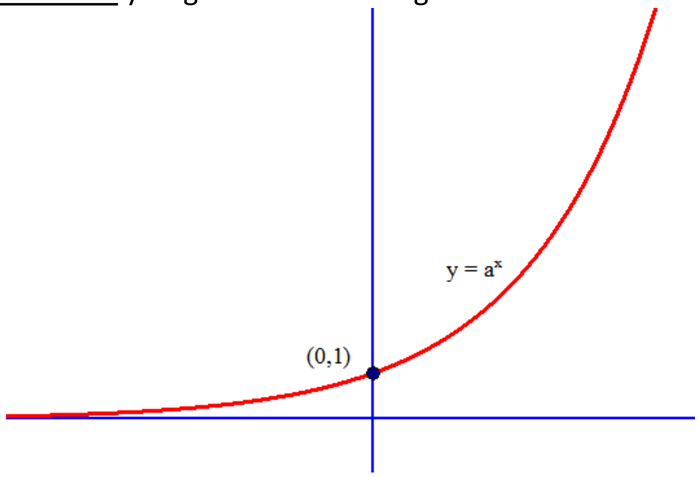
UNIDAD 9.- **Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas**
(tema 9 del libro)

1. **FUNCIÓNES EXPONENCIALES**

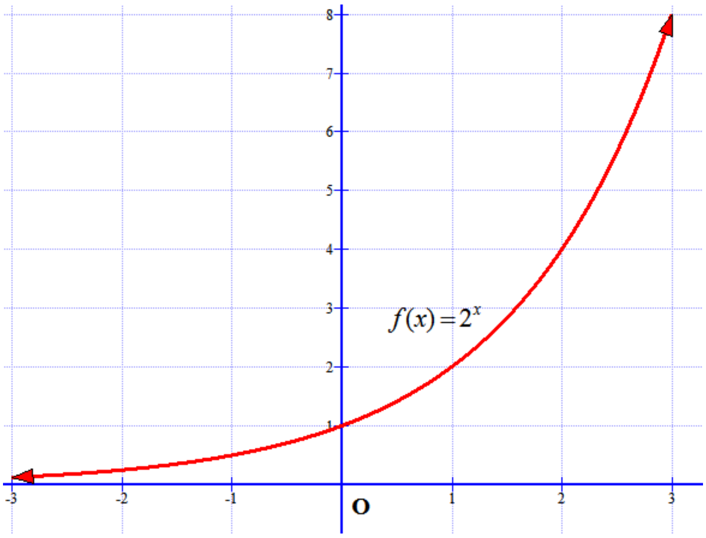
Son funciones de la forma $f(x) = a^x$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$.
Su dominio es todo R y van a estar acotadas inferiormente por 0, que es su ínfimo.
Todas pasan por el punto $(0,1)$
Su imagen es $\mathrm{Im}(a^x) = (0,+\infty)$

Vamos a distinguir dos casos:

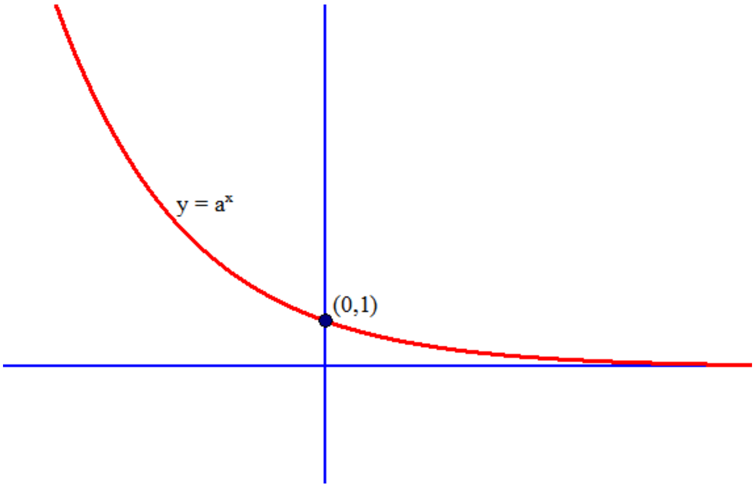
a) La base a mayor que 1 $(a > 1)$
En este caso son funciones *crecientes* y su gráfica es como sigue:



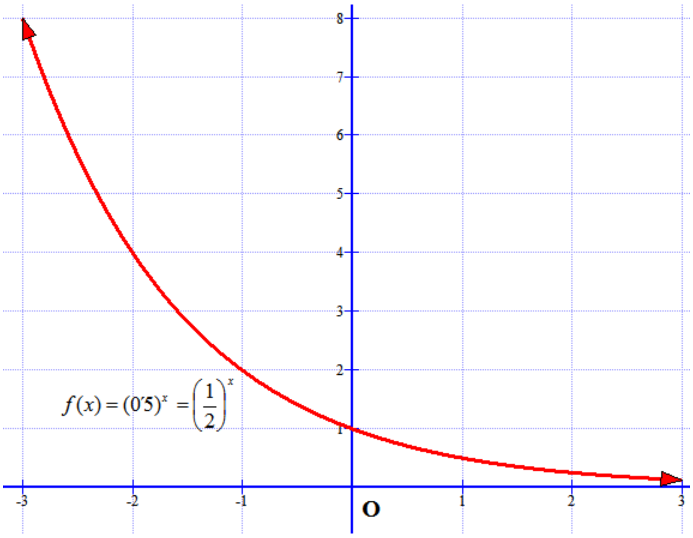
Ejemplo: Representamos gráficamente la función $f(x) = 2^x$



b) La base a entre 0 y 1 $(0 < a < 1)$
En este caso son funciones *decrecientes* y su gráfica es como sigue:



Ejemplo: Representamos gráficamente la función $f(x)=(0'5)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$



2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Son funciones de la forma $f(x)=\log_a x$, donde $a>0$ y $a\neq 1$.

Como sabemos el argumento ha de ser estrictamente positivo, por tanto $Dom(\log_a)=(0,+\infty)=R^+$

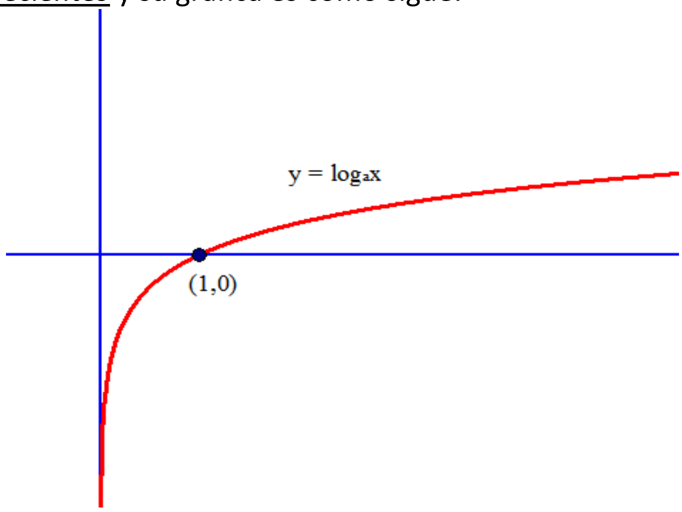
Todas pasan por el punto $(1,0)$

Su imagen es todo R

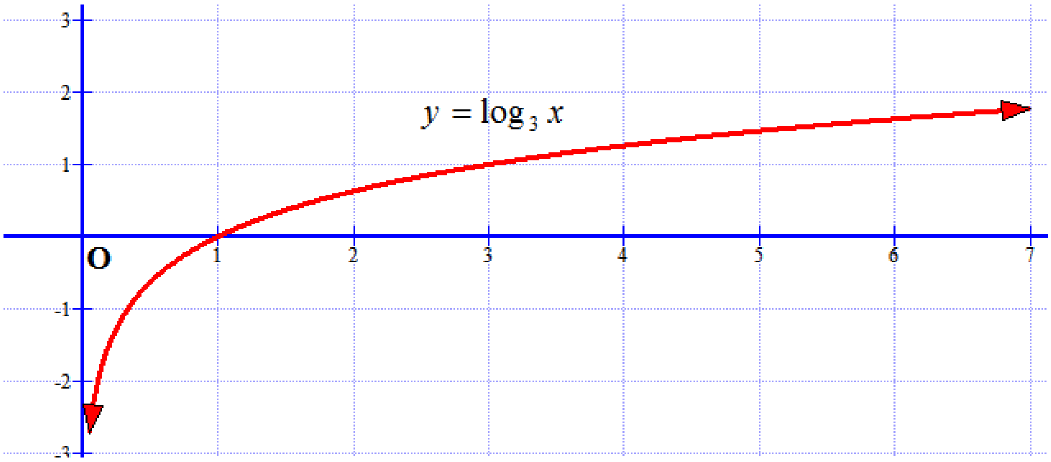
Vamos a distinguir dos casos:

a) La base a mayor que 1 $(a>1)$

En este caso son funciones *crecientes* y su gráfica es como sigue:

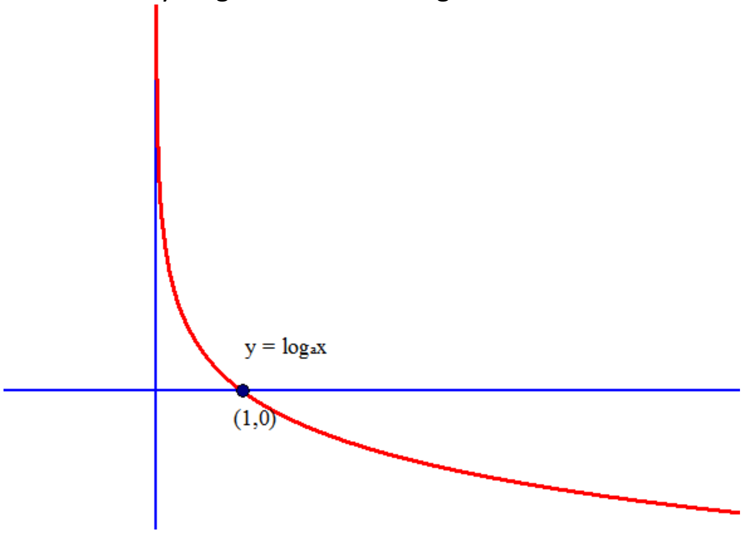


Ejemplo: Representamos gráficamente la función $y = \log_3 x$

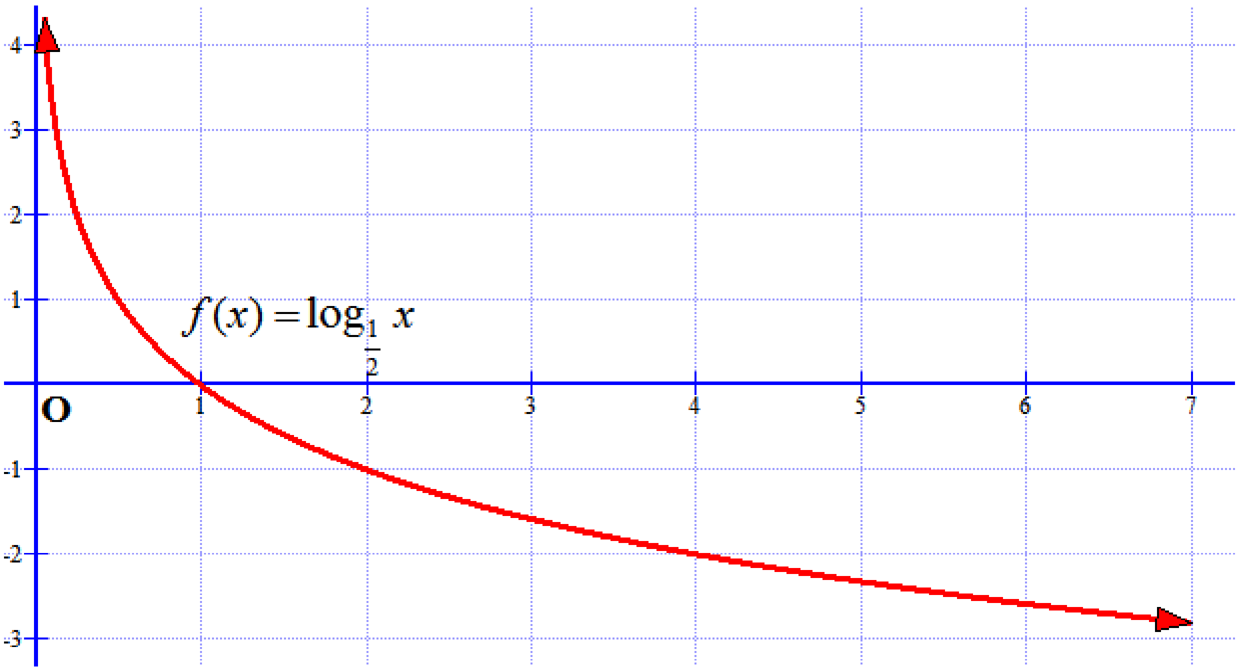


b) La base a entre 0 y 1 $(0 < a < 1)$

En este caso son funciones decrecientes y su gráfica es como sigue:



Ejemplo: Representamos gráficamente la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



3. UNIDADES ANGULARES. TRIGONOMETRÍA

La palabra trigonometría proviene del griego: *trigonos* (triángulo) y *metria* (medida). En sus orígenes esta rama de la matemática se utilizó para resolver problemas de agrimensura y astronomía, pero con el desarrollo de la ciencia se ha convertido en un instrumento indispensable en la física, la ingeniería, la medicina y todo otro proceso en el que se encuentren comportamientos que se repiten cíclicamente. Sirve para estudiar fenómenos vibratorios, como por ejemplo la luz, el sonido, la electricidad., etc.

SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

a) Sistema sexagesimal

La unidad de medida angular es el grado sexagesimal, que es la noventava parte del ángulo recto y se simboliza 1^{o} . La sesentava parte de un grado es un minuto (1') y la sesentava parte de un minuto es un segundo (1").

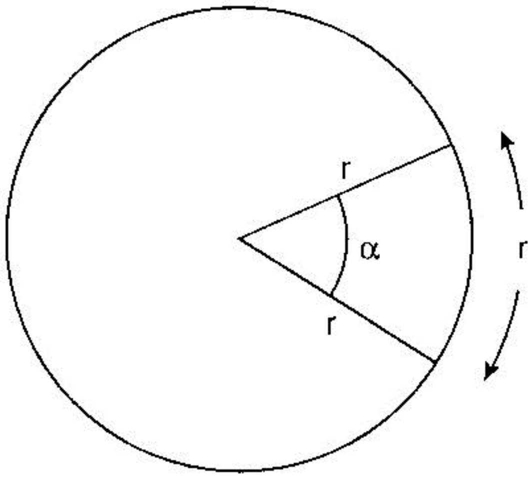
Por tanto, $\dfrac{\text{ángulo recto}}{90} = 1^{o}$ $\qquad \dfrac{1^{o}}{60} = 1'$ $\qquad \dfrac{1'}{60} = 1''$

Una circunferencia completa mide 360^{o}
Un ángulo llano mide 180^{o}

b) Sistema radial o circular: el radián

La unidad de medida es el *radián*, que se define como sigue:

Un ***radián*** *es la medida del ángulo con vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados determinan sobre ella un arco de longitud igual al radio r .*



α = 1 radian

Para relacionar un sistema de medición con otro, observamos la siguiente tabla:

Ángulo	Sistema sexagesimal	Sistema circular
Completo	360º	2π radianes
Llano	180º	π radianes
Recto	90º	$\frac{\pi}{2}$ radianes

Con la tabla anterior podemos establecer simples reglas de tres para pasar de un sistema de medición a otro.

Ejemplo: Calcula los grados sexagesimales que tiene 1 radián

Haciendo uso de las proporciones y teniendo en cuenta la medida del ángulo llano, tenemos

$$\pi \longrightarrow 180º$$

$$1 \longrightarrow x = \frac{1 \cdot 180^{o}}{\pi} \cong 57^{o}\ 17'\ 45''$$

Ejemplo: Pasar a radianes los siguientes ángulos 30^{o}, 60^{o}, 45^{o}, 270^{o}

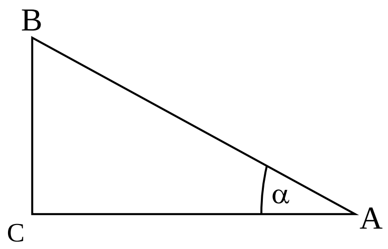
$30^{o} = \frac{180^{o}}{6} = \frac{\pi}{6} rad$	$60^{o} = \frac{180^{o}}{3} = \frac{\pi}{3} rad$
$45^{o} = \frac{180^{o}}{4} = \frac{\pi}{4} rad$	$270^{o} = 180^{o} + 90^{o} = (\pi + \frac{\pi}{2}) rad = \frac{3\pi}{2} rad$

