

UNIDAD 0: NOCIONES BÁSICAS

1. NÚMEROS NATURALES

Los números naturales se usan para contar y ordenar los elementos de un conjunto.

Los números naturales se representan por la letra \mathbb{N} y son $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ que como vemos son infinitos.

También además de para contar sirven para ordenar, 1º (primero), 2º (segundo), 3º (tercero), ...

Las dos operaciones básicas son la suma (adición) y la multiplicación (producto), y su resultado siempre es un nº natural, por eso se dicen que son operaciones internas. Es necesario saber las tablas de multiplicar hasta el 10 como mínimo, pues ello nos permite agilizar nuestros cálculos sin usar la calculadora.

La resta (sustracción o diferencia) no es una operación interna pues la resta de dos números naturales puede que no sea un número natural, como por ejemplo $2 - 7$ cuyo resultado es, como sabemos, -5 que es entero pero no natural.

Lo mismo ocurre con la división (cociente) entre dos números naturales, como por ejemplo $\frac{3}{5}$ que es un número racional.

División. Criterios de divisibilidad.

La división es la operación que tenemos que hacer como para repartir un número de cosas entre un número de personas. Se presenta por $a : b$ o bien por $\frac{a}{b}$. Al número a se le llama DIVIDENDO y al número b se le conoce como DIVISOR. El resultado de la división da un COCIENTE (lo que corresponde a cada elemento del divisor) y un RESTO que es lo que sobra.

Si el resto es cero la división se llama exacta y en caso contrario inexacta y se podrán calcular decimales si fuera necesario.

Cuando la división $\frac{a}{b}$ es exacta diremos que el nº a es divisible por el nº b . También se puede decir que a es un múltiplo de b o que b es un divisor de a .

Hay unas reglas sencillas para saber con rapidez si un número natural es divisible por otro, las más usadas son las siguientes:

Número	Criterio	Ejemplo
2	El número termina en cero o cifra par (el cero se considera par).	456: porque la última cifra 6 es par.
3	La suma de sus cifras es un múltiplo de 3.	534: porque $5+3+4 = 12$ es múltiplo de 3.
4	El número formado por las dos últimas cifras es un múltiplo de 4 o cuando termina en doble cero.	920: porque 20 es múltiplo de 4.
5	La última cifra es 0 ó 5.	715: porque acaba en 5.
6	El número es divisible por 2 y por 3.	36: Por los criterios anteriores
9	La suma de sus cifras es múltiplo de 9.	855: porque $8+5+5 = 18$ es múltiplo de 9.

10	La última cifra es 0.	540: termina en cifra 0.
----	-----------------------	--------------------------

Un número es primo cuando sólo tiene por divisores al 1 y a el mismo.

En caso contrario diremos que el número es compuesto.

El 0 y el 1 son números especiales que no se consideran ni primos ni compuestos.

Descomposición de números naturales en factores primos (factorización)

La descomposición de un número en sus factores primos es la expresión del número como producto de otros factores más pequeños y que sean números primos.

Para hacer esta descomposición se realizan divisiones sucesivas del número y de los cocientes obtenidos por números primos (elegidos de menor a mayor) y se acaba con el último cociente igual a 1.

Ejemplo:

<p>a) $\begin{array}{r l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$</p>	<p>b) $\begin{array}{r l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$</p>
<p>Descomposición factorial: $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ Los factores primos de 132 son 2, 3, 11.</p>	<p>Descomposición factorial: $48 = 2^4 \cdot 3$ Los factores primos de 48 son 2, 3.</p>

Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (MCM) de números naturales

El máximo común divisor es el mayor de los divisores comunes de dichos números.

Para calcularlo se utiliza el siguiente procedimiento:

1. Se realiza la descomposición factorial de cada número.
2. Se buscan los factores primos comunes a estos números.
3. El MCD es igual al producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente con que aparezcan en la descomposición de cada número.
4. Si no encontramos factores comunes a todos los números el MCD es 1.

Ejemplo: Calcular el Máximo común divisor de 225, 60, 315

$\begin{array}{r} 225 \\ 75 \\ 25 \\ 5 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ \end{array}$	$\begin{array}{r} 45 \\ 15 \\ 5 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ 5 \\ \end{array}$	$\begin{array}{r} 315 \\ 105 \\ 35 \\ 7 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ \end{array}$
$225 = 3^2 \cdot 5^2$		$45 = 3^2 \cdot 5$		$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	

Los factores comunes de estos tres números son 3 y 5. Así, $MCD(225, 45, 315) = 3^2 \cdot 5 = 45$

El mínimo común múltiplo es el menor de los múltiplos comunes (distinto del cero) de dichos números.

Para calcularlo se utiliza el siguiente procedimiento:

- 1.- Se realiza la descomposición factorial de cada número.
- 2.- Se buscan los factores primos comunes a estos números.
- 3.- El MCM es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente con que aparezcan en la descomposición de cada número.

Ejemplo: Calcular el mínimo común múltiplo de 8, 12, 90

$$\begin{array}{r|l}
 8 & 2 \\
 4 & 2 \\
 2 & 2 \\
 3 & 1 \\
 4 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 90 & 2 \\
 45 & 3 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$8 = 2^3$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

¿Cuáles son los factores comunes (repetidos) a los tres números?2..

¿Cuáles son los factores no comunes?3 y 5.....

Por tanto, $MCM(8, 12, 90) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$

2. NÚMEROS ENTEROS

Los números enteros son un conjunto de números que incluye a los números naturales distintos de cero (1, 2, 3, ...), los negativos de los números naturales (... , -3, -2, -1) y al 0. Los enteros negativos, como -1 o -3 (se leen «menos uno», «menos tres», etc.), son menores que todos los enteros positivos (1, 2, ...) y que el cero. Para resaltar la diferencia entre positivos y negativos, a veces también se escribe un signo «más» delante de los positivos: +1, +5, etc. Cuando no se le escribe signo al número se asume que es positivo.

El conjunto de todos los números enteros se representa por la letra \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Al igual que los números naturales, los números enteros pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse, de forma similar a los primeros. Sin embargo, en el caso de los enteros es necesario calcular también el signo del resultado.

El **opuesto** de un número entero es otro número entero con el mismo valor numérico y signo contrario. Todos los números enteros tienen un opuesto.

Ejemplos:

$$Op(21) = -21$$

$$Op(-1) = +1$$

$$Op(0) = 0$$

$$Op(6) = -6$$

$$Op(-51) = +51$$

$$Op(17) = -17$$

- Para SUMAR números enteros del mismo signo se suman en valor absoluto (sin considerar el signo) y se le pone el signo que tengan:

Ejemplos:

$$2 + 54 + 4 = +60$$

$$-6 + (-7) + (-17) = -30$$

- Para SUMAR números enteros de distinto signo se restan en valor absoluto y se le pone el signo del mayor.

Ejemplos:

$$a) 52 + (-29) = +23$$

$$b) 235 + (-425) = -190$$

$$c) -2 + 6 + (-5) + (-4) + 3 = [6 + 3] + [(-2) + (-5) + (-4)] = 9 + (-11) = -2$$

- Para RESTAR números enteros aplicamos la regla de los signos y resolvemos como una suma.

Regla de los signos	$ \begin{cases} ++ = + & -- = + \\ +- = - & -+ = - \end{cases} $
---------------------	---

Ejemplos:

$$48 - (+36) = 48 - 36 = +12$$

$$-24 - (-15) = -24 + 15 = -9$$

$$15 - (-6) = 15 + 6 = +21$$

$$-35 - (+28) = -35 - 28 = -63$$

- Para MULTIPLICAR números enteros se aplica la regla de los signos y se multiplican los números en valor absoluto (sin considerar el signo).

$$\text{Regla de los signos} \begin{cases} ++ = + & -- = + \\ +- = - & -+ = - \end{cases}$$

Ejemplos:

$$+2 \cdot (+54) = +108$$

$$-6 \cdot (-7) = +42$$

$$-2 \cdot (+25) = -50$$

$$+2 \cdot (-34) = -68$$

- Para DIVIDIR números enteros se aplica la regla de los signos y se dividen los números en valor absoluto (sin considerar el signo).

$$\text{Regla de los signos} \begin{cases} ++ = + & -- = + \\ +- = - & -+ = - \end{cases}$$

Ejemplos:

$$52 : (+2) = +26$$

$$(-62) : (-2) = +31$$

$$32 : (-2) = +16$$

$$-39 : 3 = -13$$

- El orden de resolución de OPERACIONES COMBINADAS viene determinado por la prioridad de las operaciones. Es fácil ver que resolvemos las operaciones de mayor peso primero.
 - 1) Se resuelven los PARÉNTESIS o CORCHETES y de ellos los más interiores
 - 2) Se resuelven los PRODUCTOS y DIVISIONES de izquierda a derecha.
 - 3) Se resuelven las SUMAS y RESTAS de izquierda a derecha o en otro orden si nos resulta más cómodo.

Ejemplo:

$$2 \cdot 3 - 4 - 5 \cdot (-2) - 9 + 4 \cdot 2 - 6 + 5 = 6 - 4 + 10 - 9 + 8 - 6 + 5 = 29 - 19 = +10$$

3. NÚMEROS RACIONALES

Si se necesita además dividir, surgen los números racionales (o fraccionarios, o quebrados), que se representa por \mathbb{Q} . Los números racionales son todas las fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ donde los números a y

$$b \text{ son números enteros. } \mathbb{Q} = \left\{ \dots, \frac{-23}{4}, \frac{1}{2}, \frac{12}{5555}, 0, -6, \dots \right\}$$

Al número entero a se le llama NUMERADOR y al número b se le llama DENOMINADOR. Así un número racional es $\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$.

Hay que tener en cuenta que todos los números enteros son racionales pues tienen como denominador al número 1 que no se suele poner. Por ejemplo, $7 = \frac{7}{1}$ $-8 = \frac{-8}{1}$

- Simplificación de fracciones

Las fracciones se pueden reducir o simplificar; y el resultado sería una fracción equivalente. Por ejemplo, $\frac{3}{6}$ se puede simplificar dividiendo por un número que sea divisible por 3 y 6; en este caso, el 3:

$$\frac{3}{6} = \frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2}$$

Normalmente es conveniente simplificar las fracciones, pues nos facilitará los cálculos.

-

- Suma y resta de fracciones

Si las fracciones tienen el mismo denominador, se suman o restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

Ejemplo:

a) $\frac{7}{22} + \frac{5}{22} = \frac{12}{22}$

b) $\frac{-5}{3} - \frac{-7}{3} = \frac{-5+7}{3} = \frac{2}{3}$

Y además simplificamos si podemos, dando por resultado $\frac{6}{11}$

Si las fracciones tienen distinto denominador, se ha de calcular el MCM de los denominadores y realizar unos pequeños cálculos, veamos cómo se hace mediante un ejemplo:

Vamos a realizar $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{5}{3} =$. En primer lugar calculamos el común denominador, que es el MCM de los denominadores: $MCM(4,6,3) = 12$. Este número (12) será el denominador de todas las fracciones

$\frac{3}{12} + \frac{1}{12} - \frac{5}{12} =$. Ahora hemos de calcular los numeradores.

Para ello dividimos el MCM (12) entre cada uno de los denominadores antiguos:

$12:4=3$ $12:6=2$ $12:3=4$ y los multiplicamos por el numerador antiguo correspondiente.

Nos queda: $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{5}{3} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} - \frac{20}{12} =$ Y por último, ya con el mismo denominador, sólo nos queda operar y dejar como una sola fracción, sin olvidarnos de simplificar el resultado si se pudiera.

$$\frac{-9}{12} = \frac{-3}{4}$$

- Producto de fracciones (multiplicación)

En la multiplicación de fracciones sólo hay que multiplicar por una parte el numerador y por otra el

denominador: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ Y no nos olvidemos de simplificar

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{12}{5} \cdot \frac{1}{4} \left(-\frac{5}{2} \right) = \frac{-60}{40} = \frac{-3}{2}$$

- Cociente de fracciones (división)

En la división de fracciones hay que multiplicar en cruz las dos fracciones:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

ó

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{7}} = \frac{35}{6}$$

- Prioridad de operaciones en operaciones combinadas

El orden de resolución de OPERACIONES COMBINADAS viene determinado por la prioridad de las operaciones. Es fácil ver que resolvemos las operaciones de mayor peso primero.

- 1) Se resuelven los PARÉNTESIS o CORCHETES y de ellos los más interiores
- 2) Se realizan las potencias, si las hubiera.
- 3) Se resuelven los PRODUCTOS y DIVISIONES de izquierda a derecha.
- 4) Se resuelven las SUMAS y RESTAS de izquierda a derecha o en otro orden si nos resulta más cómodo.