UNIDAD 4: **ARITMÉTICA MERCANTIL. LOGARITMOS**

CONTENIDO

1. PORCENTAJES. INCREMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

El porcentaje es una de las expresiones matemáticas que más usamos en la vida cotidiana. La información que aparece en los medios de comunicación está repleta de datos expresados en porcentajes. Por ejemplo, quién no ha oído decir alguna vez: *"Rebajas del 10% en todos los artículos del hogar"* o *"El paro aumentó el último trimestre un 0,5%".* Un **porcentaje** es una forma de expresar un número como una fracción de 100.

Ejemplo: 4 % = $\frac{4}{100}$; significa 4 de cada 100 y su **razón de proporcionalidad** es $r = 0,04$.

Disminución porcentual

Consiste en disminuir una cantidad C un a %, y esto equivale a calcular el (100 – a) % de C.

Ejemplo: Si una mercancía cuesta inicialmente *C* y su valor disminuye un 8 %, su coste final será:

$$C - 0{,}08 \times C = (1 - 0{,}08) \times C = 0{,}92 \times C$$

Ejemplo: Unos almacenes rebajan un 15% todos los artículos de ropa. Un pantalón que antes costaba 14,40 €, ¿cuál es su precio de venta con el descuento?

Éste problema se puede resolver de tres formas distintas:

1ª forma: Calculando el descuento y restarlo del precio inicial.

Precio inicial 14,40 €

Descuento $15\% \text{ de } 14,40 = \frac{15 \cdot 14,40}{100} = 2,16€$

Precio final = 14,40 – 2,16 = 12,24 €

2ª forma: Aplicando una regla de tres directa, teniendo en cuenta que si me rebajan un 15%, lo que tengo que pagar de la prenda es un 85%.

$$\left.\begin{array}{ccc} 14,40 & \rightarrow & 100\% \\ x & \rightarrow & 85\% \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{85 \cdot 14,40}{100} = 12,24$$

3ª forma: Aplicando la razón de proporcionalidad. (Calculando el (100 – a) % de C)

100% – 15% = 85% ⇒Tenemos que pagar el 85% del vestido ⇒ r = 0,85

El precio final del pantalón es 14,40 · 0,85 = 12,24 €

NOTA IMPORTANTE: La tercera forma es la adecuada para los cálculos que vamos a realizar y es la que se ha de usar

Aumento porcentual

Consiste en aumentar una cantidad C un a%, y esto equivale a calcular el (100 + a) % de C.

Ejemplo: Si una mercancía cuesta inicialmente *C* y su valor aumenta un 8 %, su coste final será:

$$C + 0{,}08 \times C = (1 + 0{,}08) \times C = 1{,}08 \times C$$

Ejemplo: Una bicicleta cuesta 300 € sin IVA. Si le aplican el 16 % de IVA, ¿cuánto deberé pagar por ella?

En este caso, aumenta el precio final (sumándole el IVA correspondiente).

Lo resolveremos aplicando la razón de proporcionalidad: 100 + 16 = 116 % ⇒ r = 1,16

Tenemos que pagar el 300 · 1,16 = 348 €

Ejemplo: Los precios de todos los artículos de unos almacenes se encuentran rebajados el 12% ¿Qué precio se pagará por un artículo marcado a 500 euros?

Solución: Se aplica la fórmula $P_f = (1 - 0,12)\cdot 500 = 0,88\cdot 500 = 440\ euros$

Ejemplo: Por una lavadora se han pagado 406 euros. Si la lavadora tiene un impuesto del 16 % de IVA, ¿cuál es su precio sin incluir el impuesto?

Solución: Se aplica la fórmula y se despeja el precio inicial:

$$P_f = (1+0,16)\cdot P_i \Rightarrow 406 = 1,16\cdot P_i \Rightarrow P_i = \frac{406}{1,16} \Rightarrow P_i = 350€$$

Porcentajes encadenados

Son sucesivos aumentos o disminuciones porcentuales sobre una cantidad. La resolución de problemas de porcentajes encadenados es más fácil si usamos las razones de proporcionalidad, teniendo en cuenta que:

$$P_{final} = (r_1\cdot r_2\cdots r_n)\cdot P_{inicial}$$

Ejemplo: El índice del coste de la vida subió un 14% durante 1980 y un 6% durante 1981, pero bajó un 5% durante 1982. Halla la subida del índice de coste de la vida de 1980 a 1982.

Solución:

En 1980 aumenta un 14 %, luego su razón de proporcionalidad es: $r_{1980} = 1,14$

En 1981 aumenta un 6 %, luego su razón de proporcionalidad es: $r_{1981} = 1,06$

En 1982 disminuye un 5 %, luego su razón de proporcionalidad es: $r_{1982} = 0,95$

El índice del coste de la vida de 1980 a 1982 fue de: $r_{1980}\cdot r_{1981}\cdot r_{1982} = 1,14 \cdot 1,06 \cdot 0,95 = 1,14798$, lo que nos indica que el índice del coste de la vida subió un $I_{coste-vida} = 14,80\%$ redondeando a la centésima.

Ejemplo: Un ordenador al que primero rebajaron su precio en un 15% y luego lo aumentaron un 10%, cuesta actualmente 888,25 €. ¿Cuál era su precio inicial?

Solución:

Las razones de proporcionalidad son: $r_1 = 0,85$ y $r_2 = 1,10$, por tanto como $P_f = (r_1\cdot r_2)\cdot P_i \Rightarrow$

$$888,25 = 0,85 \cdot 1,10\cdot P_i \Rightarrow P_i = \frac{888,25}{0,85 \cdot 1,10} = \frac{888,25}{0,935} = 950€$$

2. INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO. TASA ANUAL EQUIVALENTE (T.A.E.)

Interés simple

Cuando depositamos dinero en un banco, éste nos paga un interés de un determinado tanto por ciento, por la cantidad depositada. Habitualmente se suele pagar anualmente el interés. Así, por ejemplo, si depositamos 5.000 € en una libreta de ahorros al 1´5 % anual, al cumplirse el año recibimos como pago de intereses la cantidad de:

$$\frac{5000\cdot 1´5}{100} = 75€$$

La cantidad que hemos depositado (5000 €) se llama capital. El beneficio obtenido (45 €) se llama interés. El 1´5 % se llama rédito o tanto por ciento, que es también la cantidad de intereses que producen 100 €. A la cantidad que produce de intereses 1 € se le llama tanto por uno y en este ejemplo es 0´015 (la razón de proporcionalidad).

<u>Definiciones</u>:

- Se llama **capital**, **C**, a la cantidad de dinero que depositamos en una entidad financiera.
- Se llama **interés**, **I**, a la cantidad de dinero producida por un capital en un tiempo determinado.
- Se llama **rédito** o **tanto por ciento**, **R**, a la ganancia que producen 100 euros en un año.
- Se llama **tanto por uno o razón de proporcionalidad**, **r**, a la ganancia que produce un euro en un año. Se verifica que:

$$r = \frac{R}{100}$$

Un capital colocado al R % en un año produce $\frac{C \cdot R}{100}$ de interés, luego en *t* años producirá un interés de:

$I = \frac{C \cdot R \cdot t}{100}$ o bien, como $r = \frac{R}{100}$ tenemos que $\boxed{I = C \cdot r \cdot t}$ siendo t el número de años

<u>NOTA IMPORTANTE</u>: A veces los intereses se devengan mensualmente, o trimestralmente o semestralmente o en días, de donde resultan las expresiones siguientes:

<u>Mensualmente</u>: En un año sabemos que el interés producido es $\frac{C \cdot R}{100}$, por tanto en un mes será $\frac{\frac{C \cdot R}{100}}{12} = \frac{C \cdot R}{1200}$

Si tenemos el capital invertido *T* meses, obtenemos de interés $I = \frac{C \cdot R \cdot T}{1200}$ o bien $\boxed{I = \frac{C \cdot r \cdot T}{12}}$

<u>Trimestralmente</u>: De forma análoga a lo anterior tenemos que el interés devengado es, puesto que un año tiene 4 trimestres: $I = \frac{C \cdot R \cdot T}{400}$ o bien $\boxed{I = \frac{C \cdot r \cdot T}{4}}$, donde *T* es el nº de trimestres.

<u>Semestralmente</u>: De forma análoga a lo anterior tenemos que el interés devengado es, puesto que un año tiene 2 semestres: $I = \frac{C \cdot R \cdot T}{200}$ o bien $\boxed{I = \frac{C \cdot r \cdot T}{2}}$, donde *T* es el nº de semestres.

<u>Diariamente</u>: De forma análoga a lo anterior tenemos que el interés devengado es, puesto que un año tiene 365 días: $I = \frac{C \cdot R \cdot T}{36500}$ o bien $\boxed{I = \frac{C \cdot r \cdot T}{365}}$, donde *T* es el nº de días.

<u>TABLA RESUMEN</u>	Anualmente (t años)	Mensualmente (T meses)	Trimestralmente (T semestres)	Semestralmente (T semestres)	Diariamente (T días)
Usando el rédito (R)	$I = \frac{C \cdot R \cdot t}{100}$	$I = \frac{C \cdot R \cdot T}{1200}$	$I = \frac{C \cdot R \cdot T}{400}$	$I = \frac{C \cdot R \cdot T}{200}$	$I = \frac{C \cdot R \cdot T}{36500}$
Usando el tanto por uno o razón de proporcionalidad (r)	$I = C \cdot r \cdot t$	$I = \frac{C \cdot r \cdot T}{12}$	$I = \frac{C \cdot r \cdot T}{4}$	$I = \frac{C \cdot r \cdot T}{2}$	$I = \frac{C \cdot r \cdot T}{365}$

De manera general, cuando los intereses se devengan *n* veces a lo largo de un año (cada año con *n* periodos iguales), la expresión del interés es: $I = \frac{C \cdot R \cdot T}{n \cdot 100}$ o bien $I = C \cdot \frac{r}{n} \cdot T$ siendo T el nº de periodos por los que devengamos los intereses.

<u>Ejemplo</u>: Halla el interés producido por 3000 € al 4 % durante 6 meses.

Aplicamos la fórmula para meses: $I = \frac{C \cdot r \cdot T}{12} = \frac{3000 \times 0,04 \times 6}{12} = 60$ €

Se podía haber usado la fórmula para medio año, 2 trimestres o un semestre y sale igual.

<u>Ejemplo</u>: Colocamos en un banco 9.000 € al 4´5 %, percibiendo los intereses semestralmente. Si hemos cobrado 607´5 € en concepto de intereses, ¿cuánto tiempo hemos tenido el dinero en el banco?

Tenemos por la fórmula que $I = \frac{C \cdot r \cdot T}{2} \Rightarrow$ Sustituimos cada valor $607´5 = \frac{9000 \cdot 0´045 \cdot T}{2} \Rightarrow$ Despejamos

T $T = \frac{2 \cdot 607´5}{9000 \cdot 0´045} \Rightarrow T = 3$ semestres. Es decir, año y medio ó 18 meses.

Interés compuesto

Colocar un capital a **interés compuesto** significa que el capital se va incrementando con los intereses producidos en cada periodo de tiempo. Al capital existente en cada momento se le llama **montante**

Supongamos que tenemos un capital, *C*, colocado al tanto por uno, *r*, al final del primer año tenemos un montante de:

$M_1 = C + C \cdot r \Rightarrow M_1 = C \cdot (1+r)^1$, si seguimos otro año más, este será el nuevo capital y por tanto el montante al final del 2º año será:

$M_2 = C \cdot (1+r) + C \cdot (1+r) \cdot r \Rightarrow$ Sacamos factor común $C \cdot (1+r)$ y nos queda

$$M_2 = C \cdot (1+r)(1+r) \Rightarrow M_2 = C \cdot (1+r)^2$$

De forma análoga, al final del tercer año tendremos un montante de:

$$M_3 = C \cdot (1+r)^3$$

Así al final de t años tendremos un montante o capital acumulado de:

$$\boxed{M = C \cdot (1+r)^t}$$

Cuando capitalizamos n veces a lo largo de un año o en n periodos cada año, entonces la fórmula nos queda:

$\boxed{M = C \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^T}$ siendo T el nº de periodos

<u>Ejemplo</u>: Hallar el capital acumulado durante 10 años a partir de 12 000 euros colocados al 4 %

de interés compuesto abonando los intereses anualmente.

Solución: Tenemos como datos que: $C = 12.000$ €, $t = 10$ años y $r = 0,04$, sustituimos en la fórmula:

$M = C \cdot (1+r)^t = 12000 \cdot (1+0,04)^{10} = 17.762,93$ €, Ejemplo: ¿Qué rédito ofrece una inversión con interés compuesto si ingresando 8.000€ nos devuelven 16.000€ al cabo de 5 años?

Solución: Sustituimos los datos en la fórmula y despejamos:

$$M = C\cdot(1+r)^t \Rightarrow 16000 = 8000\cdot(1+r)^5 \Rightarrow (1+r)^5 = 2 \Rightarrow 1+r = \sqrt[5]{2} \Rightarrow r = 0{,}1487$$

Luego el rédito era del 14,87 %

Ejemplo: El mismo ejemplo anterior, pero en 5 años y los intereses son devengados mensualmente.

Solución: Sustituimos los datos en la fórmula y despejamos:

$$M = C\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)^T \Rightarrow 16000 = 8000\cdot\left(1+\frac{r}{12}\right)^{60} \Rightarrow \left(1+\frac{r}{12}\right)^{60} = 2 \Rightarrow 1+\frac{r}{12} = \sqrt[60]{2}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{12} = \sqrt[60]{2}-1 \Rightarrow r = 12\cdot\left(\sqrt[60]{2}-1\right) \Rightarrow r = 0{,}1394$$

Luego el rédito era del 13,94 %

T.A.E. (Tasa Anual Equivalente)

Al depositar una cantidad de dinero o solicitar un préstamo en una entidad bancaria, la información sobre los intereses que se aplicarán a nuestro préstamo o depósito suele ser anual. Sin embargo, en ocasiones la cuota que pagamos por el préstamo o que recibimos por el depósito se hace en plazos inferiores a un año.

Para comparar las distintas informaciones sobre los tipos de interés que genera un depósito o un préstamo, independientemente de los períodos de liquidación, las entidades bancarias están obligadas a facilitar la Tasa Anual Equivalente (TAE).

La Tasa Anual Equivalente (TAE) es el interés producido por 1 euro en un año, es decir, si p es el número de veces al año que se hace la liquidación y r el tanto por uno , es decir, su razón de proporcionalidad $\left(r = \frac{R}{100}\right)$, tenemos que:

$$\boxed{TAE = \left[\left(1+\frac{r}{p}\right)^p - 1\right]\cdot 100}$$

Ejemplo: Queremos contratar un préstamo al 6% de interés anual y no estamos seguros de cómo pagar las cuotas: mensuales, trimestrales, semestrales o anuales. ¿Qué opción nos conviene más?

Solución: Tenemos que $r = 0,06$, vamos a hacer una tabla:

	TAE
Pagos mensuales: $p = 12$	$TAE = \left[\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100 = 6{,}17\ \%$
Pagos trimestrales: $p = 4$	$TAE = \left[\left(1+\frac{0,06}{4}\right)^{4} - 1\right]\cdot 100 = 6{,}14\ \%$
Pagos semestrales: $p = 2$	$TAE = \left[\left(1+\frac{0,06}{2}\right)^{2} - 1\right]\cdot 100 = 6{,}09\ \%$

Pagos anuales: $p=1$	$TAE=\left[\left(1+\frac{0,06}{1}\right)^{1}-1\right]\cdot 100=6\ \%$

Luego, el TAE es más bajo si realizo los pagos en cuotas anuales (aunque todo el mundo prefiere pagar en cuotas mensuales, ya que es más cómodo pagar el préstamo poco a poco).

3. ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN

La anualidad de capitalización es una cantidad de dinero fija (cuota) que se deposita periódicamente para obtener un capital al cabo de un cierto tiempo. El capital final que se obtiene, C_f , con una anualidad de capitalización, a , a un rédito del R % durante t años se puede calcular con la siguiente fórmula, siendo $r=\frac{R}{100}$:

$$\boxed{C_f=a\cdot(1+r)\cdot\frac{(1+r)^t-1}{r}}$$

Si las cuotas o pagos son semestrales, trimestrales, mensuales o en otro intervalo, entonces se aplica la fórmula similar:

$$\boxed{C_f=a\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot t}-1}{\frac{r}{n}}}$$

<u>Ejemplo</u>: Si ingresamos 2.000 € al año durante 15 años al 5 % anual, ¿qué capital final obtenemos?

Solución: Tenemos que $a=2000$, $r=0,05$, $t=15$ y sustituyendo en la fórmula:

$$C_f=2000\cdot(1+0,05)\cdot\frac{(1+0,05)^{15}-1}{0,05}=43.314,98€$$

<u>Ejemplo</u>: Una entidad bancaria ofrece un plan de pensiones de modo que durante 15 años debemos aportar 600 € al año, pero por trimestres, al 8 % anual ¿Qué capital tendremos al finalizar el plazo?

Solución: En este caso tenemos como datos $a=\frac{600}{4}=150$ € en cada trimestre de aportación, $r=0,08$, $t=15$ y $n=4$. Luego aplicando la fórmula:

$$C_f=a\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot t}-1}{\frac{r}{n}}=150\cdot\left(1+\frac{0,08}{4}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^{4\cdot 15}-1}{\frac{0,08}{4}}=150\cdot(1+0,02)\cdot\frac{(1+0,02)^{60}-1}{0,02}=17.449,89€$$

4. ANUALIDADES DE AMORTIZACIÓN

La anualidad de amortización es una cantidad de dinero fija (cuota) que se devuelve periódicamente para saldar un préstamo al cabo de cierto tiempo. Un ejemplo son los pagos de las hipotecas. No olvidar que una hipoteca es un préstamo que conceden los bancos para la adquisición de una vivienda.

Las anualidades de amortización de un capital prestado, C_p , a un rédito R % durante t años, se puede calcular de este modo, siendo $r=\frac{R}{100}$:

$$a = C_p \cdot \frac{(1+r)^t \cdot r}{(1+r)^t - 1}$$ siendo a la anualidad a pagar al año.

Si queremos devolver el capital prestado en cuotas semestrales, trimestrales o mensuales entonces la fórmula queda:

$$a = C_p \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot t} \cdot \frac{r}{n}}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot t} - 1}$$

Ejemplo: Un préstamo de 120.000 € con un interés anual del 6 % se ha de devolver en 20 cuotas anuales. ¿Cuál será el importe de cada cuota anual?

Solución: Tenemos que $C_p = 2000$, $r = 0,06$, $t = 20$ y sustituyendo en la fórmula:

$$a = C_p \cdot \frac{(1+r)^t \cdot r}{(1+r)^t - 1} = 120000 \cdot \frac{(1+0,06)^{20} \cdot 0,06}{(1+0,06)^{20} - 1} = 10.462,15€$$

Ejemplo: El mismo ejercicio anterior, pero en cuotas mensuales durante los 20 años del préstamo:

Solución: En este caso, tenemos que $n = 12$ y aplicamos la fórmula con $\frac{r}{n} = \frac{0,06}{12} = 0,005$:

$$a = C_p \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot t} \cdot \frac{r}{n}}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot t} - 1} = 120000 \cdot \frac{(1+0,005)^{240} \cdot 0,005}{(1+0,005)^{240} - 1} = 859,72€$$

5. NÚMEROS ÍNDICES

Cuando interesa conocer la evolución en el tiempo de una variable o una magnitud medible, se emplean los números índices. Los números índices muestran los cambios de una variable entre dos periodos temporales de los que uno de ellos se toma como base o referencia.

Por ejemplo, la tabla siguiente nos da el número de reclusos en las cárceles españolas entre 1997 y 2002.

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Nº presos	42.756	44.370	44.197	45.501	47.571	51.882

Si quisiéramos averiguar la variación de la población reclusa del año 1998 tomando como base el año 1997, la obtendríamos del cociente:

$$\frac{44370}{42756} = 1,037$$

Del mismo modo, la variación de la población reclusa del año 2002 con respecto al año 1997 sería:

$$\frac{51882}{42756} = 1,213$$

¿Cómo interpretamos estos cocientes? En el año 1998 se ha incrementado la población reclusa, respecto a 1997, en un 3,7%, mientras que en el periodo 1997-2002, el incremento fue del 21,3%.

Definición: Sea X una variable o magnitud cuya evolución a lo largo del tiempo queremos estudiar. Supongamos que tenemos una serie de registros temporales que simbolizaremos por 0, 1, 2, 3, ..., t ; y que los valores de X en cada uno de estos registros temporales sean $x_0, x_1, x_2, ..., x_t$. Se llama **índice** de la variable X en el periodo t (periodo actual), tomado como base el periodo 0, al cociente $\frac{x_t}{x_0}$, y se simboliza por $I_{t/0}$ al número real:

$$\boxed{I_{t/0} = \frac{x_t}{x_0}}$$

Para hacer una lectura más fácil del índice se acostumbra a expresarlo multiplicado por 100:

$$\boxed{I_{t/0} = \frac{x_t}{x_0} \cdot 100}$$

En el caso del índice de la población reclusa en los años 1998 y 2002, tomando como base 1997, sería:

$$I_{1998/1997} = \frac{44370}{42756} \cdot 100 = 103,7$$

$$I_{2002/1997} = \frac{51882}{42756} \cdot 100 = 121,3$$

Con lo que, sin tantos decimales, es más fácil ver que la población reclusa aumentó un 3,7% entre 1997 y 1998, y un 21,3% entre 1997 y 2002. Al multiplicar por 100 es como si asignáramos valor 100 al índice de referencia o base; los índices mayores que 100 indican aumentos y los menores que 100 indican disminución.

Ejemplo:

La tabla siguiente muestra el número de alumnos matriculados en España en educación universitaria.

Curso	2000/2001	2001/2002	2002/2003	2003/2004	2004/2005	2005/2006
Nº alumnos	1.554.972	1.526.907	1.507.147	1.488.574	1.449.136	1.422.561

Calcular los índices tomando como base el número de matriculados en el curso 2000/2001

Solución.

Se efectúan los cálculos: $\frac{1554972}{1554972} \cdot 100 = 100$, $\frac{1526907}{1554972} \cdot 100 = 98,195$,....,etc.

Completamos la tabla así:

Curso	2000/1	2001/2	2002/3	2003/4	2004/5	2005/6
Alumnos	1.554.972	1.526.907	1.507.147	1.488.574	1.449.136	1.422.561
Índices	100	98,1	96,9	95,7	93,1	91,4

Interpretamos el resultado diciendo que en el curso 2001/2 ha habido una disminución de matriculados de aproximadamente un 1,9%, mientras que en el curso 2005/6 la disminución del número de alumnos matriculados fue del 8,6% (100 – 91,4 = 8,6).

6. LOGARITMO DE UN NÚMERO. LOGARITMO DECIMAL Y LOGARITMO NEPERIANO

Consideremos la ecuación: $2^x = 8$.

Como vemos la incógnita está en el exponente, lo que la hace diferente a todos los tipos vistos hasta ahora. "x" es el exponente al que tenemos que elevar 2 para que de cómo resultado 8.

En matemáticas diremos que "x" es el logaritmo en base 2 de 8

En este ejemplo es fácil ver que x = 3 pues $2^3 = 8$

<u>Definición</u>: Llamamos *<u>logaritmo</u>* en base un nº real a (positivo y distinto de 1) de un nº real b (positivo) como el exponente al que tenemos que elevar a para que de cómo resultado b.

Matemáticamente se representa así: $$\log_a b = z \Leftrightarrow a^z = b$$

Veamos ejemplos para entenderlo mejor:

<u>Ejemplos</u>:

a) $\log_2 8 = 3$ pues $2^3 = 8$, es decir, 3 es el exponente al que hemos de elevar 2 para que de 8	b) $\log_4 16 = 2$ pues $4^2 = 16$, es decir, 2 es el exponente al que hemos de elevar 4 para que de 16
c) $\log_7 7 = 1$ pues $7^1 = 7$, es decir, 1 es el exponente al que hemos de elevar 7 para que de 7	d) $\log_5 5^{-4} = -4$ pues $5^{-4} = 5^{-4}$
e) $\log_{10} 100000 = 5$ pues $10^5 = 100000$	f) $\log_2 \sqrt{2}$ Aquí aplicamos la definición: $\log_2 \sqrt{2} = z \Leftrightarrow 2^z = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^z = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$ Como $\log_2 \sqrt{2} = z = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$
g) $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = \log_3 \left(\frac{1}{3^2}\right) = \log_3 3^{-2} = -2$ También se podía haber hecho con la definición que es lo mismo: $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = z \Leftrightarrow 3^z = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^z = 3^{-2} \Leftrightarrow z = -2$	h) $\log_5 \sqrt{125} = z$, o sea, $5^z = \sqrt{125} \Rightarrow 5^z = \sqrt{5^3} \Rightarrow$ $5^z = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \log_5 \sqrt{125} = \frac{3}{2}$
i) $\log_2 \sqrt[7]{\frac{1}{32}} = z$, o sea, $2^z = \sqrt[7]{\frac{1}{32}} \Rightarrow 2^z = \sqrt[7]{\frac{1}{2^5}} \Rightarrow 2^z = \sqrt[7]{2^{-5}} \Rightarrow 2^z = 2^{\frac{-5}{7}} \Rightarrow$ $\log_2 \sqrt[7]{\frac{1}{32}} = -\frac{5}{7}$	j) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = z$, o sea, $\left(\frac{2}{3}\right)^z = \frac{8}{27} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^z = \frac{2^3}{3^3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^z = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow$ $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = 3$

<u>Propiedades inmediatas de los logaritmos</u>:

- El logaritmo en cualquier base del nº 1 es 0

$$\log_a 1 = 0 \text{ pues } a^0 = 1$$

- El logaritmo en cualquier base de la base es 1

$$\log_a a = 1 \text{ pues } a^1 = a$$

- El logaritmo en cualquier base de un nº que sea una potencia de la base es el exponente de dicha potencia

$$\log_a a^p = p \text{ que resulta evidente}$$

- Sólo tienen logaritmos los números positivos, pues como sabemos el resultado de una potencia siempre es positivo. No tiene sentido, por ejemplo, $\log_2(-4)$, no existe

Logaritmos decimales

Se llaman logaritmos decimales a aquellos cuya base es 10. También se les conoce como vulgares y en su representación no se pone la base 10, por tanto se notan $\log x$

Ejemplos:

a) $\log 100 = 2$

b) $\log \sqrt[4]{1000000} = \log 10^{\frac{6}{4}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

c) $\log 0´0001 = \log 10^{-4} = -4$

Estos logaritmos se pueden obtener con la calculadora, usando la tecla LOG que aparece en ella

Ejemplos:

a) $\log 3 = 0´4777121...$

b) $\log 254 = 2´404833....$

c) $\log \sqrt{805} = 1´452897...$

d) $\log(-100) = Error$ No existes logaritmos de números negativos

Logaritmos neperianos

El nº irracional *e* = 2´71828182… se usa muy a menudo como base de logaritmos.

Se llaman logaritmos neperianos a aquellos cuya base es *e*. También se les conoce como naturales y su representación es $\ln x$ ó $L\,x$

Habitualmente habrá que obtenerlos mediante la calculadora usando la tecla correspondiente ln ó L según el modelo de calculadora.

Ejemplos:

a) $\ln 3 = 1´098612...$

b) $L\,\sqrt{e} = L\,e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

c) $\ln 179´28 = 5´188948...$

7. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

a) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Ejemplo: Obtener sin calculadora

$$\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 (4 \cdot 9) = \log_6 36 = 2$$

Ejemplo: Sabiendo que $\log_5 x = 3'4$ obtener sin calculadora $\log_5 5x$

Como $\log_5 5x = \log_5 5 + \log_5 x = 1 + 3'4 = 4'4$

b) *El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y del divisor*

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

Ejemplo: Obtener sin calculadora

$$\log_2 6 - \log_2 48 = \log_2 \left(\frac{6}{48}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 2^{-3} = -3$$

c) *El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base*

$$\log_a m^n = n \cdot \log_a m$$

Ejemplo: Calcular

$$\ln\left(\frac{\mathrm{e}}{\sqrt[5]{\mathrm{e}^2}}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{e^{\frac{2}{5}}}\right) = \ln e^{\left(1-\frac{2}{5}\right)} = \ln e^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \ln e = \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

d) *El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz*

$$\log_a \sqrt[n]{m} = \frac{\log_a m}{n}$$

Ejemplo: Calcular

$$\log \sqrt[6]{12} = \frac{\log 12}{6} = 0'179863...$$

e) *Relación entre logaritmos de distintas bases*

El logaritmo en base *a* de un número se puede transformar en el logaritmo de otra base *b* cualquiera mediante la expresión:

$$\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$$

Ejemplo: Obtén con la calculadora de dos formas distintas $\log_{11} 29$:

Pasando a logaritmo decimal: $\log_{11} 29 = \dfrac{\log 29}{\log 11} = \dfrac{1'4623...}{1'01413...} = 1'40427...$

Pasando a logaritmo neperiano: $\log_{11} 29 = \dfrac{\ln 29}{\ln 11} = \dfrac{3'3672...}{2'3978...} = 1'40427...$