NOTA: Las equivalencias que debemos saber u obtener rápidamente son:

$0^{o} = 0\, rad$	$30^{o} = \frac{\pi}{6} rad$	$45^{o} = \frac{\pi}{4} rad$	$60^{o} = \frac{\pi}{3} rad$	$90^{o} = \frac{\pi}{2} rad$	$180^{o} = \pi\, rad$
$120^{o} = \frac{2\pi}{3} rad$	$135^{o} = \frac{3\pi}{4} rad$	$150^{o} = \frac{5\pi}{6} rad$	$270^{o} = \frac{3\pi}{2} rad$	$360^{o} = 2\pi\, rad$	

4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos un triángulo rectángulo como el de la figura:



Definimos las razones trigonométricas como sigue:

- *SENO*: El seno del ángulo α se define como el cociente entre la longitud del cateto opuesto de α y la longitud de la hipotenusa $sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{BC}{AB}$
- *COSENO*: El coseno del ángulo α se define como el cociente entre la longitud del cateto contiguo de α y la longitud de la hipotenusa $\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{AC}{AB}$
- *TANGENTE*: La tangente del ángulo α se define como el cociente entre la longitud del cateto opuesto de α y la longitud del cateto contiguo $tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{BC}{AC}$

Propiedad: Se cumple que $tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$

Propiedad fundamental: Se cumple que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

Uso de la calculadora

Nosotros para calcular las razones trigonométricas vamos a utilizar la calculadora normalmente. Por tanto hemos de practicar con la calculadora, y saber ponerla en el modo adecuado para que los ángulos sean considerados en el sistema de medida adecuado:

Modo DEG: En este caso las unidades de medida serán grados sexagesimales

Modo RAD: en este caso las unidades de medida son radianes

Poner un modo u otro depende del modelo de calculadora que poseamos.

Ejemplo: Calcular

$sen 12^{o} = 0.2079$ $\quad tg 98^{o} = -7.1154$ $\quad \cos 7\pi = -1$

$\cos 234^{o} = -0.5878$ $\quad \cos 687^{o} = 0.8387$ $\quad tg\frac{4\pi}{5} = -0.7265$

$sen(-312^{o}) = 0.7431$ $\quad sen\frac{5\pi}{2} = 1$ $\quad sen 5 = -0.9589$

Tenemos la siguiente tabla de razones trigonométricas para los ángulos más usados del primer cuadrante. Es conveniente saberla.

Ángulo α	**0 = 0º**	$\frac{\pi}{6} = 30^{o}$	$\frac{\pi}{4} = 45^{o}$	$\frac{\pi}{3} = 60^{o}$	$\frac{\pi}{2} = 90^{o}$
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe

5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

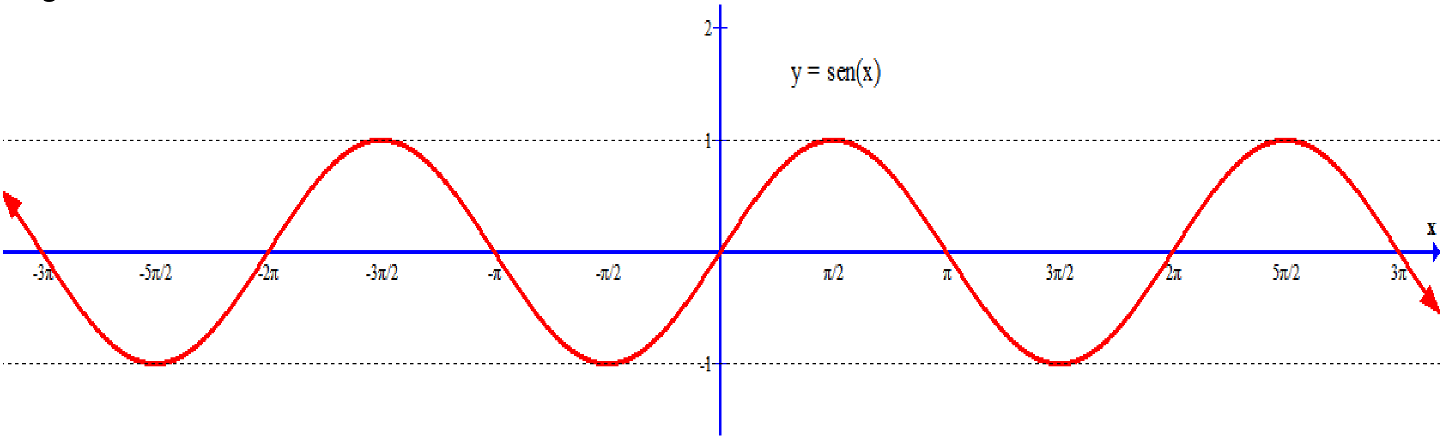
- *FUNCIÓN SENO*

Se trata de la función $f(x) = sen(x)$, cuyo dominio es todo R

Tiene simetría impar y es periódica de periodo 2π

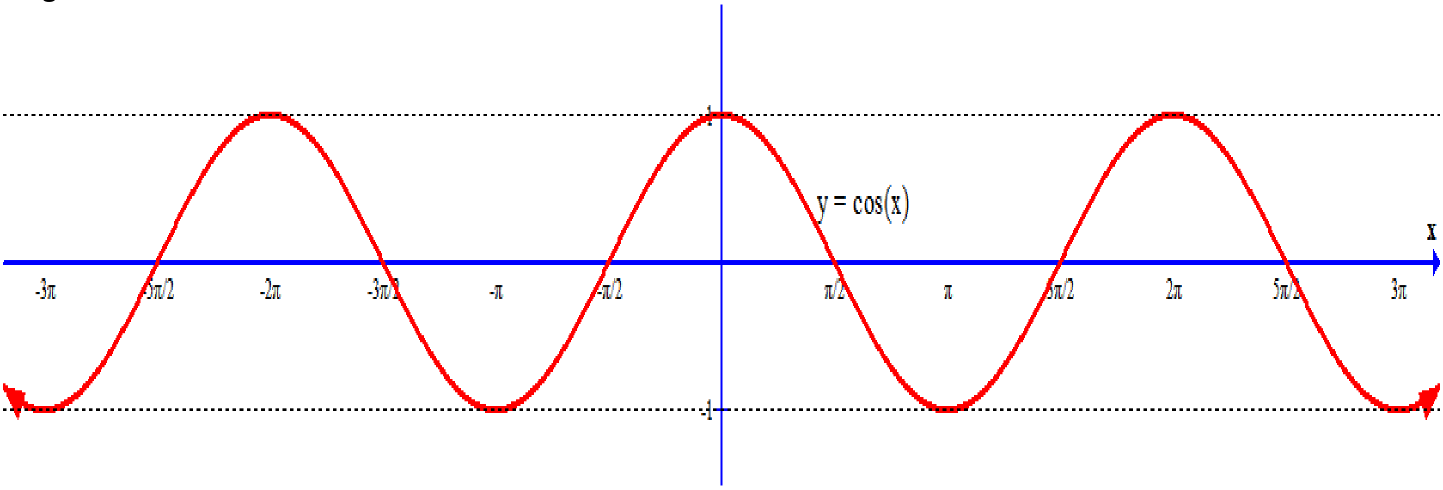
Su imagen es: $\mathrm{Im}(sen) = [-1,1]$

Su gráfica es:



- ***FUNCIÓN COSENO***

Se trata de la función $f(x)=\cos(x)$, cuyo dominio es todo R
Tiene simetría par y es periódica de periodo 2π
Su imagen es: $\text{Im}(\cos)=[-1,1]$
Su gráfica es:



- ***FUNCIÓN TANGENTE***

Se trata de la función $f(x)=tg(x)$, cuyo dominio es todo R salvo los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$

Matemáticamente se escribe así: $Dom(tg)=R-\left\{x\in R,, x=(2k+1)\frac{\pi}{2},, k\in Z\right\}$

Tiene simetría impar y es periódica de periodo π
Su imagen es todo R: $\text{Im}(tg)=R$
Su gráfica es: