UNIDAD 6: **FUNCIONES POLINÓMICAS**

CONTENIDO

1 FUNCIONES POLINÓMICAS

Una **función polinómica** es aquella función que tiene por expresión algebraica un polinomio, es decir, es de la forma $y = P(x)$ donde $P(x)$ es un polinomio.

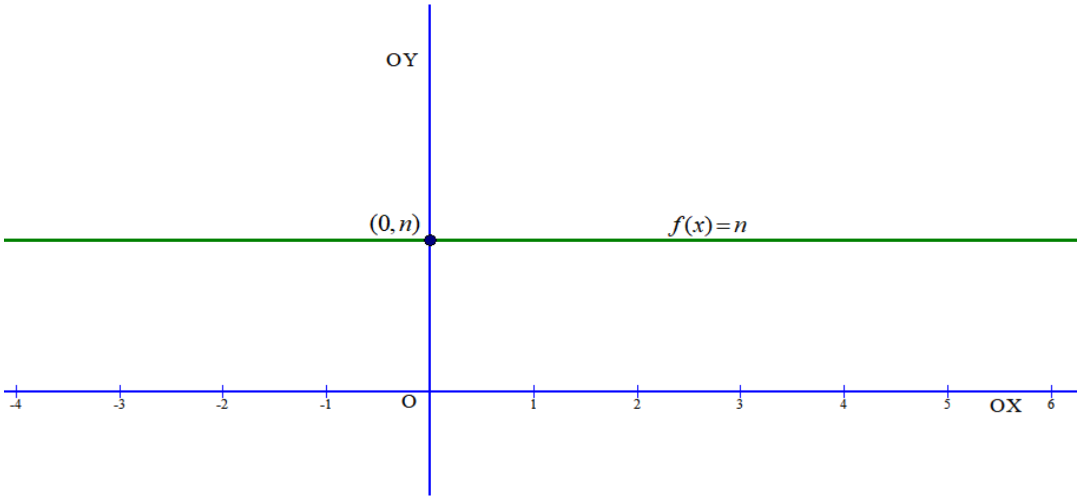
El dominio de las funciones polinómicas es todo $\mathbb{R}$, es decir, $Dom(y) = \mathbb{R}$

Como ejemplo de funciones polinómicas podemos dar:

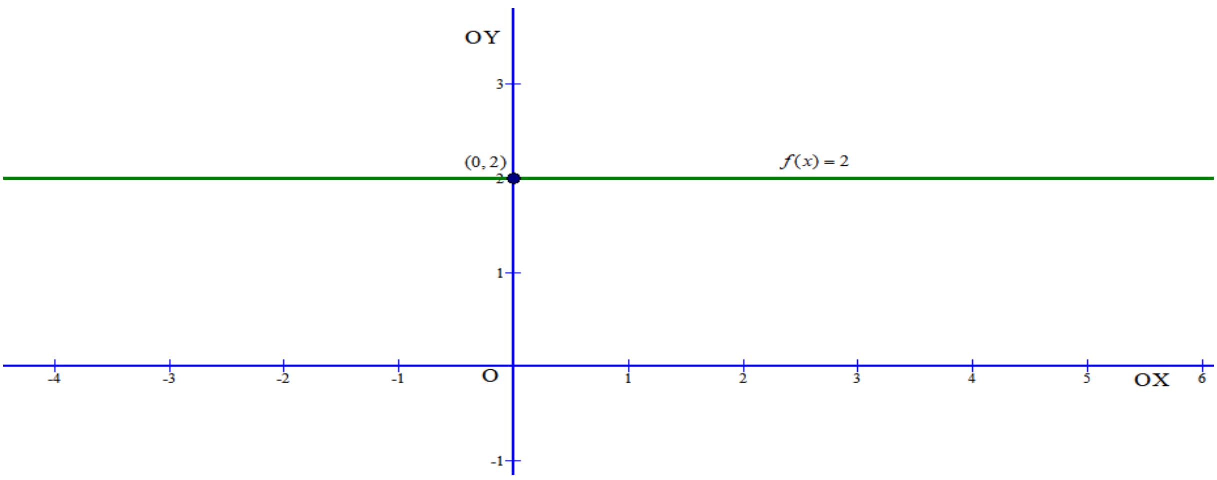
- $f(x) = 2$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 0
- $g(x) = 2x + 1$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 1
- $y = x^2 - 4x + 3$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 2
- $h(x) = x^3 - 8$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 3
- $y = x^4 - x^2$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 4

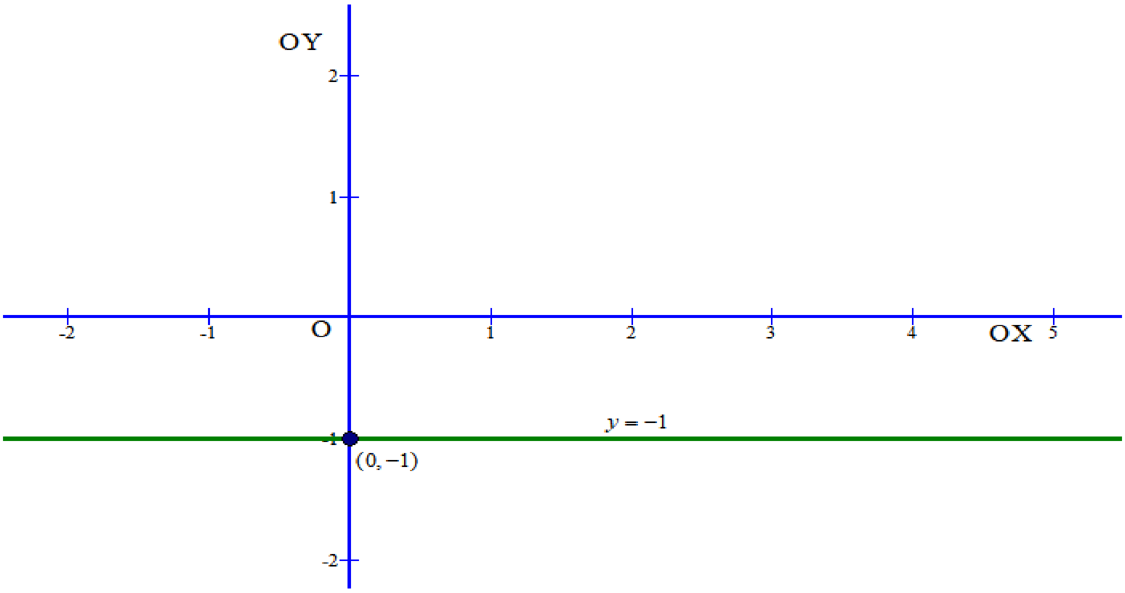
2 RECTAS: FUNCIONES POLINÓMICAS CONSTANTES Y DE PRIMER GRADO

Las **funciones constantes** son aquellas de la forma $f(x) = n$. Su gráfica es una **recta** paralela el eje OX que pasa por en punto $(0, n)$ como se puede ver en el gráfico adjunto

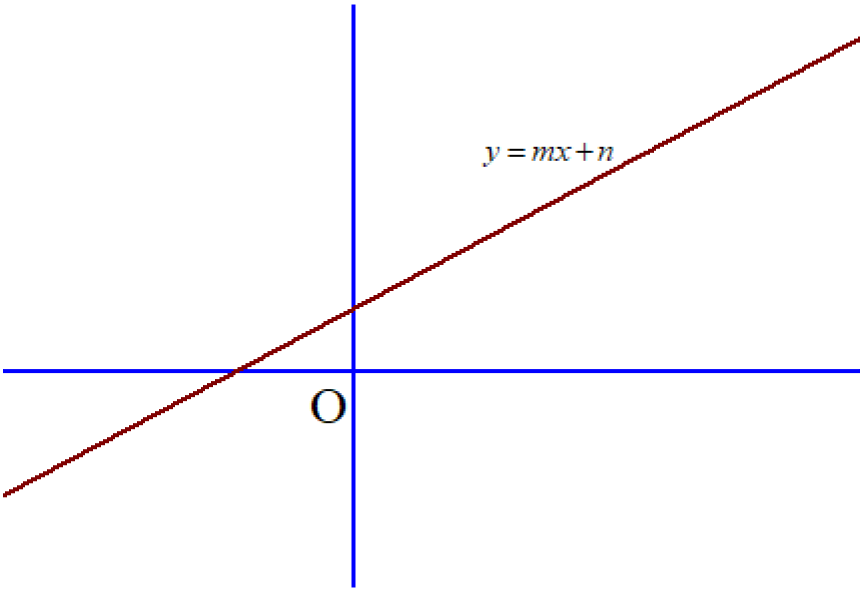


Ejemplo: Las funciones constantes $f(x) = 2$ y $y = -1$ tienen las siguientes gráficas:





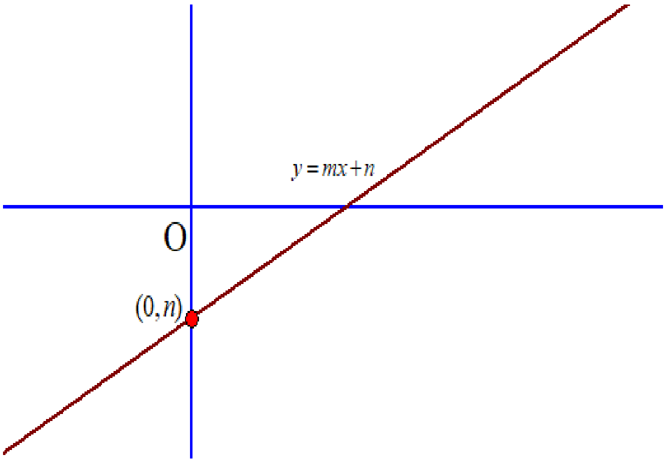
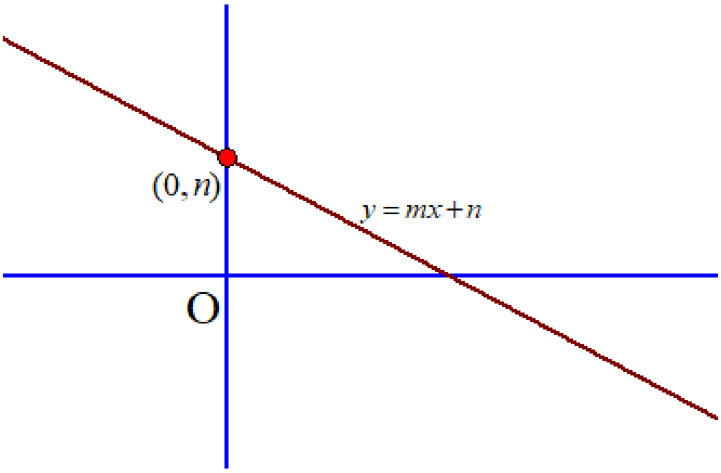
Las **funciones polinómicas de primer grado**, también llamadas **funciones afines**, son aquellas cuya ecuación es del tipo $f(x)=mx+n$. Su representación gráfica es una recta en el plano.



A m se le conoce como **pendiente** de la recta y a n como **ordenada en el origen**.

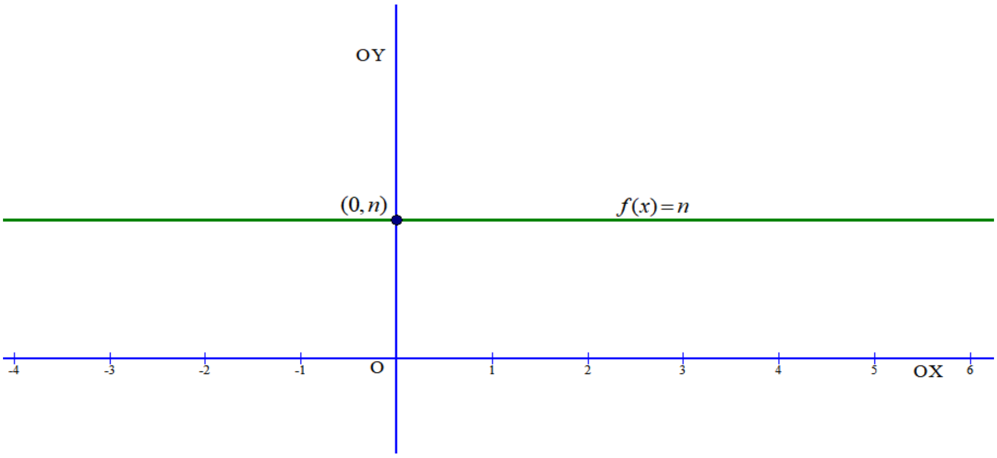
Como características tenemos:

- Su dominio es todo $\mathbb{R}$
- Pasa por el punto $(0,n)$
- Si $m>0$, es decir, la pendiente es positiva, la gráfica es creciente
- Si $m<0$, es decir, la pendiente es negativa, la gráfica es decreciente

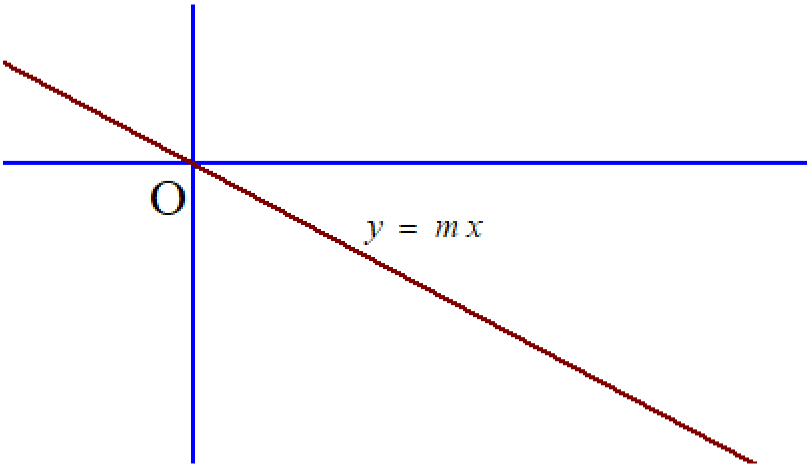
Si $m>0$, es decir, positiva, la gráfica es creciente y es como sigue: 	Si $m<0$, es decir, negativa, la gráfica es decreciente y es como sigue: 

Dentro de las funciones afines podemos distinguir dos casos especiales para una función afín $y=mx+n$

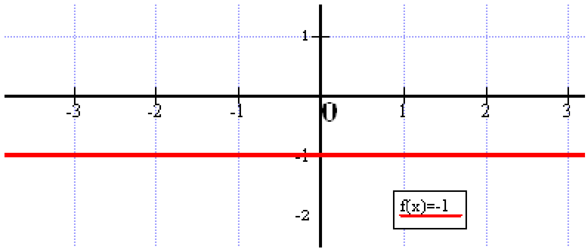
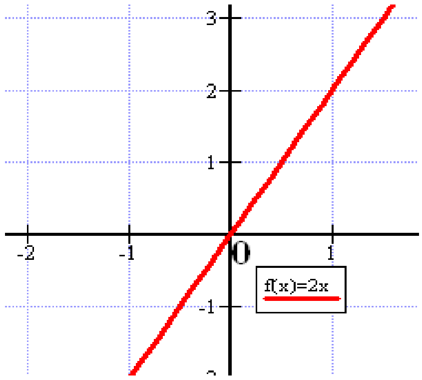
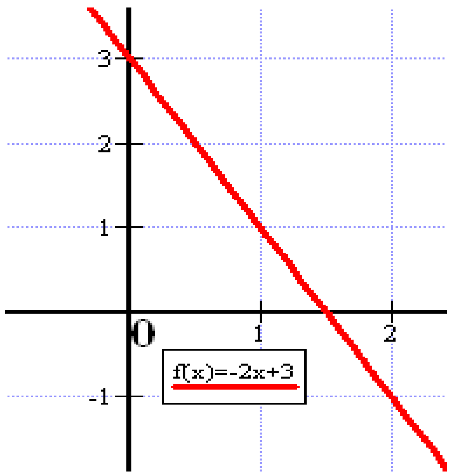
· Si $m=0$, la función $y=n$ se denomina **función constante** como ya hemos visto anteriormente. Su gráfica es una recta paralela al eje OX , que pasa por el punto $\boxed{(0,n)}$.



· Si $n=0$, la función $y=mx$ se denomina **función lineal** y su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el origen de coordenadas $(0,0)$



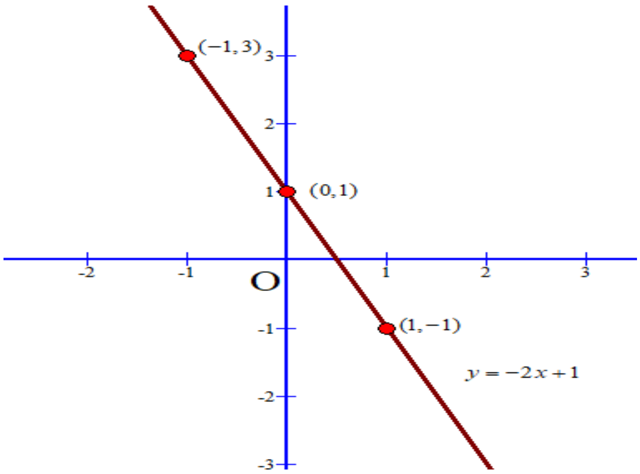
Resumiendo:

Tipo	**Ejemplo**	**Gráfica**
Constantes $f(x)=k$ Su gráfica es una recta horizontal La pendiente $m=0$	$y=-1$ $Dom(f)=\mathbb{R}$ $Recorr(f)=\{-1\}$	
Lineales $f(x)=mx$ Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas O(0,0) La ordenada en el origen $n=0$	$f(x)=2x$ $Dom(f)=\mathbb{R}$ $Recorr(f)=\mathbb{R}$	
Afines $f(x)=mx+n$ Su gráfica es una recta inclinada La pendiente y la ordenada en el origen no son nulas $m\neq 0$ y $n\neq 0$	$f(x)=-2x+3$ $Dom(f)=\mathbb{R}$ $Recorr(f)=\mathbb{R}$ La recta pasa por el punto (0,3)	

Para representar este tipo de funciones simplemente hemos de usar una tabla de valores para conocer distintos puntos por donde pasa.

Ejemplo: Vamos a representar gráficamente la función $y=-2x+1$, para ello hacemos una tabla de valores previamente. Ya sabemos que pasa por el punto $(0,1)$ y que es decreciente.

x	y
1	-1
-1	3
0	1



Ejemplo: Representa gráficamente las rectas:

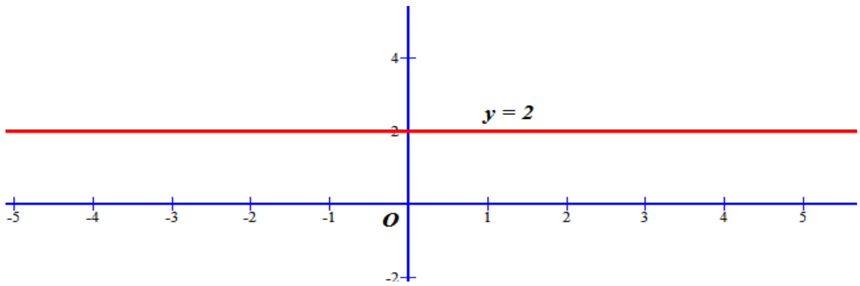
a)

Es una recta horizontal

Tabla de valores

$f(x) = 2$

x	0	1	-1
y	2	2	2

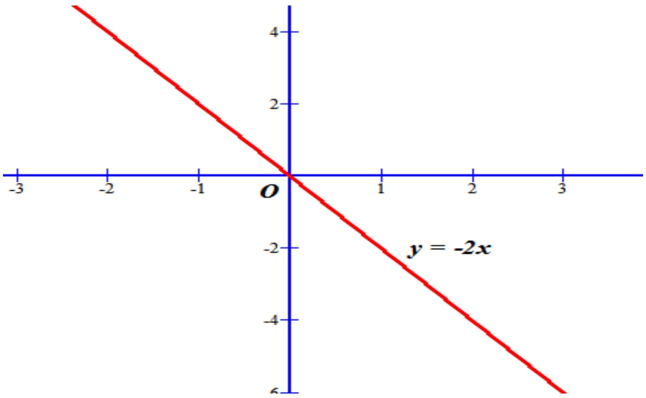


b)

Tabla de valores

$f(x) = -2x$

x	0	1	-1
y	0	-2	2

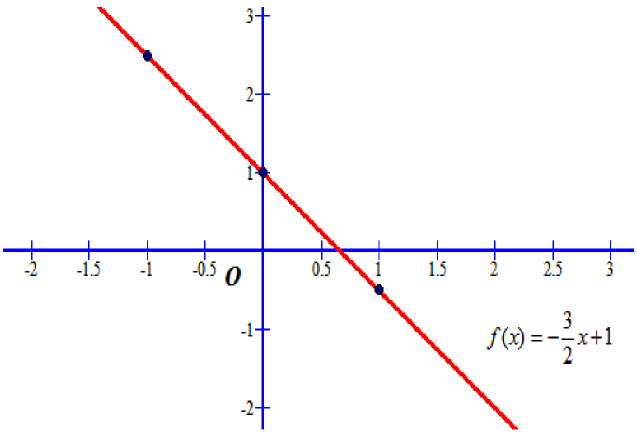


c)

Tabla de valores

$f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$

x	0	1	-1
y	1	-1/2	5/2

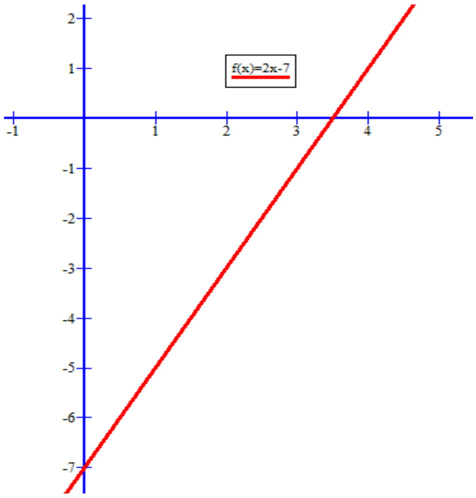


Ejemplo: Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,-3)$ y tiene por pendiente 2 y representarla gráficamente.

La recta tiene que ser de la forma $y = mx + n$, de donde ya conocemos la pendiente $m = 2 \rightarrow y = 2x + n$

Como pasa por el punto $(2,-3)$, se ha de verificar la ecuación al sustituir la *x* por 2 y la *y* por 3 →

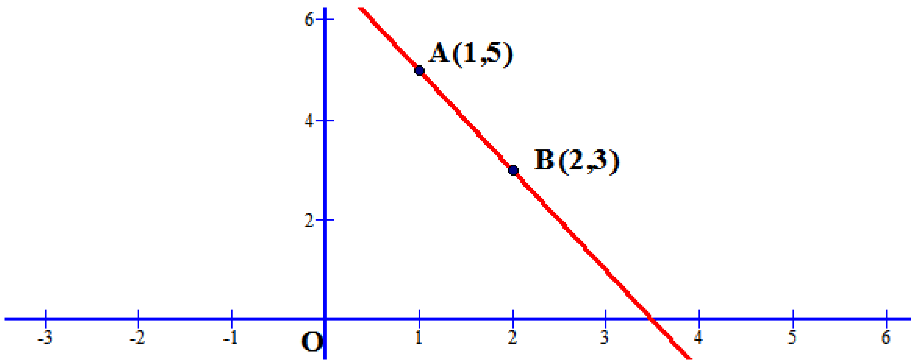
$-3 = 4 + n \rightarrow n = -7$. La recta es: $y = 2x - 7$ y su gráfica es la siguiente:



Propiedad importante: Si una recta pasa por los puntos $A(a,b)$ y $B(c,d)$, la pendiente de dicha recta es:

$$m = \frac{d-b}{c-a}$$

Ejemplo: Dada la recta cuya gráfica es la siguiente, calcular su ecuación o criterio.



1ª forma

La recta tiene que ser de la forma $y = mx + n$

La pendiente la calculamos por la fórmula dada en la propiedad $m = \frac{d-b}{c-a} = \frac{3-5}{2-1} = -2$

De donde ya conocemos la pendiente $m = -2 \rightarrow y = -2x + n$

Como pasa por el punto $(1,5)$, se ha de verificar la ecuación al sustituir la *x* por 1 y la *y* por 5 →

$5 = -2 \cdot 1 + n \Rightarrow 5 = -2 + n \Rightarrow n = 7$. La recta es: $y = -2x + 7$

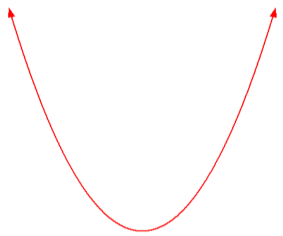
2ª forma

Al tratarse de una recta su ecuación o criterio será de la forma: $y = m \cdot x + n$. Como observamos pasa por los puntos A(1,5) y B(2,3) y sustituimos en la ecuación y planteamos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para calcular m y n: $\begin{cases} 5 = m \cdot 1 + n \\ 3 = m \cdot 2 + n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m + n = 5 \\ 2m + n = 3 \end{cases} \rightarrow$(resolvemos por cualquier método)$\begin{cases} m = -2 \\ n = 7 \end{cases}$. Por tanto, se trata de la recta $f(x) = -2 \cdot x + 7$

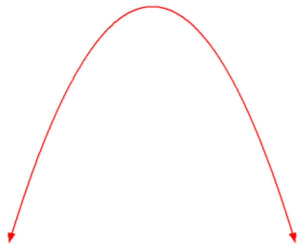
3 PARÁBOLAS: FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

Son funciones en las cuales su criterio es un polinomio de 2º grado, es decir, de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Su dominio es todo R y su gráfica es una parábola, que es una figura como la siguiente:



ó

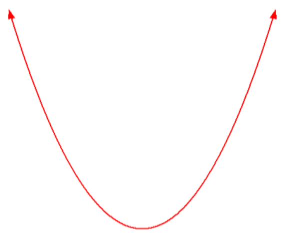


Para dibujarlas no es suficiente con una tabla de valores, sino que es necesario calcularle las siguientes propiedades, que las obtenemos a partir de su criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$:

a) <u>Estudio de la curvatura u orientación</u>

Lo calculamos a partir del signo del coeficiente a

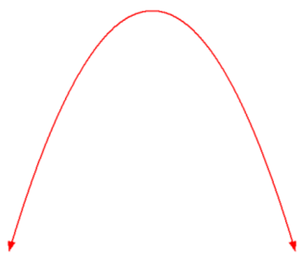
$$a > 0$$



Se dice que la parábola es CONVEXA

ó

$$a < 0$$



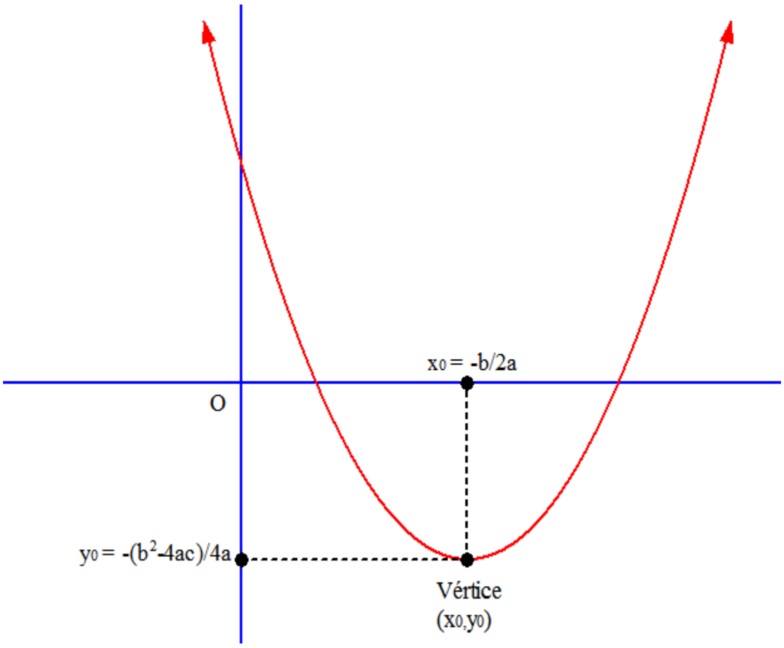
Se dice que la parábola es CÓNCAVA

b) <u>Cálculo del vértice</u>

El vértice es el punto máximo o mínimo de la función cuadrática (máximo cuando $a < 0$ y mínimo cuando $a > 0$)

El vértice V tiene por abscisa $x_0 = \frac{-b}{2a}$, y su ordenada y_0 se obtiene de la ecuación, resultando, para quien quiera saberlo de memoria $V = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$.

En la figura se representa el vértice de una parábola con $a > 0$ (es un mínimo absoluto)



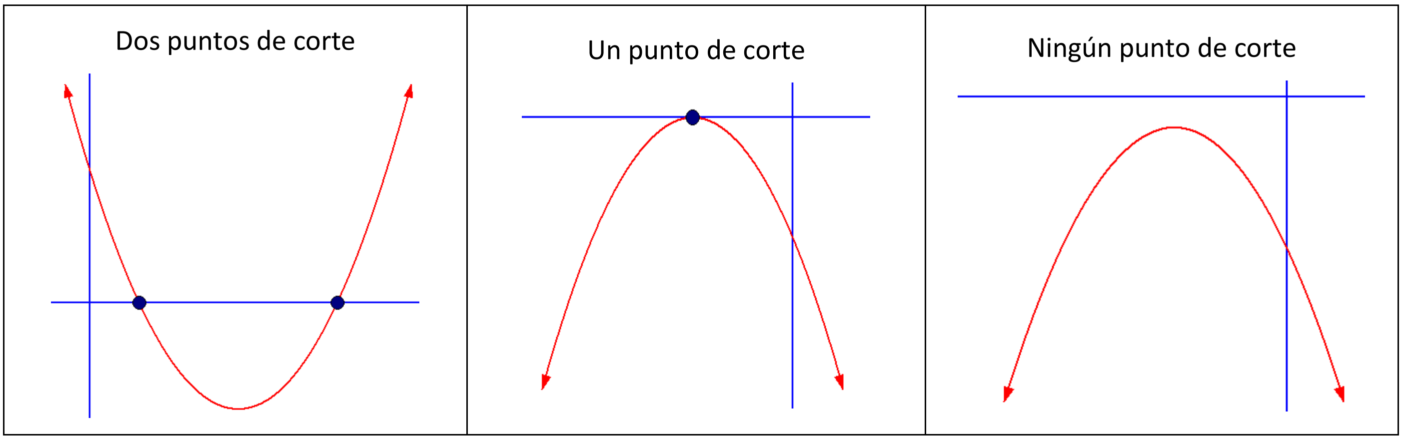
c) *Puntos de corte con eje OX*

Se trata de calcular los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas, por ello tenemos que resolver el sistema asociado:

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$, que nos lleva a la ecuación de 2º grado $ax^2 + bx + c = 0$, en la cual puede ocurrir que:

- *Tenga dos soluciones*: Hay dos puntos de corte con el eje OX
- *Tenga una única solución*: Hay un único punto de corte, la parábola es tangente al eje OX
- *No tenga ninguna solución*: No hay corte con el eje OX

Gráficamente, sería así:

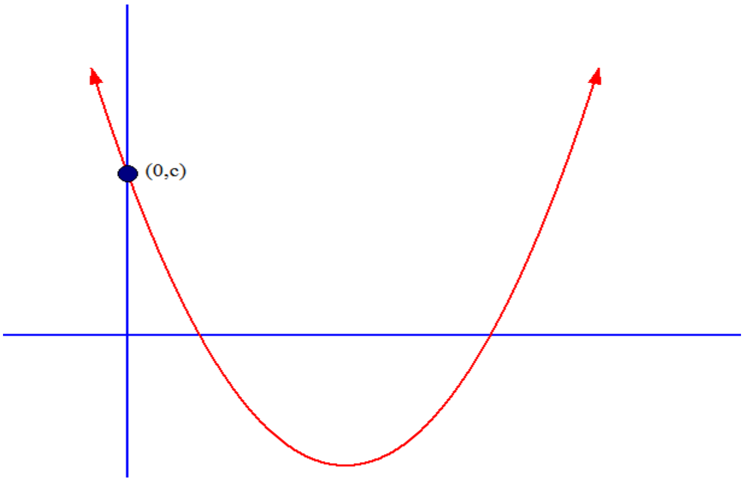


d) *Punto de corte con eje OY*

Se trata de calcular el punto de corte con el eje de ordenadas, que lo calculamos resolviendo el sistema asociado:

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}$, que es trivial de resolver y nos resulta $\begin{cases} y = c \\ x = 0 \end{cases}$. Por tanto, siempre es el punto $(0, c)$

Gráficamente,



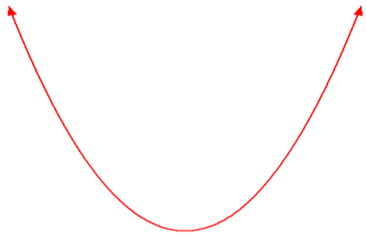
e) *Tabla de valores*

Poco que explicar en este punto, sólo que es conveniente darle valores próximos a la abscisa del vértice para que no nos salgan valores muy elevados

Ejemplo: Representa gráficamente la parábola $y = x^2 - 5x + 4$

Vamos a ir viendo paso a paso las características de la parábola

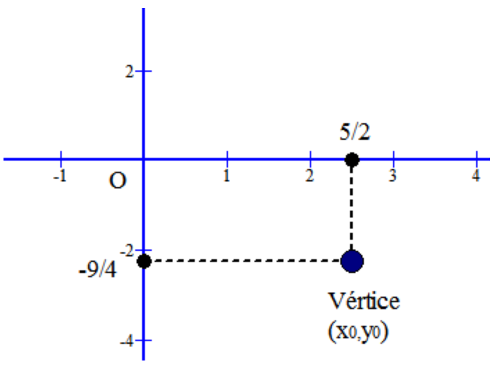
- Curvatura: En este caso tenemos que $a = 1$, luego la parábola es convexa



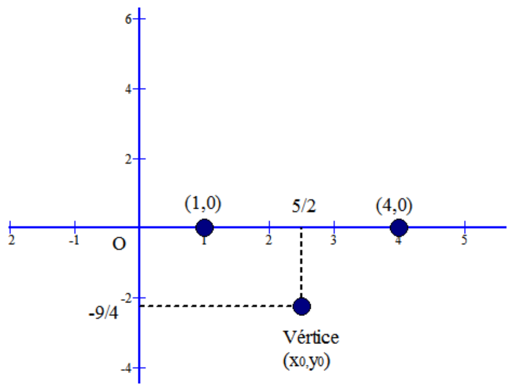
- Vértice: Lo calculamos con $V = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a} \right)$, teniendo en cuenta que $a = 1,\ b = -5$ y $c = 4$

$$V = \left(\frac{-(-5)}{2 \cdot 1}, -\frac{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1} \right) \Rightarrow V = \left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4} \right)$$

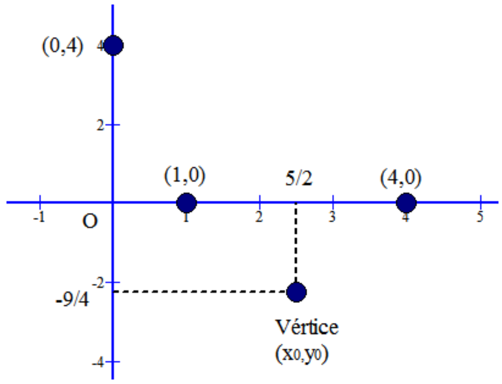
Ya tenemos un punto por donde pasa la parábola y es el vértice, que en este caso es el mínimo absoluto



- Cortes eje OX: Resolvemos $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$ Por tanto, los puntos de corte son: $(1,0)$ y $(4,0)$

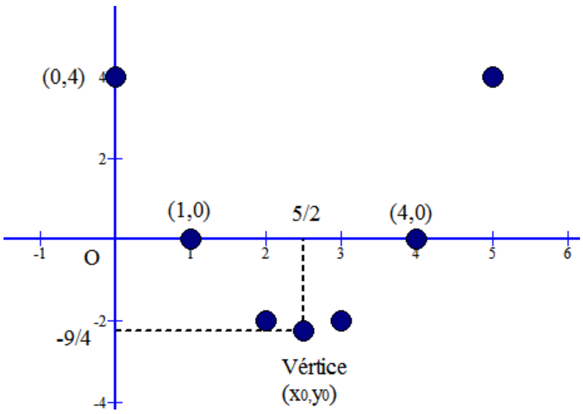


- Corte eje OY: Como sabemos el punto es $(0,c) = (0,4)$

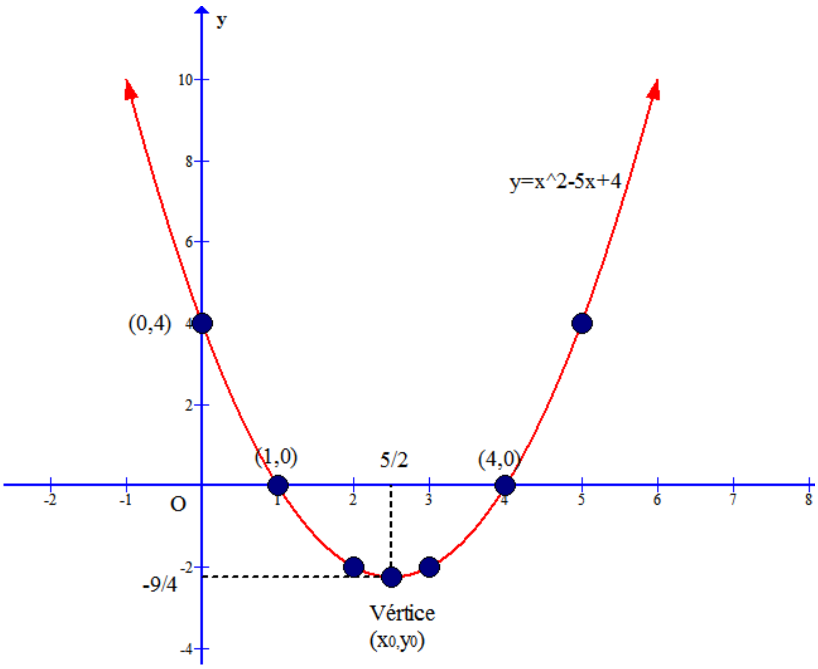


- Tabla de valores: En este caso damos pocos valores, pues tenemos suficiente información para dibujarla ya:

x	2	3	5
y	-2	-2	4



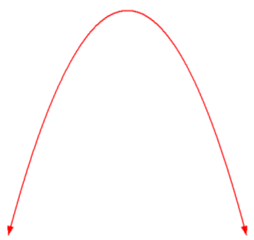
Ya procedemos al dibujarla y nos resulta:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\mathrm{Im}(f)=\left[-\frac{9}{4},+\infty\right)$

Ejemplo: Representa gráficamente la parábola $y=-2x^2-1$

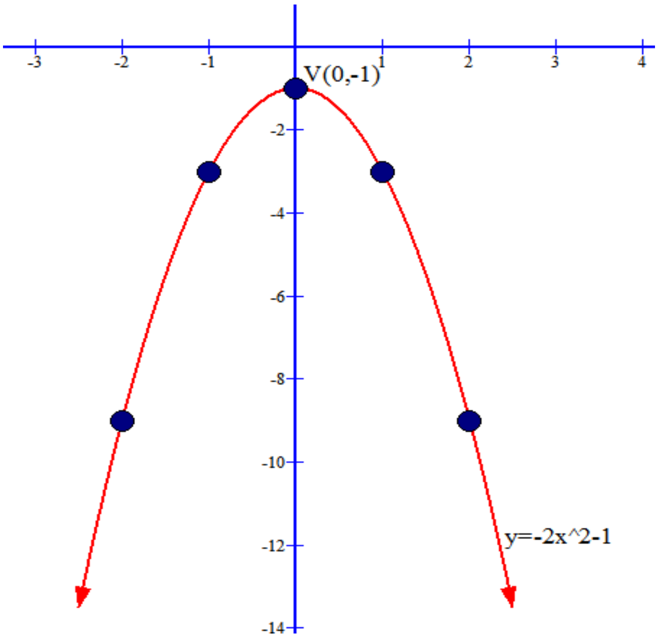
- Curvatura: En este caso tenemos que $a=-2$, luego la parábola es cóncava



- Vértice: $x_0=\frac{-0}{2\cdot(-2)}=0$ → $y_0=-1$. Luego $V(0,-1)$
- Corte eje OX: Resolvemos $\begin{cases} y=-2x^2-1 \\ y=0 \end{cases}$ → $-2x^2-1=0$ → No existen soluciones, no hay cortes
- Corte eje OY: Como sabemos el punto es $(0,c)=(0,-1)$. Coincide con el vértice
- Tabla de valores:

x	1	-1	2	-2	3	-3
y	-3	-3	-9	-9	-19	-19

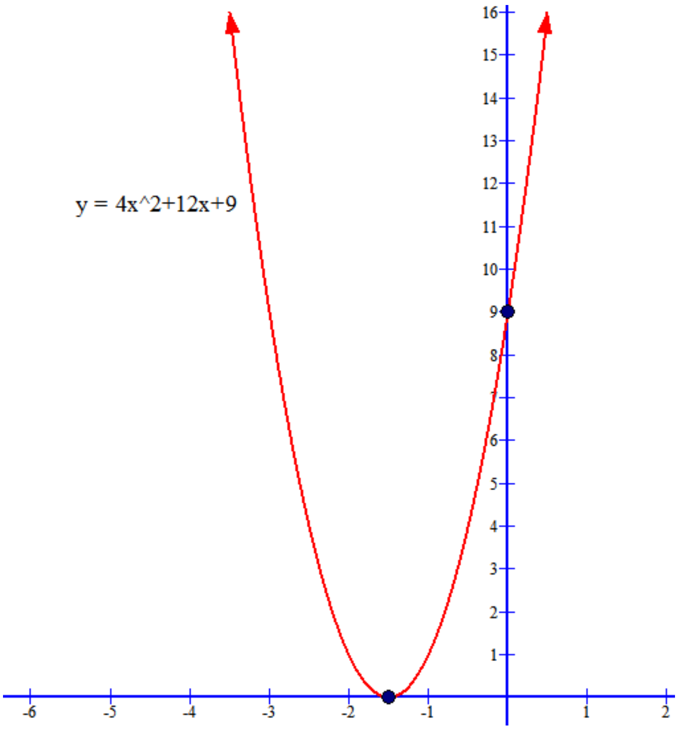
Con los datos anteriores nos debe salir la siguiente gráfica:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -1]$

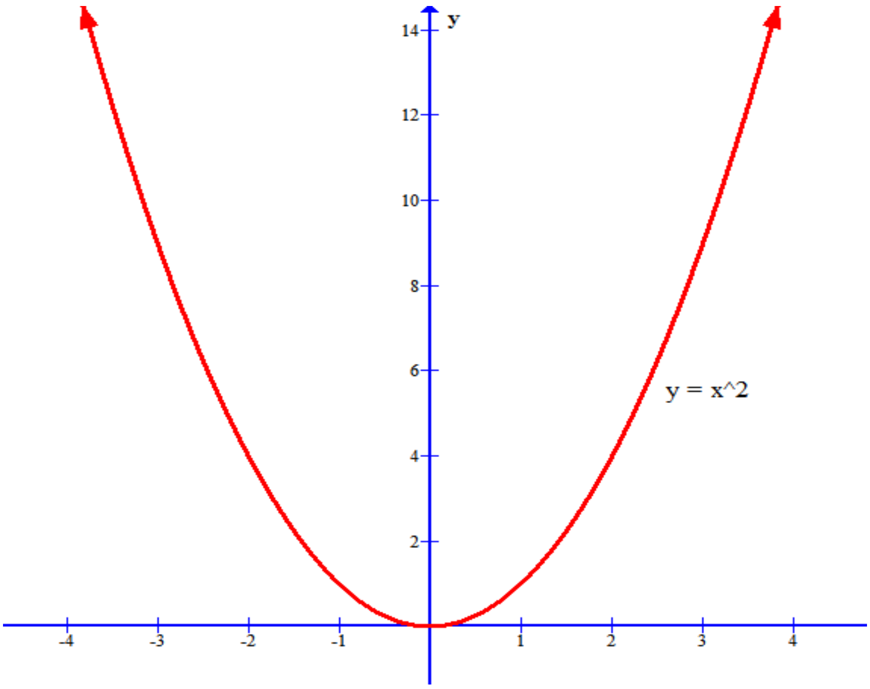
Ejemplo: Lo mismo para $y = 4x^2 + 12x + 9$

Este ejemplo os lo dejo a vosotros el estudio detallado, pero resulta que es convexa, tiene vértice en $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$, que coincide con el único punto de corte con OX y el punto de corte con OY es $(0,9)$. La gráfica es:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\mathrm{Re}\,corr(f) = [0, +\infty)$

NOTA: Hay una parábola especial conocida como parábola canónica que es $f(x) = x^2$, que es la más simple de todas ellas y la más fácil de representar y se suele usar muy a menudo. La gráfica es la siguiente:

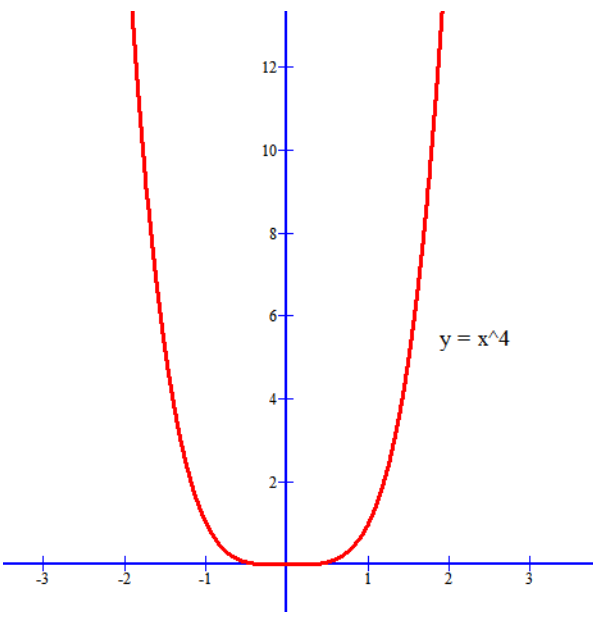


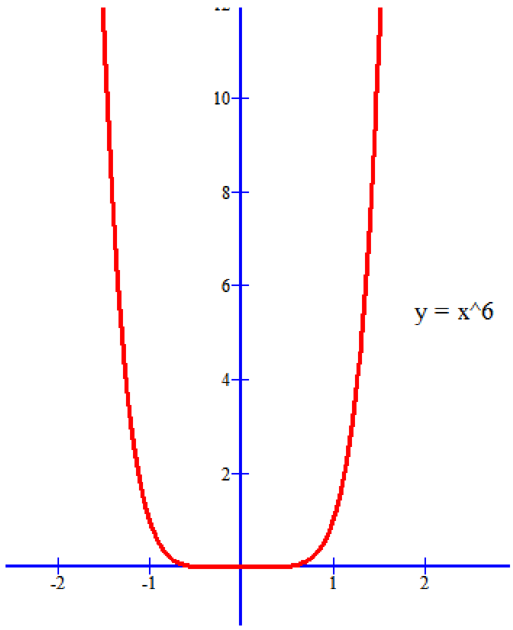
4 FUNCIONES POTENCIALES DE EXPONENTE NATURAL

a) <u>Funciones potenciales de exponente natural par</u>

Son funciones de la forma $f(x) = x^n$ donde $n \in N$ y es par, por ejemplo como $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, etc.

Su dominio es todo R al ser polinómicas y su gráfica es muy parecida a la de una parábola. Aquí tenéis la gráfica de dos de ellas:





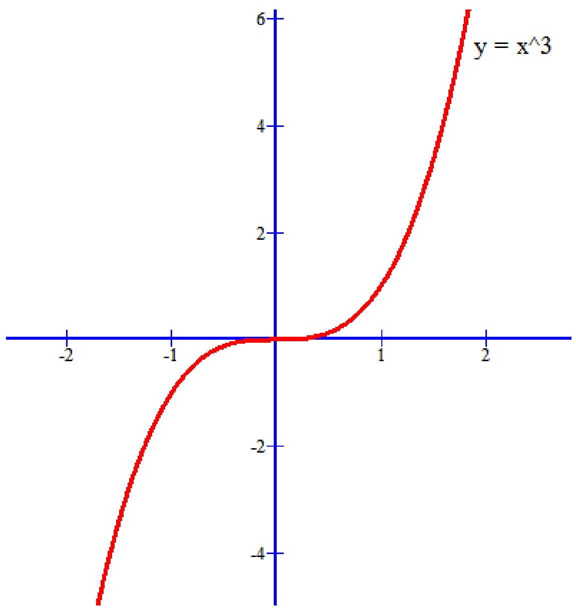
Presentan simetría par (simétricas respecto del eje de ordenadas) $f(x) = f(-x)$

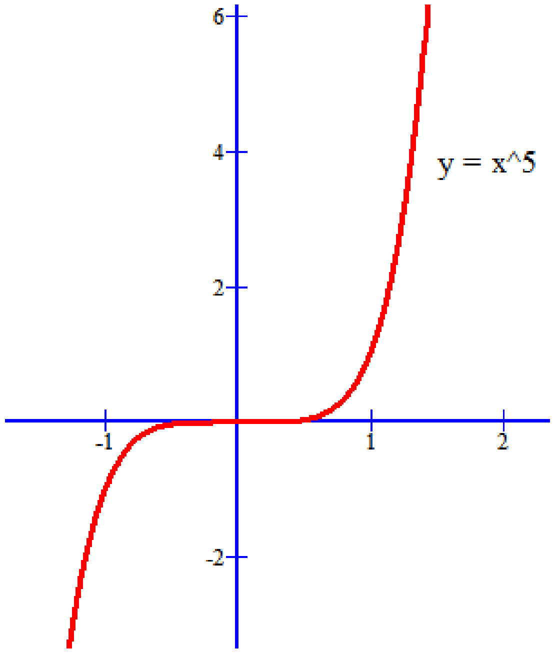
Están acotadas inferiormente. Su imagen es $\mathrm{Im}(f) = [0,+\infty)$

b) <u>Funciones potenciales de exponente natural impar</u>

Son funciones de la forma $f(x) = x^n$ donde $n \in N$ y es impar, por ejemplo como $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, etc.

Su dominio es todo R al ser polinómicas. Aquí tenéis la grafica de dos de ellas:





Presentan simetría impar (simétricas respecto del origen de coordenadas) $f(x) = -f(-x)$

No están acotadas. Su imagen es todo R