

EJERCICIOS RESUELTOS DE POLINOMIOS
REPASO 1º BACHILLERATO

1) Dados los polinomios:

$$\begin{array}{ll} P(x) = 4x^2 - 1 & Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\ R(x) = 6x^2 + x + 1 & S(x) = 1/2x^2 + 4 \\ T(x) = 3/2x^2 + 5 & U(x) = x^2 + 2 \end{array}$$

Calcular:

a.- $P(x) + Q(x) =$

$$(4x^2 - 1) + (x^3 - 3x^2 + 6x - 2) = x^3 - 3x^2 + 4x^2 + 6x - 2 - 1 = \mathbf{x^3 + x^2 + 6x - 3}$$

b.- $P(x) - U(x) =$

$$= (4x^2 - 1) - (x^2 + 2) = 4x^2 - 1 - x^2 - 2 = \mathbf{3x^2 - 3}$$

c.- $P(x) + R(x) =$

$$= (4x^2 - 1) + (6x^2 + x + 1) = 4x^2 + 6x^2 + x - 1 + 1 = \mathbf{10x^2 + x}$$

d.- $2P(x) - R(x) =$

$$= 2 \cdot (4x^2 - 1) - (6x^2 + x + 1) = 8x^2 - 2 - 6x^2 - x - 1 = \mathbf{2x^2 - x - 3}$$

e.- $S(x) + T(x) + U(x) =$

$$= (1/2 x^2 + 4) + (3/2 x^2 + 5) + (x^2 + 2) = 1/2 x^2 + 3/2 x^2 + x^2 + 4 + 5 + 2 = \mathbf{3x^2 + 11}$$

f.- $S(x) - T(x) + U(x) =$

$$= (1/2 x^2 + 4) - (3/2 x^2 + 5) + (x^2 + 2) = 1/2 x^2 + 4 - 3/2 x^2 - 5 + x^2 + 2 = \mathbf{1}$$

2) Multiplicar:

a.- $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$

$$= x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 4x + 6 = x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 4x + 6 = \mathbf{x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x + 6}$$

b.- $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2) =$

$$= 6x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x^4 - 20x^3 + 5x^2 - 10x = 6x^5 + 12x^4 - 10x^4 - 3x^3 - 20x^3 + 6x^2 + 5x^2 - 10x = \mathbf{6x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 11x^2 - 10x}$$

c.- $(2x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x - 3) =$

$$= 6x^6 - 10x^5 - 12x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 15x^5 + 25x^4 + 30x^3 - 20x^2 + 15x + 18x^4 - 30x^3 - 36x^2 + 24x - 18 = 6x^6 - 10x^5 - 15x^5 - 12x^4 + 25x^4 + 18x^4 + 8x^3 - 30x^3 + 30x^3 - 6x^2 - 20x^2 - 36x^2 + 15x + 24x - 18 = \mathbf{6x^6 - 25x^5 + 31x^4 + 8x^3 - 62x^2 + 39x - 18}$$

3) Dividir:

a.- $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \\
 -x^4 - 3x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 -5x^3 - 9x^2 + 30x \\
 5x^3 + 15x^2 - 10x \\
 \hline
 6x^2 + 20x - 20 \\
 -6x^2 - 18x + 12 \\
 \hline
 2x - 8
 \end{array}$$

b.- $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 3)$

$$\begin{array}{r}
 x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x \\
 -x^6 + x^5 - 3x^4 \\
 \hline
 x^5 + 2x^4 \\
 -x^5 + x^4 - 3x^3 \\
 \hline
 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 \\
 -3x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\
 \hline
 -6x^2 - 2x \\
 6x^2 - 6x + 18 \\
 -8x + 18
 \end{array}$$

c.- $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8 \quad Q(x) = x^2 - 2x + 1$

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 2x^3 - x \\
 -x^5 + 2x^4 - x^3 \\
 \hline
 2x^4 + x^3 \\
 -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \\
 5x^3 - 2x^2 - x \\
 -5x^3 + 10x^2 - 5x \\
 \hline
 8x^2 - 6x - 8 \\
 -8x^2 + 16x - 8 \\
 \hline
 10x - 16
 \end{array}$$

4) Divide por Ruffini:

a.- $(x^3 + 2x + 70) : (x + 4)$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 0 \quad 2 \quad 70 \\
 -4 \quad -4 \quad 16 \quad -72 \\
 \hline
 1 \quad -4 \quad 18 \quad \boxed{-2}
 \end{array}$$

$C(x) = x^2 - 4x + 18 \quad R(x) = -2$

b.- $(x^5 - 32) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -32 \\
 2 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \\
 \hline
 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad \boxed{0}
 \end{array}$$

$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 \quad R = 0$

c.- $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ \underline{-3} & & 3 & 9 & 18 & 54 \\ 1 & 3 & 6 & 18 & \underline{56} \end{array}$$

$C(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 18 \quad R = 56$

5) Determina los coeficientes de a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.

$$\begin{array}{r} x^3 & + ax^2 & + bx + 5 & | x^2 + x + 1 \\ \underline{-x^3} & - x^2 & - x & \\ (a-1)x^2 + (b-1)x & + 5 & & \\ -(a-1)x^2 - (a-1)x - a + 1 & & & \\ \hline (b-a)x - a + 6 & & & \end{array}$$

$b - a = 0 \quad -a + 6 = 0$

a = 6 b = 6

6)

Dados los monomios $A = -5x^4$, $B = 20x^4$, $C = 2x$, calcula:

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| a) $A + B$ | b) $A - B$ | c) $3A + 2B$ |
| d) A^3 | e) C^2 | f) $A^2 + C^8$ |
| g) $A \cdot B$ | h) $A \cdot C$ | i) $B \cdot C$ |
| j) $B : A$ | k) $A : B$ | l) $B : C$ |

$A = -5x^4 \quad B = 20x^4 \quad C = 2x$

a) $A + B = -5x^4 + 20x^4 = 15x^4$

b) $A - B = -5x^4 - 20x^4 = -25x^4$

c) $3A + 2B = 3 \cdot (-5x^4) + 2 \cdot (20x^4) = -15x^4 + 40x^4 = 25x^4$

d) $A^3 = (-5x^4)^3 = -125x^{12}$

e) $C^2 = (2x)^2 = 4x^2$

f) $A^2 + C^8 = (-5x^4)^2 + (2x)^8 = 25x^8 + 256x^8 = 281x^8$

g) $A \cdot B = (-5x^4) \cdot (20x^4) = -100x^8$

7)

Calcula el cociente y el resto en cada una de estas divisiones:

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$

b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$

$$\begin{array}{r} x^5 + 7x^3 - 5x + 1 & | x^3 + 2x \\ \underline{-x^5 - 2x^3} & x^2 + 5 \\ 5x^3 - 5x & \leftarrow C(x) \\ \underline{-5x^3 - 10x} & \\ -15x + 1 & \leftarrow R(x) \end{array}$$

b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + x & | x^2 - 1 \\ \underline{-x^3} & x - 5 \leftarrow C(x) \\ + x & \\ -5x^2 + 2x & \\ \underline{5x^2 - 5} & \\ 2x - 5 & \leftarrow R(x) \end{array}$$

8) Descomponer factorialmente los siguientes polinomios:

a) $12x^3 - 3x$

b) $2x^4 + 12x^3 + 18x^2$

c) $45x^2 - 120x + 80$

d) $12x^3 + 12x^2 + 3x$

a) $12x^3 - 3x = 3x(4x^2 - 1) = 3x(2x - 1)(2x + 1)$

b) $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2$

c) $45x^2 - 120x + 80 = 5(9x^2 - 24x + 16) = 5(3x - 4)^2$

d) $12x^3 + 12x^2 + 3x = 3x(4x^2 + 4x + 1) = 3x(2x + 1)^2$

9) Descomponer en factores los siguientes polinomios:

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$

b) $x^3 - x - 6$

c) $3x^4 + 15x^2$

d) $x^4 - 16$

a) $x^3 - x^2 + 4x - 4$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ \hline 1 & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow x^2 + 4 \text{ no tiene raíces reales.}$$

$x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x^2 + 4)$

b) $x^3 - x - 6$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -1 & -6 \\ \hline 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio $x^2 + 2x + 3$ no tiene raíces reales, luego:

$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$

c) $3x^4 + 15x^2 = 3x^2(x^2 + 5)$

d) $x^4 - 16 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

10) Descomponer en factores:

a) $x^2 - x - 6$

$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$

b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Posibles ceros: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline 2 & & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$(x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 6) \rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$(x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

Las raíces son: $x = 2, x = -2, x = -3$.