HOJA DE EJERCICIOS
UNIDAD 11: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

***Ejercicio 1*.-**

Sea la función $f(x) = -2x^3 + a \cdot e^{-x} + b \cdot x - 1$.

a) Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en $x = 0$ y que la gráfica de la función pasa por el punto $(0, 0)$.

b) Para $a = 0$ y $b = 1$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.

***Ejercicio 2*.-**

El porcentaje de personas que sintonizan un programa de radio que se emite entre las 6 y las 12 horas viene dado, según la hora t, mediante la función

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3, \qquad 6 \le t \le 12.$$

a) ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa al comenzar la emisión? ¿Y al cierre?

b) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa a dichas horas?

***Ejercicio 3*.-**

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

a) Estudie la monotonía de f y halle los extremos relativos que posea.

b) Estudie su curvatura y calcule su punto de inflexión.

c) Represente la gráfica de la función f.

***Ejercicio 4*.-**

Represente gráficamente la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$, estudiando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía, extremos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

***Ejercicio 5*.-**

La función de beneficios f, en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida x, en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por $f(x) = -2x^2 + 36x + 138, \quad x \ge 0$.

a) Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo.

b) Calcule $f'(7)$ e interprete el signo del resultado.

c) Dibuje la función de beneficios $f(x)$. ¿Para qué valor o valores de la inversión, x, el beneficio es de 138 mil euros?

***Ejercicio 6*.-**

Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{60}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

a) Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.

b) Para $a = 48$ y $b = 3$, estudie la monotonía de $f(x)$ y calcule sus extremos.

Ejercicio 7.-

Sea la función $f(x) = -x^2 + px + q$.

a) Calcule los valores que deben tener p y q para que la gráfica de la función f pase por el punto $(-4, -5)$ y presente un máximo en el punto de abscisa $x = -1$. Determine el valor de $f(x)$ en ese punto.

b) Represente la gráfica de f para $p = 2$ y $q = -1$ y halle la ecuación de la recta tangente a esta gráfica en el punto de abscisa $x = -2$.

Ejercicio 8.-

Sea la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

a) Determine sus máximos y mínimos relativos.

b) Consideremos la función $g(x) = f'(x)$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)$, en el punto de abscisa $x = 2$.

c) Dibuje la gráfica de $g(x)$ y de la recta tangente calculada en b).

Ejercicio 9.-

Sea $f(x)$ una función cuya función derivada, $f'(x)$, tiene por gráfica una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1, 0)$ y $(5, 0)$ y con vértice $(2, -4)$.

a) Estudie razonadamente la monotonía de $f(x)$.

b) Determine las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$.

c) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$, sabiendo que $f(2) = 5$.

Ejercicio 10.-

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12 & \text{si} \quad x < -3 \\ -x + 3 & \text{si} \quad -3 \le x \le 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en su dominio.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Calcule los extremos relativos.

Ejercicio 11.-

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$.

a) Determine el dominio y estudie la continuidad de la función.

b) Obtenga los extremos de la función.

c) Estudie su curvatura.

Ejercicio 12.-

De la función f se sabe que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$.

a) Estudie la monotonía y la curvatura de f.

b) Sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 1)$, calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

Ejercicio 13.-

Se considera la función dada por $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x+2} & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) Halle las ecuaciones de las asíntotas de esta función.

Ejercicio 14.-

El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ expresada a continuación

$$B(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{8}t^2-t+5 & \text{si} \quad 0\le t\le 6 \\ \dfrac{t+1}{2} & \text{si} \quad 6<t\le 12 \end{cases}$$, t es el tiempo transcurrido en meses.

a) Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses.

b) ¿Cuándo fue mínimo el beneficio? ¿Cuál fue dicho beneficio?

c) Represente gráficamente la función $B(t)$. ¿Cuándo fue máximo el beneficio? ¿A cuánto ascendió?

Ejercicio 15.-

a) Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función

$$f(x)=\frac{4x}{2x+1}$$

b) Halle los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x)=x^3+3x^2+3x$.

Ejercicio 16.-

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+4 & \text{si} \quad x\le 2 \\ 4-\dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

a) Halle el valor de a para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor de a.

b) Para a = 1, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal? Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas.