# *UNIDAD 2*: **POLINOMIOS**

## CONTENIDO

## 1. MONOMIOS Y POLINOMIOS. VALOR NUMÉRICO. OPERACIONES CON MONOMIOS

Una expresión algebraica es una combinación de letras y números unidas por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Ejemplos:

- La longitud de una circunferencia en función del radio es $2\cdot\pi\cdot r$ que es una expresión algebraica cuya variable es el radio, $r$
- El área de un cuadrado en función de la longitud de su lado es $l^2$, en este caso la variable es el lado, $l$

Expresiones algebraicas muy usadas

| | | | |
|---|---|---|---|
| El doble o duplo de un número | $2x$ | El triple de un número | $3x$ |
| El cuádruplo de un número | $4x$ | La mitad de un número | $\frac{x}{2}$ |
| Un tercio de un número | $\frac{x}{3}$ | Un cuarto de un número | $\frac{x}{4}$ |
| Un número es proporcional a 2, 3, 4, ... | $2x, 3x, 4x, ...$ | Un número al cuadrado | $x^2$ |
| Un número al cubo | $x^3$ | Dos números consecutivos | $x, x+1$ |
| Dos números consecutivos pares | $2x, 2x+2$ | Dos números consecutivos impares | $2x+1, 2x+3$ |
| Descomponer 24 en dos partes | $x, 24-x$ | La suma de dos números es 24 | $x, 24-x$ |
| La diferencia de dos números es 24 | $x, 24+x$ | El producto de dos números es 24 | $x, \frac{x}{24}$ |
| El cociente de dos números es 24 | $x, 24x$ | | |

IMPORTANTE: Al escribir expresiones algebraicas se debe tener en cuenta lo siguiente:

- El signo de multiplicación (·, ×) no suele ponerse entre los números y las letras, ni entre las letras.

Por ejemplo, $15\cdot x^3 = 15\times x^3$ pero lo escribiremos $15x^3$

- El signo + o - que precede a una letra es un signo de operación; no indica que el valor que toma la letra sea positivo o negativo.
- Si el uno actúa como factor, divisor o exponente, no hace falta ponerlo.

Por ejemplo, $1\cdot x^5 = x^5$, $\frac{3x^2}{1} = 3x^2$, $7x^1 = 7x$

- Las letras $a, b, c..., x, y, z$ representan números; cuando operamos con ellas es como si operásemos con los números que representan y cumplen idénticas reglas.

**Valor numérico de una expresión algebraica**

El valor numérico de una expresión algebraica, para un determinado valor, es el número que se obtiene al sustituir en ésta por valor numérico dado y realizar las operaciones indicadas.

Es decir:

1. Reemplazar cada variable por el valor asignado.
2. Calcular las potencias indicadas
3. Efectuar las multiplicaciones y divisiones
4. Realizar las adiciones y sustracciones

<u>Ejemplo</u>: Calcula el valor numérico de la expresión algebraica $3x^2$ para el valor de la variable $x=5$

Sustituimos y operamos $3{\cdot}5^2=3{\cdot}25=75$, y este número es el valor numérico.

<u>Ejemplo</u>: Calcula el valor que toma la expresión algebraica $5x^2y - 8xy^2 - 9y^3$, considerando $x = 2$; $y = -1$

$$5x^2y-8xy^2-9y^3=5\cdot 2^2\cdot(-1)-8\cdot 2\cdot(-1)^2-9\cdot(-1)^3$$

$$= 5\cdot 4\cdot(-1)-8\cdot 2\cdot 1-9\cdot(-1)=$$

$$=-20-16+9=-27$$

**<u>Tipos de expresiones algebraicas</u>**

<u>Monomio</u>: Un monomio es una expresión algebraica formada por un solo término y los exponentes de las variables son naturales.

Ejemplo: $-7x^3$ es un monomio; $4x^5yz^2$ es un monomio

<u>Binomio</u>: Un binomio es una expresión algebraica formada por dos términos y los exponentes de las variables son naturales.

Ejemplo: $-7x^3+6$ es un binomio; $4x^5yz^2+5x^2$ es un binomio

<u>Trinomio</u>: Un trinomio es una expresión algebraica formada por tres términos y los exponentes de las variables son naturales.

Ejemplo: $-7x^3+6x+7$ es un trinomio; $4x^5yz^2+5x^2+4y$ es un trinomio

<u>Polinomio</u>: Un polinomio es una expresión algebraica formada por más de un término y los exponentes de las variables son naturales.

Ejemplo: $-7x^3+6x^2-8x+4$ es un polinomio

**<u>MONOMIOS</u>**

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y la potencia de exponente natural como hemos visto anteriormente

<u>Ejemplo</u>: $-7x^3$ es un monomio en una variable, $4x^5yz^2$ es un monomio en tres variables

<u>Definición</u>: El <u>coeficiente del monomio</u> es el número que aparece multiplicando a las variables.

<u>Ejemplo</u>: $-7x^3$ tiene por coeficiente a $-7$, $4x^5yz^2$ tiene por coeficiente 4

Definición: La parte literal está constituida por las letras y sus exponentes.

Ejemplo: $-7x^3$ tiene por parte literal a $x^3$, $4x^5yz^2$ tiene por parte literal a $x^5yz^2$

Definición: El grado de un monomio es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

Ejemplo: $-7x^3$ tiene grado 3, $4x^5yz^2$ tiene grado 8 = 5 + 1 + 2

Definición: Dos monomios se dicen semejantes cuando tienen la misma parte literal.

Ejemplo: $-7x^3$ y $9x^3$ son semejantes; $4x^5yz^2$ y $\frac{2}{3}x^5yz^2$ son semejantes

**OPERACIONES CON MONOMIOS**

Suma y resta de monomios

Sólo podemos sumar y restar monomios semejantes.

La suma o resta de los monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma o resta de los coeficientes.

Ejemplo: $-7x^3+9x^3=(-7+9)x^3=2x^3$

Ejemplo: $x^5+5x^5-\frac{3}{2}x^5=\left(1+5-\frac{3}{2}\right)x^5=\left(6-\frac{3}{2}\right)x^5==\left(\frac{12-3}{2}\right)x^5=\frac{9}{2}x^5$

Si los monomios no son semejantes no se pueden agrupar (sumar) y se obtiene un polinomio.

Ejemplo: $x^3+5x^2-\frac{3}{2}x^3=\left(1-\frac{3}{2}\right)x^3+5x^2=-\frac{1}{2}x^3+5x^2$ y estos dos monomios finales no son semejantes.

Producto de un número por un monomio

El producto de un número por un monomio es otro monomio semejante cuyo coeficiente es el producto del coeficiente de monomio por el número.

Ejemplo: $-7\cdot(9x^3)=-63x^3$ ; $10\cdot(\frac{5}{4}x^4)=\frac{50}{4}x^2=$(simplificamos la fracción)$=\frac{25}{2}x^2$

Multiplicación de monomios

La multiplicación de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tenga la misma base.

Ejemplo: $-7x^3\cdot 9x^2=(-7\cdot 9)x^3\cdot x^2=-63x^5$

$\frac{3}{2}x^3\cdot\frac{x}{6}=(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6})x^3\cdot x=\frac{3}{12}x^{3+1}=\frac{1}{4}x^4$

División de monomios

Sólo se pueden dividir monomios cuando el grado del dividendo mayor o igual que el grado de la variable correspondiente del divisor. La división de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tenga la misma base.

Ejemplo: $-27x^3 : 9x^2 = \frac{-27x^3}{9x^2} = \frac{-27}{9}x^{3-2} = -3x$

$\frac{18x^7}{12x^3} = \frac{18}{12}x^{7-3} = \frac{3}{2}x^4$

Potencia de un monomio

Para realizar la potencia de un monomio se eleva, cada elemento de éste, al exponente de la potencia.

Ejemplo: $\left(2x^3\right)^5 = 2^5\left(x^3\right)^5 = 32x^{3\cdot 5} = 32x^{15}$

$\left(\frac{-2}{3}x^2\right)^2 = \left(\frac{-2}{3}\right)^2\left(x^2\right)^2 = \frac{4}{9}x^4$

## 2. SUMA Y PRODUCTO DE POLINOMIOS

Un **polinomio** en la indeterminada $x$ es una expresión algebraica formada por la suma o diferencia de monomios en la misma indeterminada. Se suelen notar por $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$

Se llama **término** de un polinomio a cada uno de los monomios que lo forman. Al monomio de grado cero lo llamamos término independiente.

Se llama **grado** de un polinomio al mayor de los grados de los monomios que lo forman.

*Ejemplo*:

El polinomio $P(x) = -3x^5 + 4x^3 - x + \frac{1}{3}$ tiene grado 5 y su término independiente es $\frac{1}{3}$

*Operaciones*

a) Suma y diferencia de polinomios

Para sumar o restar polinomios se suman o restan los monomios semejantes.

Ejemplo:

Dados los polinomios

$P(x) = 2x^4 - x^2 + 3$ $\quad Q(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ $\quad R(x) = 7x^2 - 7$

Vamos a efectuar $P(x) - [Q(x) + R(x)]$ = $(2x^4 - x^2 + 3)$ - $\left[\left(x^3 + 2x^2 - x + 1\right) + \left(7x^2 - 7\right)\right]$ =

= $(2x^4 - x^2 + 3)$ - $\left(x^3 + 9x^2 - x - 6\right)$ = $2x^4 - x^3 - 10x^2 + x + 9$

Ejemplo: Sean los polinomios $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ y $Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$, vamos a calcular $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$ y $Q(x) - 2P(x)$

Primero ordenamos el polinomio $Q(x)$ que nos queda $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$$P(x) + Q(x) = \left(2x^3 + 5x - 3\right) + \left(2x^3 - 3x^2 + 4x\right) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$$

$$P(x) - Q(x) = \left(2x^3 + 5x - 3\right) - \left(2x^3 - 3x^2 + 4x\right) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x = 3x^2 + x - 3$$

$$Q(x) - 2\cdot P(x) = \left(2x^3 - 3x^2 + 4x\right) - 2\left(2x^3 + 5x - 3\right) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 4x^3 - 10x + 6 = -2x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$

b) Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplican todos los monomios del primero por cada uno de los del segundo, o viceversa, y por último se reducen los términos semejantes.

*Ejemplo*:

Dados los polinomios

$P(x) = 2x^4 - x^2 + 3$ $\quad R(x) = 7x^2 - 7$, calcular $P(x) \cdot R(x)$ = $(2x^4 - x^2 + 3) \cdot (7x^2 - 7)$ = $14x^6 - 14x^4 - 7x^4 + 7x^2 + 21x^2 - 21 = 14x^6 - 21x^4 + 28x^2 - 21$

*Ejemplo*:

Dado el polinomio $P(x) = 3x^2 - 2$, calcular $[P(x)]^2$

$[P(x)]^2$ = $\left(3x^2 - 2\right)^2$ = $\left(3x^2\right)^2 - 2\cdot 3x\cdot^2 \cdot 2 + 2^2 = 9x^4 - 12x^2 + 4$

Ejemplo: Dados los polinomios $P(x) = 2x^2 - 3$ y $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$, calcula su producto.

Vamos a multiplicar cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.

$$P(x)\cdot Q(x) = (2x^2 - 3)\cdot(2x^3 - 3x^2 + 4x) = 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x = 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$$

Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

También podemos multiplicar polinomios de siguiente modo:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x \\
 & & & 2x^2 & -3 \\
\hline
 & & -6x^3 & +9x^2 & -12x \\
4x^5 & -6x^4 & +8x^3 & & \\
\hline
4x^5 & -6x^4 & +2x^3 & +9x^2 & -12x
\end{array}$$

## 3. POTENCIAS DE POLINOMIOS. IDENTIDADES NOTABLES

La potencia de un polinomio es igual al polinomio que se obtiene al multiplicar por sí mismo tantas veces el polinomio base como indica el exponente.

Hay casos en los que es muy útil el uso de los productos notables:

| | |
|---|---|
| Cuadrado de una suma: | $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ |
| Cuadrado de una diferencia: | $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ |
| Suma por diferencia: | $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ |

<u>Ejemplo</u>:

a) $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 2 + 6x + 9$

b) $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

c) $(2x+5) \cdot (2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

## 4. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Efectuar la división de un polinomio dividendo, $D(x)$, por un polinomio divisor, $d(x)$, que ha de ser distinto de cero y <u>con grado menor o igual que el dividendo</u>, consiste en hallar un polinomio cociente, $C(x)$, y un polinomio resto, $R(x)$, que cumplan:

$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$ con $0 \leq$ Grado de $R(x)$ < grado de $d(x)$

Si tanto el dividendo como el divisor son dos monomios, es decir: $D(x) = a \cdot x^m$, $d(x) = b \cdot x^n$, entonces la división es exacta, y el cociente viene dado por:

$$C(x) = D(x) : d(x) = \frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b} \cdot x^{m-n}$$

Si tanto el dividendo como el divisor son polinomios, conviene seguir el siguiente procedimiento:

1. Se ordenan los dos polinomios en forma decreciente según las potencias de x, teniendo cuidado de dejar los huecos correspondientes a los términos que falten en el dividendo.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.
3. El término hallado del cociente se multiplica por el divisor y el producto se resta del dividendo, obteniendo un resto parcial.

4. Si el resto parcial es cero, o su grado es menor que el grado del divisor, hemos concluido la división. En caso contrario, se repite el proceso hasta llegar a un resto cuyo grado sea menor que el divisor.

Lo vemos con un ejemplo:

Ejemplo: Realizar la división $(3x^3-2x^2-12):(x^2-3x-5)$

1. Se ordenan los polinomios según las potencias de x, de mayor a menor. Si el dividendo es incompleto dejamos e spacios en blanco correspondientes a los términos que faltan.

$$\begin{array}{llll|l} 3x^3 & -2x^2 & & -12 & x^2-3x-5 \\ \hline \end{array}$$

2. Hallamos el cociente entre el primer término del dividendo y el primer término del divisor .

$$\frac{3x^3}{x^2}=3x$$

3. El término hallado del cociente se multiplica por cada monomio del divisor y se pasa con signo cambiado debajo del dividendo

$$\begin{array}{llll|l} 3x^3 & -2x^2 & & -12 & x^2-3x-5 \\ \cline{5-5} -3x^3 & +9x^2 & +15x & & 3x \\ \cline{1-4} & 7x^2 & +15x & -12 & \end{array}$$

4. Se baja el siguiente término del dividendo y se divide el primer término del dividendo parcial entre el primer tér mino del divisor. Se continúa el proceso hasta llegar a un resto cuyo grado sea menor que el grado del divisor

$$\frac{7x^2}{x^2}=7$$

$$\begin{array}{llll|l} 3x^3 & -2x^2 & & -12 & x^2-3x-5 \\ \cline{5-5} -3x^3 & +9x^2 & +15x & & 3x+7 \\ \cline{1-4} & 7x^2 & +15x & -12 & \\ & -7x^2 & +21x & +35 & \\ \cline{1-4} & & +36x & +23 & \end{array}$$

Ya tenemos el resto $R(x)=36x+23$ que tiene grado 1 y es menor que el grado del divisor que tiene grado 2 y el cociente es $C(x)=3x+7$

Si queremos comprobar que lo hemos hecho bien basta hacer $D(x)=d(x)\cdot C(x)+R(x)$ , que en este caso sería

$$3x^3-2x^2-12=(x^2-3x-5)\cdot(3x+7)+(36x+23)$$

Ejemplo: Sean $P(x)=2x^4+x^3-x^2+3$ y $Q(x)=-x^2+7$, vamos a efectuar la división $P(x):Q(x)$ ó $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

A $P(x)$ se le llama polinomio dividendo y a $Q(x)$ se le llama polinomio divisor

Hay que seguir estos pasos para dividir polinomios:

- Para poder dividir polinomios el grado del polinomio dividendo (en este caso 4) ha de ser mayor que el del polinomio divisor(en este caso 2)

- Se ordenan los polinomios dividendo y divisor de mayor a menor grado. Si el dividendo estuviera incompleto, dejamos huecos o espacios en blanco correspondientes a los términos que faltan.

$$\begin{array}{ccccc|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} \end{array}$$

- Hacemos la división o cociente entre el primer término del dividendo y el primer término del divisor. En este ejemplo, $\dfrac{2x^4}{-x^2}=-2x^2$. Éste será el primer término del cociente

$$\begin{array}{ccccc|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} & & & & & -2x^2 \end{array}$$

- El cociente obtenido lo multiplicamos por el divisor y los pasamos con signo opuesto o cambiado debajo de los términos del polinomio dividendo

$$\begin{array}{ccccc|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} -2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2 \end{array}$$

- Sumamos los polinomios de la parte del dividendo, y vemos que siempre el de mayor grado se cancela

$$\begin{array}{ccccc|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} -2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2 \\ \cline{1-5} 0 & +x^3 & +13x^2 & & +3 & \end{array}$$

- Con el polinomio resultante, volvemos a realizar el mismo proceso, es decir, dividimos el de mayor grado del nuevo $+x^3$ entre el de mayor grado del divisor $-x^2$, $\dfrac{x^3}{-x^2}=-x$, que será el nuevo término del polinomio cociente

$$\begin{array}{ccccc|l} 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & +3 & -x^2+7 \\ \cline{6-6} -2x^4 & & +14x^2 & & & -2x^2-x \\ \cline{1-5} \end{array}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $+x^3$ | $+13x^2$ | | +3 |

- Volvemos a multiplicar, en este paso $-x$ por el divisor y lo pasamos al otro lado con signo cambiado y sumamos

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x^4$ | $+x^3$ | $-x^2$ | | +3 | $-x^2+7$ |
| $-2x^4$ | | $+14x^2$ | | | $-2x^2-x$ |
| 0 | $+x^3$ | $+13x^2$ | | +3 | |
| | $-x^3$ | | $+7x$ | | |
| | 0 | $+13x^2$ | $+7x$ | +3 | |

- Hacemos lo mismo, repetidamente hasta que el grado del polinomio dividendo resultante sea menor que el grado del polinomio divisor. Todavía hay que hacerlo una vez más, en este paso $\dfrac{13x^2}{-x}=-13$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x^4$ | $+x^3$ | $-x^2$ | | +3 | $-x^2+7$ |
| $-2x^4$ | | $+14x^2$ | | | $-2x^2-x-13$ |
| 0 | $+x^3$ | $+13x^2$ | | +3 | |
| | $-x^3$ | | $+7x$ | | |
| | 0 | $+13x^2$ | $+7x$ | +3 | |
| | | $-13x^2$ | | +91 | |
| | | 0 | $+7x$ | +94 | |

- Con esto ya tenemos hecha la división donde el polinomio cociente es $C(x)=-2x^2-x-13$ y el polinomio resto es $R(x)=7x+94$. Si nos fijamos vemos que el polinomio resto siempre ha de tener menor grado que el polinomio divisor.
- Por último, si queremos podemos realizar la comprobación efectuando

**dividendo** = **divisor** x **cociente** + **resto**

que en este ejemplo sería hacer $(-x^2+7)\cdot(-2x^2-x-13)$ + $(7x+94)$ y ver que el resultado es $P(x)=2x^4+x^3-x^2+3$

_Ejemplo_: Efectúa la división $(3x^4-4x^3+5x^2-2x+12):(x^2-3x+5)$

*Solución*: Cociente: $C(x)=3x^2+5x+5$ Resto: $R(x)=-12x-13$

_Ejemplo_: Está resuelto y os dejo a vosotros su comprobación

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\
\cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2+5x+8 \\
\cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & & & & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & -5x & & \\
\cline{3-5}
 & & & 8x^2 & -6x & -8 & \\
 & & & -8x^2 & +16x & -8 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 10x & -16 &
\end{array}
$$

## 5. REGLA DE RUFFINI

Paolo Ruffini (1765, 1822) fue un matemático italiano, que estableción un método más breve para hacer la división de polinomios, cuando el divisor es un binomio de la forma x — a.

Para explicar los pasos a aplicar en la regla de Ruffini vamos a tomar de ejemplo la división:

$$\left(x^4-4x^2+x\right):\left(x-2\right)$$

Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros. Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea y abajo a la izquierda colocamos el término independiente del divisor.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -4 | 1 | 0 |
| 2 | | | | | |
| | | | | | |

Bajamos el primer coeficiente:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -4 | 1 | 0 |
| 2 | | | | | |
| | 1 | | | | |

Multiplicamos 2x1 y lo colocamos en el siguiente término:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -4 | 1 | 0 |
| 2 | | 2 | | | |
| | 1 | | | | |

Sumamos los términos 0 + 2 = 2

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -4 | 1 | 0 |
| 2 | | 2 | | | |
| | 1 | 2 | | | |

Y continuamos con el mismo proceso:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -4 | 1 | 0 |
| 2 | | 2 | 4 | 0 | 2 |
| | 1 | 2 | 0 | 1 | $\boxed{2}$ |

Ya hemos acabado la división. En la última fila, el último número es el resto y los demás números son los coeficientes del polinomio cociente que tiene un grado menos que el polinomio dividendo, que en este caso es:

$C(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ que es el cociente y $R(x) = 2$ que es el resto.

<u>Ejemplo</u>: Aplicamos la Regla de Ruffini para realizar la división $\left(-2x^3 + x^2 - 27\right):\left(x+3\right)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | -2 | 1 | 0 | -27 |
| -3 | | 6 | -21 | 63 |
| | -2 | 7 | -21 | $\boxed{36}$ |

El cociente es: $C(x) = -2x^2 + 7x - 21$

El resto es: $R(x) = 36$

<u>Ejemplo</u>: Vamos a dividir el polinomio ( $2x^3 - 3x^2 + 5$) entre el polinomio $(x-2)$

- Ponemos los coeficientes del polinomio dividendo en orden de mayor a menos grado y el término independiente del divisor cambiado de signo de la siguiente forma

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | -3 | 0 | 5 |
| 2 | | | | |
| | | | | |

- Bajamos el primer término del dividendo y lo multiplicamos por el término independiente. Lo ponemos debajo del siguiente término del polinomio dividendo

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | -3 | 0 | 5 |
| 2 | | 4 | | |
| | 2 | | | |

- Sumamos

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | -3 | 0 | 5 |
| 2 | | 4 | | |
| | 2 | 1 | | |

- Volvemos a operar de manera similar

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | -3 | 0 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 4 | 2 | |
| | 2 | 1 | 2 | |

- Continuamos hasta el final de igual manera

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | -3 | 0 | 5 |
| 2 | | 4 | 2 | 4 |
| | 2 | 1 | 2 | 9 |

- El último número es el resto de la división
- Los otros números son los coeficientes del polinomio dividendo, que es de un grado menos que el grado del polinomio dividendo

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | -3 | 0 | 5 |
| 2 | | 4 | 2 | 4 |
| | 2 | 1 | 2 | 9 |

- Por tanto tenemos que Cociente: $C(x) = 2x^2 + x + 2$ Resto: $R(x) = 9$

*Ejemplo*: Dividir por Ruffini $(3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 12) : (x + 1)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | -4 | 5 | -2 | -12 |
| -1 | | -3 | 7 | -12 | 14 |
| | 3 | -7 | 12 | -14 | 2 |

Por tanto tenemos que Cociente: $C(x) = 3x^3 - 7x^2 + 12x - 14$ Resto: $R(x) = 2$

## 6. TEOREMA DEL RESTO Y DEL FACTOR. RAÍCES DE UN POLINOMIO

**Teorema del Resto**: El resto de la división de un polinomio dividendo $P(x)$ por el divisor $(x-a)$ es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$, es decir, $r = P(a)$.

El teorema del resto nos permite calcular el resto de una división sin necesidad de efectuarla.

Ejemplo: Halla el resto de las siguientes divisiones sin efectuarlas:

a) $(x^4 - 5x^2 + 8x - 10) : (x - 3)$

Resto = $3^4 - 5 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 10 = 81 - 45 + 24 - 10 = 50$

b) $\dfrac{x^3 + x^2 - 3x + 7}{x - 1}$

Resto = $1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 7 = 6$

c) $(x^5-2x^2-x+2):(x+1)$

Resto = $(-1)^5-2\cdot(-1)^2-(-1)+2=-1-2+1+2=0$

d) $(-2x^3+x^2-\frac{1}{2}x-3):(x+2)$

Resto= $-2\cdot(-2)^3+(-2)^2-\frac{1}{2}\cdot(-2)-3=16+4+1-3=18$

Ejemplo:

a) Halla m para que el resto de la división $(x^3+mx^2+2x-1):(x-3)$ sea 68.
   Por el teorema del resto:
   $68=3^3+m\cdot 3^2+2\cdot 3-1 \Rightarrow 68=27+9m+6-1 \Rightarrow 68=32+9m \Rightarrow 9m=36 \Rightarrow m=\frac{36}{9}=4$
b) Halla m para que el polinomio $P(x)=x^3-x^2+m$ sea divisible por $x+2$.
   Para que sea divisible el resto ha de ser cero (nulo) luego por el teorema del resto:
   $0=(-2)^3-(-2)^2+m \Rightarrow 0=-8-4+m \Rightarrow m=12$

**Definición**: Si el valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x=a$ es igual a 0, es decir, $P(a)=0$, se dice que $a$ es una **raíz** del polinomio $P(x)$.

**Teorema del factor**: Si $x=a$ es una raíz del polinomio $P(x)$, dicho polinomio es divisible por $x-a$, es decir, es un factor de $P(x)$. O lo que es lo mismo si $P(a)=0$, entonces $P(x)=(x-a)\cdot C(x)$

Este teorema lo usaremos en el punto siguiente muy a menudo.

## 7. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

La descomposición factorial de un polinomio consiste en expresar un polinomio como producto de otros polinomios de menor grado. A la descomposición factorial de polinomios también se la denomina factorización de polinomios.

Para conseguir esta factorización se pueden usar varios procedimientos, ya sea por separado o bien combinando varios de ellos.

Hay que tener en cuenta que no todos los polinomios son susceptibles de ser descompuestos en factores.

**Descomposición factorial sacando factor común**

Sacar factor común en un polinomio es expresar el polinomio de forma que lo que está repetido en todos los términos del polinomio aparezca sólo una vez y multiplicando al resto del polinomio.

Para poder aplicar este método para hacer una descomposición factorial, todos los monomios del polinomio tienen que tener un mismo factor común.

En todos los casos en los que extraemos factor común es muy interesante realizar la multiplicación para ver si nos da lo que teníamos al principio, y asegurarnos así de que no nos hemos equivocado.

Sacar factor común es muy conveniente cuando nos encontremos con fracciones algebraicas y queramos simplificarlas.

Ejemplo: Extrae factor común del siguiente polinomio:

$P(x)=x^5-\ 4x^3+\ 2x^2=x^2\cdot\left(x^3-4x+2\right)$

Ejemplo: Extrae factor común del siguiente polinomio:

$P(x) = 25x^4 - 30x^3 + 5x^2 = 5x^2 \cdot \left(5x^2 - 6x + 1\right)$

Ejemplo: Extraemos factores comunes del polinomio $P(x) = 12x^4 + 4x^3 - 80x^2 = 4x^2 \cdot \left(3x^2 + x - 20\right)$

Ejemplo: Extraemos factores del polinomio $P(x) = (x+3)^3 - 2(x+3)^2 = (x+3)^2 \cdot [(x+3) - 2] = (x+3)^2 \cdot (x+1)$

**Descomposición aplicando los productos notables**

Como ya sabemos tenemos que:

| | | |
|---|---|---|
| $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$ | $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ | $a^2 - b^2 (a+b) \cdot (a-b)$ |

Con esto lo podemos aplicar para descomponer, veamos un ejemplo:

Ejemplo: Descomponemos $x^2 - 6x + 9 =$ (lo ponemos de la siguiente manera) $x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 =$(ya es un producto notable donde $a = x$ y $b = 3$) $x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = (x-3)^2$

Ejemplo: Descomponemos $x^2 + 8x + 16 =$ (lo ponemos de la siguiente manera) $x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 =$(ya es un producto notable donde $a = x$ y $b = 4$) $x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x+4)^2$

Ejemplo: Descomponemos $x^2 - 36 =$ (lo ponemos de la siguiente manera) $x^2 - 6^2 =$(ya es un producto notable donde $a = x$ y $b = 6$) $x^2 - 6^2 = (x+6) \cdot (x-6)$

Ejemplo: $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \Rightarrow x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

Ejemplo: $x^2 - 16 = (x-4) \cdot (x+4)$

Ejemplo: $x^4 - 16 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) = (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 4)$

**Descomposición factorial aplicando la regla de Ruffini y el teorema del Resto**

La regla de Ruffini es una herramienta para realizar divisiones de polinomios cuando el divisor es un polinomio de primer grado, pero también lo podemos utilizar para factorizar polinomios con raíces (soluciones) enteras. (La raíz o solución de un polinomio es la solución obtenida de igualar el polinomio a cero)

Si el resto es igual a cero entonces el divisor es factor del dividendo y es en esto en lo que nosotros nos basamos para poder factorizar polinomios.

Entonces, para factorizar por este método, seguimos los siguientes pasos:

1. Buscamos los divisores del término independiente (tanto de signo positivo como negativo)

2. Aplicamos Ruffini de manera que el resto sea cero

3. Seguimos aplicando Ruffini de manera recursiva mientras podamos

4. Ponemos el polinomio inicial como producto de los polinomios que nos ha dado Ruffini

Veamos un par de ejemplos:

Ejemplo: Descomponer el polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

El término independiente es 3 y sus divisores son $\pm 1, \quad \pm 3$ (hay que considerar los signos también)

Y ahora aplicamos Ruffini y nos quedamos con el que dé de resto 0

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -5 | 3 |
| +1 | | 1 | 2 | -3 |
| | 1 | 2 | -3 | 0 |

Seguimos aplicando Ruffini probando de nuevo con +1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -5 | 3 |
| +1 | | 1 | 2 | -3 |
| | 1 | 2 | -3 | 0 |
| +1 | | 1 | -3 | |
| | 1 | 3 | 0 | |

Nos vuelve a salir 0. Continuamos con Ruffini ahora con -3 que es el que nos va a servir

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -5 | 3 |
| +1 | | 1 | 2 | -3 |
| | 1 | 2 | -3 | 0 |
| +1 | | 1 | -3 | |
| | 1 | 3 | 0 | |
| -3 | | -3 | | |
| | 1 | 0 | | |

Y ya hemos acabado. Ahora nos fijamos en el cociente final y los números con los cuales nos ha salido de resto 0 (las raíces del polinomio)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -5 | 3 |
| +1 | | 1 | 2 | -3 |
| | 1 | 2 | -3 | 0 |
| +1 | | 1 | -3 | |
| | 1 | 3 | 0 | |
| -3 | | -3 | | |
| | 1 | 0 | | |

La descomposición factorial del polinomio es:

$$P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = 1\cdot(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-1) \Rightarrow \boxed{P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x+3)\cdot(x-1)^2}$$

Ejemplo: Descomponer el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Las posibles raíces son los divisores de -6, que son $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$

Empecemos con el +1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | -5 | -6 |
| 1 | | 1 | 3 | -2 |
| | 1 | 3 | -2 | $\boxed{-8}$ |

Como el resto es -8, no nos sirve y pasamos a probar con -1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | -5 | -6 |
| -1 | | -1 | -1 | 6 |
| | 1 | 1 | -6 | $\boxed{0}$ |

Con -1 la división es exacta y continuamos con Ruffini volviendo a probar con -1:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | -5 | -6 |
| -1 | | -1 | -1 | 6 |
| | 1 | 1 | -6 | $\boxed{0}$ |
| -1 | | -1 | 0 | |
| | 1 | 0 | $\boxed{-6}$ | |

Que no nos vale pues de resto sale -6

Pasamos a probar con el 2:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | -5 | -6 |
| -1 | | -1 | -1 | 6 |
| | 1 | 1 | -6 | $\boxed{0}$ |
| 2 | | 2 | 6 | |
| | 1 | 3 | $\boxed{0}$ | |

Da de resto 0 (división exacta) y ya sólo nos queda una vez más, que es con el -3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | -5 | -6 |
| -1 | | -1 | -1 | 6 |
| | 1 | 1 | -6 | $\boxed{0}$ |
| 2 | | 2 | 6 | |
| | 1 | 3 | $\boxed{0}$ | |
| -3 | | -3 | | |
| | 1 | $\boxed{0}$ | | |

Y ya lo tenemos descompuesto:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 1\cdot(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+1) \Rightarrow \boxed{P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}$$

*<u>Ejemplo</u>*: Vamos a descomponer por Ruffini el polinomio $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$. Las posibles raíces enteras son los divisores del término independiente, -6. Por tanto debemos probar con $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$ y $\pm 6$.

Empezamos y vamos probando, aquí sólo ponemos las que nos interesan, dan de resto 0

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | 6 | -3 | -6 |
| 1 | | 3 | 9 | 6 |
| | 3 | 9 | 6 | 0 |
| -1 | | -3 | -6 | |
| | 3 | 6 | 0 | |
| -2 | | -6 | | |
| | 3 | 0 | | |

Con lo cual nos queda, $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6 = 3(x-1)(x+1)(x+2)$

*<u>Ejemplo</u>*: Vamos a descomponer por Ruffini el polinomio $P(x) = 2x^2 - 9x + 9$. Las posibles raíces enteras son los divisores del término independiente, +9. Por tanto debemos probar con $\pm 1$, $\pm 3$, $\pm 9$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | -9 | 9 |
| 3 | | 6 | -9 |
| | 2 | -3 | 0 |
| $\frac{3}{2}$ | | 3 | |
| | 2 | 0 | |

La raíz racional $\frac{3}{2}$ la hemos obtenido dividiendo -3 entre 2 y cambiándole el signo. Esta regla sirve siempre para la última de las raíces. Por tanto nos queda que, $P(x) = 2x^2 - 9x + 9 = 2(x-3)\left(x - \frac{3}{2}\right)$