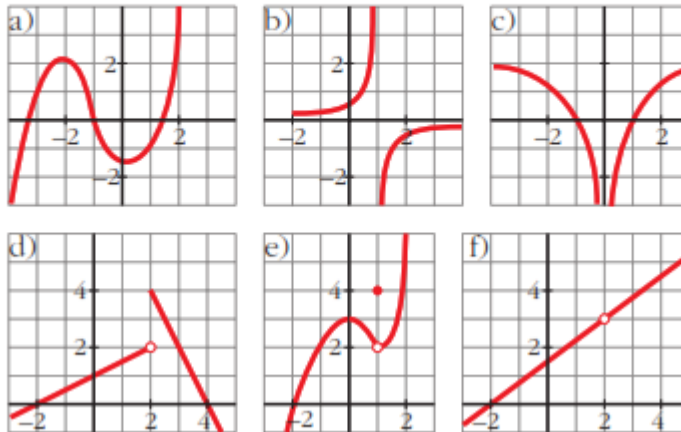
Como  $f(3) \neq \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ , la función no es continua en  $x = 3$ .

Se trata de un punto de discontinuidad evitable.

**Ejercicio 2:**

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?

b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



a) Solo la a).

b) Rama infinita en  $x = 1$  (asíntota vertical).

c) Rama infinita en  $x = 0$  (asíntota vertical).

d) Salto en  $x = 2$ .

e) Punto desplazado en  $x = 1$ ;  $f(1) = 4$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ .

f) No está definida en  $x = 2$ .

**Ejercicio 3:**

Comprueba si la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  es continua en  $x = 0$ .

➤ Recuerda que para que  $f$  sea continua en  $x = 0$ , debe verificarse que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Es continua en  $x = 0$ .

**Ejercicio 4:**

Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad \text{en } x = -1$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2)-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

a) No, pues no existe  $f(-1)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = -2$ . Sí es continua en  $x = 2$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$ . No es continua en  $x = 1$ .

**Ejercicio 5:**

Calcula, en cada caso, el valor de  $k$  para que la función  $f(x)$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 + k \end{array} \right\} 5 = 3 + k \rightarrow k = 2$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array} \right\} 5 = 4 + 2k \rightarrow k = 1/2$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \rightarrow k = 1$$

**Ejercicio 6:**

Calcula  $a$  para que las siguientes funciones sean continuas en  $x = 1$ :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 - a \end{aligned} \right\} 2 = 4 - a \rightarrow a = 2$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{aligned} \right\} a = 2$$

**Ejercicio 7:**

Calcula el valor de  $k$  para que la siguiente función sea continua en  $x = 1$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq 2 \\ 2k + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Debe ocurrir que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = 2k + 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2 \Rightarrow 2k + 1 = -2, k = -\frac{3}{2}$$

**Ejercicio 8:**

Halla los puntos de discontinuidad de la función  $y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$  y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2(x+3) - 12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+6-12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x-6}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} \end{aligned}$$

La función es discontinua en  $x = 3$  y en  $x = -3$ ; pues no está definida para esos valores.

- En  $x = -3$ :  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2}{(x+3)} = +\infty$

Hay una asíntota vertical en  $x = -3$ , la discontinuidad no es evitable.

- En  $x = 3$ :  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x+3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Luego, en  $x = 3$ , la discontinuidad es evitable.

**Ejercicio 9:**

Calcula el valor de  $k$  para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) • Si  $x \neq 1$ , la función es continua.

• Si  $x = 1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4 \end{aligned}$$

$$f(1) = k$$

Para que sea continua, ha de ser  $k = 4$ .

b) • Si  $x \neq 1$ , la función es continua.

• Si  $x = 1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}{(x-1)(\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f(1) = k$$

Para que sea continua, ha de ser  $k = \frac{1}{2}$ .

**Ejercicio 10:**

Calcula el valor que debe tener  $k$  para que las siguientes funciones sean continuas:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) • Si  $x \neq 2$ , la función es continua.

- En  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (k - x) = k - 2 \\ f(2) &= 2 + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } k - 2 = 3 \rightarrow k = 5$$

- b) • Si  $x \neq 0$ , la función es continua.

- En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + k) = k \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ f(0) &= 0 + k = k \end{aligned} \right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } k = -1$$

**Ejercicio 11:**

Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro  $a$ :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) • En  $x \neq 2$ , la función es continua.

- En  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ f(2) &= 4 + 2a \end{aligned} \right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } 4 + 2a = a - 4 \rightarrow a = -8$$

Por tanto, la función es continua si  $a = -8$ , y es discontinua (en  $x = 2$ ) si  $a \neq -8$ .

- b) • En  $x \neq 0$ , la función es continua.

- En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{ax} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2a) = 2a \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } 1 = 2a \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la función es continua si  $a = \frac{1}{2}$ , y es discontinua (en  $x = 0$ ) si  $a \neq \frac{1}{2}$ .

**Ejercicio 12:**

**Estudia la continuidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Si  $x \neq -1$  y  $x \neq 1 \rightarrow$  la función es continua.
- Si  $x = -1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} |x + 2| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array} \right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

- Si  $x = 1 \rightarrow$  No es continua, pues no está definida en  $x = 1$ ; no existe  $f(1)$ .  
Además:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 \end{array} \right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

**Ejercicio 13:**

Dada la función  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ :

a) Estudia su continuidad.

b) Halla  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

a) • Si  $x \neq 0$ , la función es continua.

- En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 - 0 = 1 \end{array} \right\} \text{También es continua en } x = 0.$$

Por tanto,  $f(x)$  es continua.

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$$

**Ejercicio 14:**

Se define la función  $f$  del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de  $a$  y  $b$  para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

- Para que la gráfica de  $f(x)$  pase por el origen de coordenadas, ha de ser  $f(0) = 0$ , es decir:  $f(0) = b = 0$
- Para que la función sea continua (para  $x \neq 1$ , es una función continua), tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\ f(1) = 2 + a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Han de ser iguales, es decir:} \\ 2 + a = -1 \rightarrow a = -3 \end{array}$$

Por tanto, si  $a = -3$  y  $b = 0$ , la función es continua; y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

**Ejercicio 15:**

Estudia la continuidad en  $x = 0$  de la función:  $y = 2x + \frac{|x|}{x}$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

En  $x = 0$ , la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ entonces:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - 1) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1$$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en  $x = 0$ .



**Ejercicio 16:**

Considera la función  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ . Determina su dominio. Dibuja su gráfica y razona si se puede asignar un valor a  $f(0)$  para que la función sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ , no podemos asignar ningún valor a  $f(0)$  para que la función sea continua en todo  $\mathbb{R}$  (pues en  $x = 0$  no lo es).

Gráfica:

