UNIDAD 1: NÚMEROS REALES

1. NUMEROS NATURALES Y ENTEROS

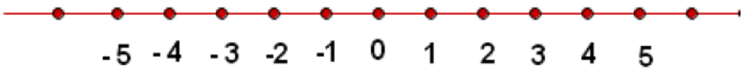
Con los **números naturales** contamos los elementos de un conjunto (**número cardinal**). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (**ordinal**). Se representa por N y sus elementos son.

N = {0, 1, 2, 3,….}

El conjunto de los números enteros son los naturales y sus correspondientes negativos. Se representa por Z y sus elementos son:

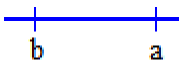
Z= {…, -2, -1, 0, 1, 2,...}

Gráficamente se representan en una recta horizontal,



Un nº entero a es menor que otro nº entero b cuando $(b-a)$ es positivo, o bien gráficamente cuando a está a la izquierda de b. Se nota por $a<b$ y gráficamente es,

Un nº entero a es mayor que otro nº entero b cuando $(b-a)$ es negativo, o bien gráficamente cuando a está a la derecha de b. Se nota por $a>b$ y gráficamente es,



Un concepto asociado a los números enteros es el de valor absoluto, que de manera burda consiste en convertir al nº en positivo si fuera negativo, y si es positivo dejarlo tal cual.

La definición correcta es la siguiente:

$$|a|=\begin{cases} a & si \quad a\geq 0 \\ -a & si \quad a<0 \end{cases}$$

Ejemplos:

|-4| = -(-4) = 4 |9| = 9 |0| = 0

2. NÚMEROS RACIONALES. POTENCIAS

Se llama número **racional** a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero. Matemáticamente se expresa como sigue:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \,/\, a\in \mathbb{Z}\,;\, b\in \mathbb{Z};\, b\neq 0\right\}$$

El concepto de potencia de un nº racional y exponente natural es análogo al conocido para los enteros, así por ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^4}{3^4}$$

Así, se define la potencia de base un nº racional, $\frac{a}{b}$, y exponente entero como:

- Si el exponente es entero positivo: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

- Si el exponente es cero: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^0 = 1$
- Si el exponente es entero negativo: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$

Estas potencias tienen las mismas propiedades que las potencias de base un nº entero

1) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^1 = \dfrac{a}{b}$	2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+m}$
3) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n : \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n-m}$	4) $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$
5) $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)\cdot\left(\dfrac{c}{d}\right)\right]^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\dfrac{c}{d}\right)^n$	6) $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right):\left(\dfrac{c}{d}\right)\right]^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n : \left(\dfrac{c}{d}\right)^n$

NOTA: Jerarquía de operaciones:

1) Los paréntesis y/o corchetes y empezar por los más internos
2) Potencias
3) Productos y divisiones
4) Sumas y rectas

Ejercicios resueltos:

1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^5$	2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 : \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^5$
3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \dfrac{2}{3}$	4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = \dfrac{3}{2}$
5) $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^6$	6) $\left\{\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^3\right\}^{-4} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-24} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{24}$
7) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2}{3}$	8) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\dfrac{27}{8}\right)^{-3} = \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^{-2} : \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right]^{-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-9} =$ $= \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\dfrac{2}{3}\right)^9 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-13} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{13}$

3. RELACIONES ENTRE LOS NÚMEROS RACIONALES Y DECIMALES

Cualquier nº racional se puede expresar como un nº decimal exacto, periódico puro (la parte decimal es sólo periódica) o periódico mixto (la parte decimal tiene una parte no periódica) sin más que dividir numerador entre denominador de la forma habitual

$\dfrac{131}{20} = 6{,}55$ $\qquad \dfrac{514}{18} = 28{,}\overset{\frown}{5}$ $\qquad \dfrac{272}{220} = 1{,}3\overset{\frown}{36}$

Análogamente, cualquier nº decimal exacto, periódico puro o periódico mixto se puede expresar como un nº racional. Veamos unos ejemplos,

$$2{,}23 = \frac{223}{100} \qquad 3{,}1\overset{\frown}{2} = \frac{312-3}{99} = \frac{309}{99} = \frac{103}{33} \qquad -4{,}23\overset{\frown}{7} = -\frac{4237-423}{900} = \frac{3814}{900} = \frac{1907}{450}$$

Podemos concluir entonces, que los números racionales equivalen al conjunto formado por los decimales exactos, los periódicos puros y los periódicos mixtos.

4. NÚMEROS IRRACIONALES. NÚMEROS REALES

Hay números decimales con infinitas cifras decimales que no son periódicos como por ejemplo:

3,101001000100001…. -354,145141451414145…..

A estos números los llamamos **irracionales** y se notan por **I**, y son aquellos números que no se pueden representar por una fracción.

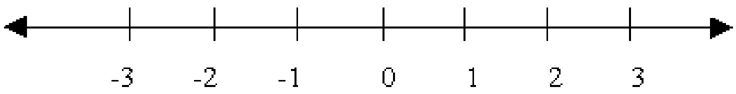
Los números irracionales más conocidos son:

- El número π: $\pi = 3{,}14159265…..$
- El número $\sqrt{2}$: $\sqrt{2} = 1{,}41421356….$
- El número de oro ϕ (número áureo): $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398….$
- El número e: $e = 2{,}7182818284…….$

El conjunto de los números racionales en unión con los números irracionales forman el conjunto de los números reales y se denota por la letra $\mathbb{R}$

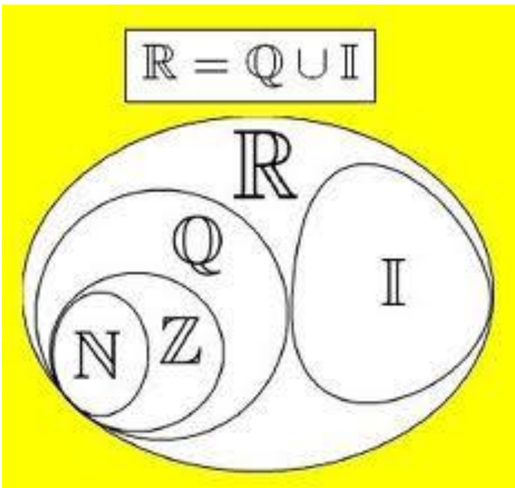
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Los números reales llenan por completo la recta, cada punto de la recta corresponde a un nº real y viceversa. Por eso la llamamos **recta real**



Resumiendo en un esquema, los conjuntos de números que hemos visto son:

o bien



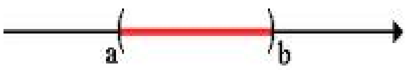
5. INTERVALOS EN LA RECTA REAL

Símbolos matemáticos			
$\in$ Pertenece a	$\notin$ No pertenece a	$\bigcup$ Unión	$\bigcap$ Intersección
$\subset$ Contenido en	$\subseteq$ Contenido o igual a	$\exists$ Existe	$\forall$ Para todo
$\Leftrightarrow$ Sí y sólo si	$\Rightarrow$ Implica	$\neg$ No	$\cong$ Aproximadamente

El **intervalo abierto** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b pero sin incluirlos. Matemáticamente se expresa así: $(a,b)=\{x\in R \text{ tales que } a<x<b\}$

Se representa gráficamente por

ó por



El **intervalo cerrado** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluidos éstos. Matemáticamente se expresa así: $[a,b]=\{x\in R \text{ tales que } a\le x\le b\}$

Se representa gráficamente por

ó por

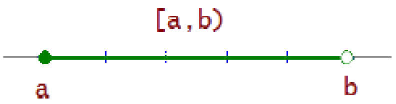
El **intervalo semiabierto o semicerrado** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluido uno sólo de ellos. Matemáticamente se expresa así:

$[a,b)=\{x\in R \text{ tales que } a\le x<b\}$ (semiabierto a la izquierda o semicerrado a la derecha)

$(a,b]=\{x\in R \text{ tales que } a<x\le b\}$ (semiabierto a la derecha o semicerrado a la izquierda)

Se representa gráficamente por

Se rellena el extremo que entra dentro del intervalo y sin rellenar el que no está

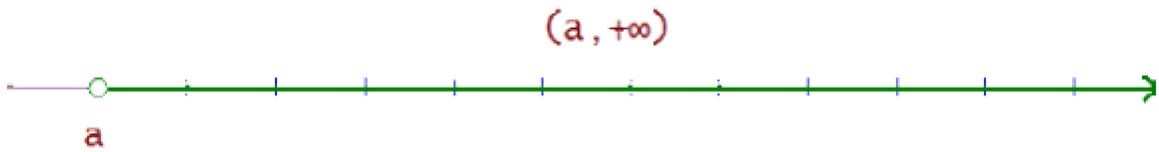


Semirrectas

Las **semirrectas** están determinadas por un número. En una **semirrecta** se encuentran todos los números mayores (o menores) que él.

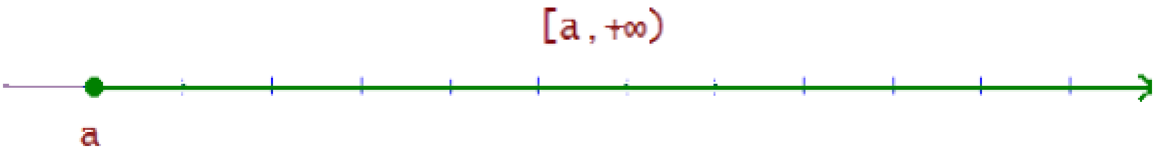
$x > a$

$(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < +\infty\}$



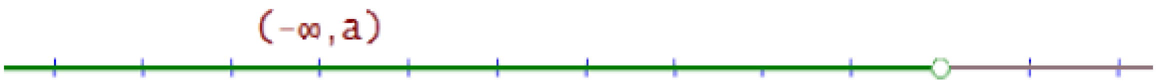
$x \geq a$

$[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < +\infty\}$



$x < a$

$(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ -\infty < x < a\}$



$x \leq a$

$(-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ -\infty < x \leq a\}$

6. APROXIMACIONES DECIMALES. REDONDEOS Y TRUNCAMIENTOS

Una **aproximación decimal de orden n por defecto** es una estimación en la cual todas las cifras, incluida la que indica el orden, son las mismas que en el nº original y las demás son cero.

Una **aproximación decimal de orden n por exceso** es una estimación en la cual todas las cifras, excluida la que indica el orden, son las mismas que en el nº original; la que indica el orden es una unidad más y el resto de ellas son cero.

Ejemplo:

Con el nº $\pi = 3{,}14159265$….., tenemos que la aproximación decimal de orden 3 (a la milésima) por defecto es $\pi \cong 3{,}141$

Y la aproximación decimal por exceso de orden 3 (a la milésima) es $\pi \cong 3{,}142$

El **redondeo de orden n** de un nº es la mejor aproximación decimal de orden n que se puede dar de ese número. Se observa la cifra que ocupa el lugar de orden n; si la cifra siguiente es inferior a 5, el redondeo es por aproximación decimal por defecto y, si es mayor o igual que 5, el redondeo es la aproximación decimal por exceso.

Ejemplo:

Con el nº $\pi = 3{,}14159265$….., tenemos que por redondeo de orden 3 (a la milésima) es $\pi \cong 3{,}142$ pues la 4ª cifra es un 5 y por tanto la milésima se aumenta en una unidad.

Ahora, el redondeo de orden 5 (a la cienmilésima) es $\pi \cong 3{,}14159$ pues la 6ª cifra decimal es un 2, y por tanto la cifra de la cienmilésima se queda igual.

El **truncamiento de orden n** de un nº es su aproximación decimal por defecto de orden n

7. NOTACIÓN CIÉNTIFICA

Expresar un nº en notación científica ponerlo como un producto cuya cifra de unidades es un dígito del 1 al 9 seguido de una parte decimal, por una potencia de base 10 y exponente entero

$$a,bcd... \cdot 10^{n}$$

Se suele usar para números muy grandes o muy pequeños.

Ejemplos:

$3\,452\,000\,000 = 3{,}452 \cdot 10^{9}$

$-0,000\ 000\ 846 = -\ 8,46 \cdot 10^{-7}$

8. RADICALES

Se llama **raíz enésima** de un nº a, y se denota por $\sqrt[n]{a}$, a otro número b que cumple que $a = b^n$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, donde a se llama **radicando** y n se llama **índice**

Un mismo nº o radical puede ser escrito de formas diferentes, usando radicales equivalentes, como por ejemplo

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[6]{2^2}$$

Para obtener radicales equivalentes basta multiplicar o dividir por un mismo nº el índice del radical y el exponente del radicando.

Ejemplo: Simplificar los siguientes radicales

$$\sqrt[12]{2^6} = \sqrt[6\cdot 2]{2^6} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[4]{x^3}$$

Ejemplo: Extraer factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{x^8} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot x^2} = x \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b) $\sqrt{16a^5b^7} = \sqrt{4^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2 \cdot b^2 b^2 \cdot b} = 4 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \sqrt{ab} = 4 \cdot a^2 \cdot b^3 \sqrt{ab}$

c) $\sqrt[3]{64a^6z^3} = \sqrt[3]{2^6 a^6 z^3} = 2^2 \cdot a^2 \cdot z \cdot \sqrt[3]{1} = 4 \cdot a^2 \cdot z$

Ejemplo: Introducir factores en los siguientes radicales:

a) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$

b) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{\left(a^2\right)^3 \cdot a \cdot b} = \sqrt[3]{a^7 \cdot b}$

Ejemplo: Efectuar las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{2} = \left(3 - \frac{2}{3} + 5 - \frac{4}{5}\right)\sqrt{2} = \left(\frac{45 - 10 + 75 - 12}{15}\right)\sqrt{2} = \frac{98}{15}\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{250} = 2\sqrt[3]{2^4} - 5\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{2 \cdot 5^3}$

$= 2 \cdot 2\sqrt[3]{2} - 5 \cdot 3\sqrt[3]{2} + \frac{1}{5} \cdot 5\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = -10\sqrt[3]{2}$

Exponente fraccionario: Todo radical se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario de la siguiente forma $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Las propiedades de las potencias se cumplen igualmente para las potencias de exponente fraccionario.

Ejemplo: Efectúa las siguientes operaciones usando exponente fraccionario:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$

b) $\sqrt[5]{2a^4} : \sqrt[5]{2a^3} = \dfrac{2^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{4}{5}}}{2^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$

c) $a^{-1} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{-1} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{-2}{3}} = \dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

d) $\sqrt[4]{27} : \sqrt[3]{9} = \sqrt[4]{3^3} : \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{3}{4}} : 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{3}$

9. RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Al procedimiento por el cual eliminamos los radicales del denominador de una fracción se llama racionalización

Hay diferentes formas:

a) Del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$: Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt{b}$

Ejemplos: Racionalizar:

1) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

2) $\frac{3}{\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{3\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \frac{3\sqrt{x-1}}{x-1}$

b) Del tipo $\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$: Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador

Ejemplos: Racionalizar:

1) $\frac{20}{3-\sqrt{5}} = \frac{20}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{20 \cdot \left(3+\sqrt{5}\right)}{3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{20 \cdot \left(3+\sqrt{5}\right)}{4} = 5 \cdot \left(3+\sqrt{5}\right)$

2) $\frac{2}{\sqrt{3}+2} = \frac{2}{\sqrt{3}+2} \cdot \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{3}-2\right)}{\sqrt{3}^2 - 2^2} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{3}-2\right)}{-1} = -2 \cdot \left(\sqrt{3}-2\right)$

c) Del tipo $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$: Análogo al caso anterior

Ejemplos: Racionalizar:

1) $\frac{20}{\sqrt{15}-\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{15}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}+\sqrt{5}} = \frac{20 \cdot \left(\sqrt{15}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{15}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{20 \cdot \left(\sqrt{15}+\sqrt{5}\right)}{10} = 2 \cdot \left(\sqrt{15}+\sqrt{5}\right)$

2) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y) \cdot \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2} = \frac{(x-y) \cdot \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$