Unidad 4 – Trigonometría I

PÁGINA 87

cuestiones iniciales

1. Un ángulo α, situado en el segundo cuadrante, tiene por coseno $\cos\alpha = -0{,}2$. Determina el resto de las razones trigonométricas de este ángulo.

2. Discute si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados:

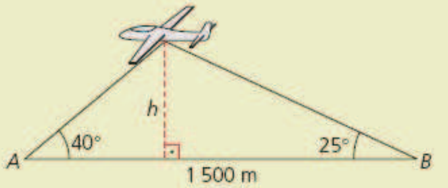
a) El seno de un ángulo vale 1,5.

b) La tangente de un ángulo vale –5 000.

c) El coseno de 720° vale 1.

3. Calcula el área de un pentágono regular de 12 cm de lado.

4. Dos amigos, situados a 1 500 m de distancia, observan en un mismo instante una avioneta, tal como se muestra en la figura. Las visuales que cada uno de ellos dirigen a la avioneta forman, respectivamente, ángulos de 40° y 25° con la horizontal. Calcula la altura a la que se encuentra la avioneta.



SOLUCIONES

1. Sabemos que $\cos\alpha = -0{,}2$ y que $90º < \alpha < 180º$. Utilizando la fórmula $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ hallamos $\text{sen}\,\alpha = 0{,}98$. Por otro lado quedaría:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -4{,}9$$

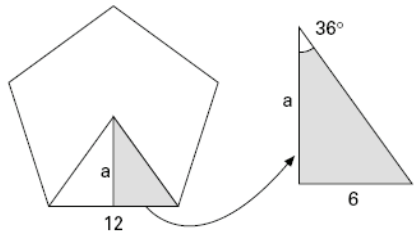
2. La discusión quedaría:

a) Falsa pues $\text{sen}\,\alpha \in [-1, 1]$

b) Verdadera pues $\text{tg}\,\alpha \in (-\infty, +\infty)$

c) Verdadera pues $\cos 720º \cong \cos 360º = 1$.

3. Según el esquema:



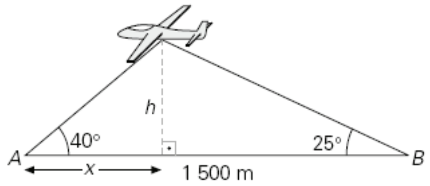
$$360º : 5 = 72º$$

En el triángulo rayado calculemos el valor de la apotema del pentágono.

$$\text{tg}\,36° = \frac{6}{a} \Rightarrow a = 8{,}26 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 8{,}26}{2} \Rightarrow \text{Área} = 247{,}8 \text{ cm}^2$$

4. Según el esquema:



De los dos triángulos rectángulos de la figura obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 40º = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 25º = \dfrac{h}{1500 - x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h = \dfrac{1500 \cdot \text{tg } 40º \cdot \text{tg } 25º}{\text{tg } 40º + \text{tg } 25º} \\ \\ h = 449{,}61 \text{ m} \end{array}$$

PÁGINA 103

ACTIVIDADES

Intenta utilizar las ideas referentes a la fase de llevar adelante la estrategia en la resolución de los siguientes problemas:

1. **El pequeño astuto.** El pequeño astuto tiene más de 36 cajas, pero menos de 1 991. Las dispone todas en una pila triangular y luego las coloca formando una pila cuadrada. ¿Cuántas cajas tiene?

2. **Igualdad.** ¿Será cierta la siguiente igualdad?

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{988\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1\,000}=0{,}999$$

3. **Tostado rápido.** Hay que tostar en un tostador tres rebanadas de pan. En el tostador caben dos rebanadas a la vez, pero sólo se tuestan por un lado. Se tarda 30 segundos en tostar una cara de una rebanada de pan; 5 segundos en colocarla en el tostador; 5 segundos en sacarla; y 3 segundos en darle la vuelta. ¿Cuál es el mínimo de tiempo que se necesita para tostar las tres rebanadas?

SOLUCIONES

1. Hay que buscar un número que sea a la vez triangular y cuadrado.

$$\text{Números triangulares}: 1, 3, 4, 10, 15, 21, \ldots, \frac{n^2+n}{2}$$

$$\text{Números cuadrados}: 1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2$$

$$\Rightarrow \frac{n^2+n}{2}=x^2 \;\Rightarrow\; \text{esto se cumple para } n=8, \text{ pues } \frac{8^2+8}{2}=x^2 \;\Rightarrow\; x^2=36.$$

Como dice que hay más de 36 cajas, hay que buscar otra solución, y ésta es:

$$n=49, \text{ pues } \frac{49^2+49}{2}=35^2=1225 \;\Rightarrow\; \text{Luego } x^2=1225 \text{ cajas tiene.}$$

2. Observamos que:

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} \text{ con } n\geq 2.$$

Luego:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\ldots=\ldots-\ldots$$
$$\frac{1}{998\cdot 999}=\frac{1}{998}-\frac{1}{999}$$
$$\frac{1}{999\cdot 1000}=\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$$

Sumando:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{998\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1000}=0{,}999$$

3. Sean A, B, C, las tres rebanadas. Con A1 indicamos que se tuesta la cara 1 y con A2 indicamos que se tuesta la cara 2.

1.º A_1B_1 tarda: $30s$: tostar cara A_1 y B_1
$5s$: colocar A_1
$5s$: colocar B_1
$5s$: sacar B_1

2.º A_2C_1 tarda: $3s$: dar la vuelta A_1
$5s$: meter C_1
$30s$: tostar cara A_2 y C_1
$3s$: dar la vuelta C_2

3.º B_2C_2 tarda: $5s$: sacar A_2
$5s$: meter B_2
$30s$: tostar cara B_2 y C_2
$5s$: sacar B_2
$5s$: sacar C_2

En total se necesitan: 136 s en tostar las 3 rebanadas.

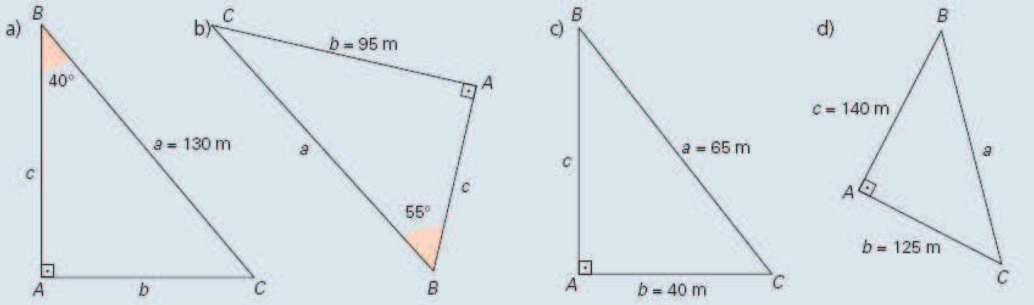
ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla referida a la equivalencia de ángulos en los distintos sistemas de medida:

90°		120°		225°		39° 42′		135° 22′ 42″	
	$\frac{\pi}{4}$ rad		$\frac{3\pi}{2}$ rad		$\frac{4\pi}{3}$ rad		1 rad		2,5 rad

2. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



3. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42°. ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble? ¿y colocándose a distancia triple?

4. Calcula la altura de un poste, sabiendo que desde un cierto punto del suelo se ve este con un ángulo de 30° y, si nos acercamos 30 m, lo vemos con un ángulo de 45°.

5. Calcula los ángulos de un trapecio isósceles de altura 60 m cuyas bases miden 83 y 51 m.

6. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de diámetro.

7. Si las puntas de un compás distan 8 cm y cada rama mide 15 cm, ¿qué ángulo forman?

8. Sabiendo que $\cos \alpha = -\frac{5}{12}$ y que el ángulo está en el segundo cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

9. Sabiendo que $\text{tg } x = \frac{4}{3}$ y que $180° < x < 270°$, calcula las demás razones trigonométricas.

↑ **Los astrolabios se utilizan para determinar ángulos.**

10. Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo A cuya tangente es positiva y $\text{sen } A = -\frac{3}{5}$.

1. La tabla queda:

90º	45º	120º	270º	225º
$\frac{\pi}{2}$rad	$\frac{\pi}{4}$rad	$\frac{2\pi}{3}$rad	$\frac{3\pi}{2}$rad	$\frac{5\pi}{4}$rad
240º	39º 42'	57º 20'	135º 22' 42''	143º 19'
$\frac{4\pi}{3}$rad	$0,22\,\pi$rad	1rad	$0,75\,\pi$rad	2,5rad

2. La resolución de los triángulos queda:

I) $\hat{C} = 50º;\ b = 130 \cdot \text{sen } 40º = 83,56 \text{ m};$
$c = 130 \cdot \cos 40º = 99,59 \text{m}$

II) $\hat{C} = 35º;\ c = \dfrac{95}{\text{tg } 55º} = 66,52 \text{ m};$

$$a = \frac{95}{\text{sen } 55º} = 115,97 \text{ m}$$

III) $\cos \hat{C} = \dfrac{40}{65} \Rightarrow \hat{C} = 52º\, 1';\ \hat{B} = 37º\, 59';$

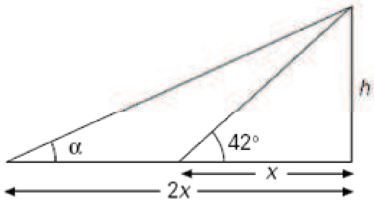
$$c = \sqrt{65^2 - 40^2} = 51,23 \text{ m}$$

IV) $a = \sqrt{140^2 + 125^2} = 187,68 \text{ m};$

$$\text{tg } \hat{C} = \frac{140}{125} \Rightarrow \hat{C} = 48º\, 14'\, 23''$$

$$\hat{B} = 41º\, 45'\, 37''$$

3. Sea la figura:



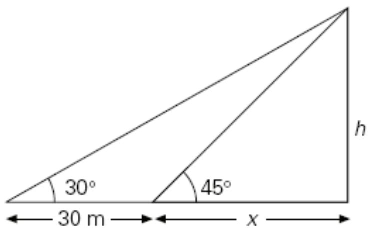
Queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 42^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } \alpha = \dfrac{h}{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ tg } \alpha = \frac{1}{2} \text{tg } 42^{\circ} = 0{,}45; \quad \alpha = 24^{\circ}\, 14'\, 15''$$

Si nos colocamos a distancia triple se verificará:

$$\text{tg } \beta = \frac{h}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \text{tg } 42^{\circ} = 0{,}3 \;\Rightarrow\; \beta = 16^{\circ}\, 42'\, 23''$$

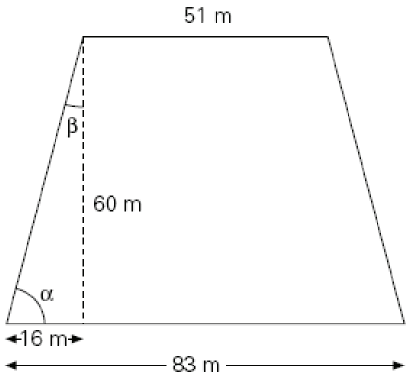
4. Sea la figura:



Queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 45^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30^{\circ} = \dfrac{h}{30 + x} \end{array}\right\} \quad h = \frac{30 \cdot \text{tg } 45^{\circ} \cdot \text{tg } 30^{\circ}}{\text{tg } 45^{\circ} - \text{tg } 30^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad h = 40{,}98 \text{ m}$$

5. Sea la figura:

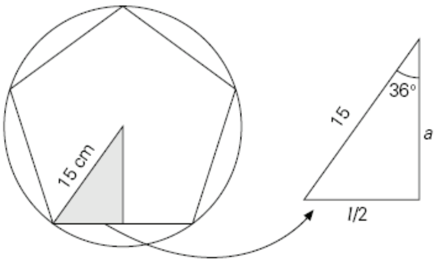


Queda:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{60}{16} \Rightarrow \alpha = 75^\circ\,4'\,7''$$
$$\beta = 90 - \alpha = 14^\circ\,55'\,53''$$

Los ángulos del trapecio miden $75^\circ\,4'\,7''$ los dos agudos y $104^\circ\,55'\,33''$ cada uno de los dos obtusos.

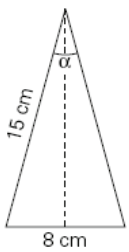
6. Sea la figura:



Llamamos *l* al lado del pentágono. De la figura obtenemos:

$$\text{sen}\,36^\circ = \frac{l/2}{15} \Rightarrow l = 30 \cdot \text{sen}\,36^\circ \Rightarrow l = 17{,}63 \text{ cm}$$
$$\text{Perímetro} = 5 \cdot 17{,}63 = 88{,}15 \text{ cm}$$

7. Sea la figura:



Llamamos α al ángulo que forman las ramas del triángulo rectángulo de la figura. Obtenemos:

$$\text{sen}\,\alpha/2 = \frac{4}{15} \Rightarrow \alpha = 30^\circ\,55'\,55''$$

8. Quedan:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{119}}{12} = 0{,}91; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{119}}{5} = -2{,}18$$

9. Quedan:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{-3}{5} \;\; y \;\; \operatorname{sen} x = \frac{-4}{5}$$

10. Quedan:

$$\text{Si } \operatorname{tg} A > 0 \Rightarrow 0 < A < \frac{\pi}{2} \text{ ó } \pi < A < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Como } \operatorname{sen} A = -\frac{3}{5} \Rightarrow \pi < A < \frac{3\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \cos A = -\frac{4}{5} \text{ y } \operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$$

PÁGINA 107

11. Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}$

b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}$

c) $\dfrac{\cos^2\alpha\cdot(1+\text{tg}^2\alpha)}{\text{cotg}\,\alpha}$

d) $\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha)$

e) $\text{sen}^3\alpha+\text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha$

f) $\cos^3\alpha+\text{sen}^3\alpha+\cos^2\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha$

g) $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1+\cos\alpha}$

h) $\dfrac{\sec\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}$

i) $\text{tg}^2\alpha-\text{tg}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha$

j) $\text{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha$

12. Determina, sin hacer uso de la calculadora, las siguiente razones trigonométricas:

a) sen 120°
b) sen 1 215°
c) cos 210°
d) tg (–60°)
e) tg 300°
f) $\sec\dfrac{23\pi}{6}$
g) cotg 225°
h) $\text{cosec}\,\dfrac{29\pi}{4}$

13. Sabiendo que sen $\alpha = 0{,}6$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) sen $(180° - \alpha)$
b) tg $(90° + \alpha)$
c) cos $(180° + \alpha)$
d) sen $(270° + \alpha)$
e) cos $(90° - \alpha)$
f) cotg $(360° - \alpha)$

14. Demuestra, de forma razonada, si son o no ciertas las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{\text{tg}\,a+\text{tg}\,b}{\text{cotg}\,a+\text{cotg}\,b}=\text{tg}\,a\cdot\text{tg}\,b$

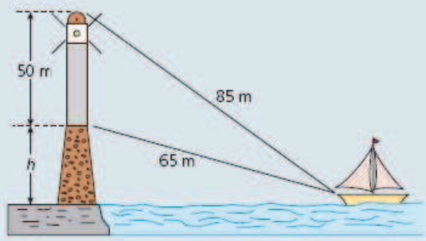
b) $\text{sen}^4x-\text{sen}^2x=\cos^4x-\cos^2x$

c) $\dfrac{1-\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}$

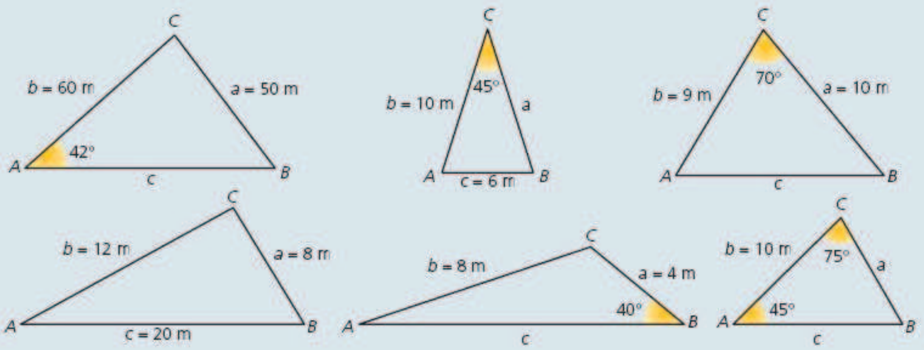
d) $\text{tg}^2x-\text{tg}^2x\cdot\text{sen}^2x=\text{sen}^2x$

15. En la figura aparece dibujado un faro de 50 m de altura situado sobre un promontorio. Las respectivas distancias desde los extremos superior e inferior del faro a un barco son de 85 y 65 m.

Halla la altura del promontorio.



16. Resuelve cada uno de los siguientes triángulos:



11. Las simplificaciones quedan:

a) $\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}=\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha}}=\text{tg}^2\alpha$

b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}=\dfrac{1-\text{sen}^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}=1-\text{sen}\,\alpha$

c) $\dfrac{\cos^2\alpha\cdot(1+\text{tg}^2\alpha)}{\text{cotg}\,\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\text{tg}\,\alpha$

d) $\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha\,(\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha)=1$

e) $\text{sen}^3\alpha+\text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha=\text{sen}\,\alpha$

f) $\cos^3\alpha+\text{sen}^3\alpha+\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha=(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)(\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha)=\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha$

g) $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}=1-\cos\alpha$

h) $\dfrac{\sec\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\cos\alpha$

i) $\text{tg}^2\alpha-\text{tg}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha=\text{tg}^2\alpha\cdot(1-\text{sen}^2\alpha)=\text{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\text{sen}^2\alpha$

j) $\text{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha=(\text{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)\cdot(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)=\text{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha$

12. Queda:

a) $\text{sen}\,120^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen}\,1215^{\circ} = \text{sen}\,135^{\circ} = \text{sen}\,45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos 210^{\circ} = -\cos 30^{\circ} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{tg}\,(-60^{\circ}) = -\text{tg}\,60^{\circ} = -\sqrt{3}$

e) $\text{tg}\,300^{\circ} = -\text{tg}\,60^{\circ} = -\sqrt{3}$

f) $\sec \dfrac{23\pi}{6} = \sec 330^{\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

g) $\text{cotg}\,225^{\circ} = \text{cotg}\,45^{\circ} = 1$

h) $\text{cosec}\,\dfrac{29\pi}{4} = \text{cosec}\,225^{\circ} = -\sqrt{2}$

13. Los cálculos quedan:

a) $\text{sen}\,(180^{\circ} - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = 0,6$

b) $\text{tg}\,(90^{\circ} + \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha = -\dfrac{4}{3}$

c) $\cos (180^{\circ} + \alpha) = -\cos \alpha = -0,8$

d) $\text{sen}\,(270^{\circ} + \alpha) = -\cos \alpha = -0,8$

e) $\cos (90^{\circ} - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = 0,6$

f) $\text{cotg}\,(360^{\circ} - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha = -\dfrac{4}{3}$

14. Se comprueba del siguiente modo:

a) $\dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{\text{cotg } a + \text{cotg } b} = \dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{\dfrac{1}{\text{tg } a} + \dfrac{1}{\text{tg } b}} = \dfrac{(\text{tg } a + \text{tg } b) \cdot \text{tg } a \cdot \text{tg } b}{\text{tg } a + \text{tg } b} = \text{tg } a \cdot \text{tg } b$

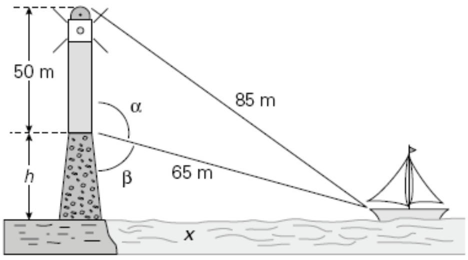
b) $\text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x = \text{sen}^2 x\,(\text{sen}^2 x - 1) = (1 - \cos^2 x)\,(-\cos^2 x) = \cos^4 x - \cos^2 x$

c) $\dfrac{1 - \text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\cos \alpha}{1 + \text{sen } \alpha} \iff 1 - \text{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$

d) $\text{tg}^2 x - \text{tg}^2 x \cdot \text{sen}^2 x = \text{tg}^2 x\,(1 - \text{sen}^2 x) = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = \text{sen}^2 x$

Todas las igualdades son verdaderas.

15. Sea la representación del problema:



Por Pitágoras obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 85^2 = x^2 + (50 + h)^2 \\ 65^2 = h^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \; h = 5 \text{ m}$$

También podemos calcular el ángulo α por el teorema del coseno:

$$85^2 = 50^2 + 65^2 - 2 \cdot 65 \cdot 50 \cdot \cos \alpha \;\Rightarrow\; \alpha = 94^\circ\, 24'\, 42''$$

Por tanto $\beta = 180^\circ - \alpha = 85^\circ\, 35'\, 18'' \;\Rightarrow\; \cos \beta = \dfrac{h}{65} \;\Rightarrow\; h = 65 \cdot \cos \beta = 5 \text{ m}$

16. Los triángulos se resuelven del siguiente modo:

a) $50^2 = 60^2 + c^2 - 2 \cdot 60 \cdot c \cdot \cos 42º \Rightarrow c = 74,39\,\text{m}$ *ó* $c = 14,79\,\text{m}$

• Si $c = 74,39\,\text{m} \Rightarrow \cos C = \dfrac{50^2 + 60^2 - 74,39^2}{2 \cdot 50 \cdot 60} \Rightarrow C = 84º\,35'\,9''$ y $B = 53º\,24'\,51''$

• Si $c = 14,79\,\text{m} \Rightarrow \cos C = \dfrac{50^2 + 60^2 - 14,79^2}{2 \cdot 50 \cdot 60} \Rightarrow C = 11º\,25'\,5''$ y $B = 126º\,34'\,55''$

b) $6^2 = 10^2 + a^2 - 2 \cdot 10 \cdot a \cos 45º \Rightarrow a$ no es un número real. Este triángulo no tiene solución.

c) $c^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 70º \Rightarrow c = 10,93\,\text{m}$
$10^2 = 9^2 + 10,93^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10,93 \cdot \cos A \Rightarrow A = 59º\,17'\,35''$ y $B = 50º\,42'\,25''$

d) $\cos A = \dfrac{12^2 + 20^2 - 8^2}{2 \cdot 12 \cdot 20} \Rightarrow A = 0º$

Imposible. Además un lado es igual a la suma de los otros dos, por tanto no existe este triángulo.

e) $8^2 = 4^2 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 40º \Rightarrow c = 10,64\,\text{m}$
$\cos A = \dfrac{8^2 + 10,64^2 - 4^2}{2 \cdot 8 \cdot 10,64} \Rightarrow A = 18º\,44'\,44''$ y $C = 121º\,15'\,16''$

f) $B = 60º$.

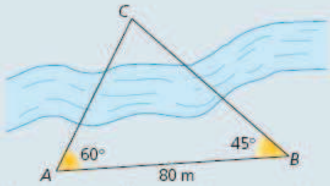
Utilizando el teorema del seno obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen } 45º} = \frac{10}{\text{sen } 60º} \Rightarrow a = 8,16\,\text{m}$$
$$\frac{c}{\text{sen } 75º} = \frac{10}{\text{sen } 60º} \Rightarrow c = 11,15\,\text{m}$$

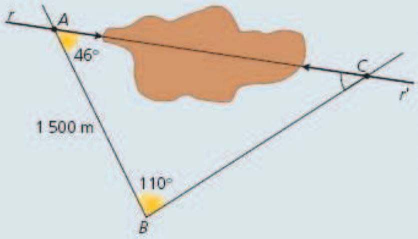
PÁGINA 108

ACTIVIDADES FINALES

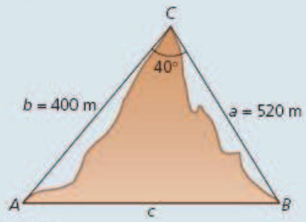
17. Desde dos puntos *A* y *B* situados en la misma orilla de un río y distantes entre sí 80 m, se observa un punto *C*, situado en la orilla opuesta, bajo ángulos de 60° y 45°, respectivamente.
Calcula las distancias desde los puntos *A* y *B* hasta el punto *C*.



18. La figura muestra la forma de construir un túnel que atraviesa una montaña, perforando simultáneamente por ambas caras de la montaña. Fijamos la dirección de perforación ofrecida por *r*, por lo que el problema consiste en encontrar la dirección de perforación dada por *r'*. En la práctica, se procede de la forma siguiente: fijamos un punto *A* en la recta *r*. Elegimos un ángulo *A*, por ejemplo 46°, y medimos una distancia *AB* de 1 500 m, por ejemplo. En *B* tomamos un ángulo, por ejemplo, de 110°. Con estos datos podemos determinar el ángulo *C* y la distancia *BC*. A partir de ambos datos queda determinada la dirección *r'* de perforación. Calcula estos datos.



19. La figura muestra el corte transversal de una montaña en la que se quiere construir un túnel. La cima o punto *C*, visible desde *A* y *B*, se encuentra a 400 m de A y 520 m de *B*, y el ángulo *C* mide 40°.
Calcula la longitud del túnel *AB*.



20. Halla el área de un decágono regular circunscrito a una circunferencia de 10 cm de radio.

21. En un trapecio isósceles conocemos la diagonal, que mide 15 cm; el lado oblicuo, que mide 5 cm; y el ángulo que este forma con la base mayor, que es de 60°. Halla el área del trapecio.

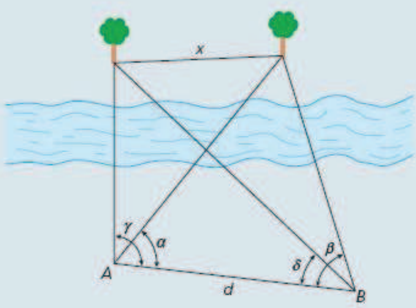
22. Las diagonales de un paralelogramo miden 20 y 16 cm, respectivamente, y uno de los ángulos que forman al cortarse mide 120°. Halla el área y el perímetro del mismo.

23. Dos barcos salen de un puerto, y desde un mismo punto, según dos rectas que forman entre sí un ángulo de 60°. Calcula la distancia que los separará al cabo de dos horas de navegación suponiendo que mantienen velocidades constantes de 50 y 65 km/h, respectivamente.

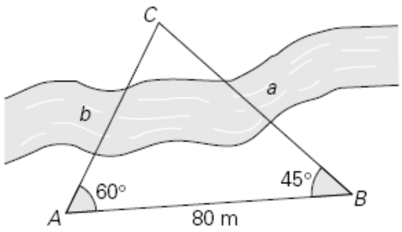
24. Calcula los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un dodecágono de 6 dm de lado.

25. El ángulo en el vértice de un cono de revolución mide 60° y la generatriz 12 m. Halla el volumen del cono.

26. En la vida real se presentan muchas situaciones en las que se necesita conocer la distancia entre dos puntos inaccesibles. Este problema fue resuelto ya en el año 1615 por el sabio holandés Snelius. En la figura tenemos dos árboles a los que no podemos acceder, porque nos lo impide el río. Desde dos puntos *A* y *B* medimos los ángulos α, β, γ y δ, y la distancia d entre ambos puntos. Calcula la distancia *x* sabiendo que $\alpha = 50°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 110°$, $\delta = 40°$ y $d = 120$ m.



17. Un esquema del problema sería:

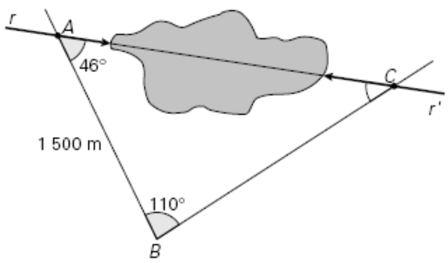


El ángulo $\widehat{C} = 75^{o}$. Utilizando el teorema del seno obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen } 60^{o}} = \frac{80}{\text{sen } 75^{o}} \Rightarrow a = 71{,}73 \text{ m}$$
$$\frac{b}{\text{sen } 45^{o}} = \frac{80}{\text{sen } 75^{o}} \Rightarrow b = 58{,}56 \text{ m}$$

Las distancias pedidas son 71,13 m y 58,56 m.

18. Un esquema del problema es el siguiente:

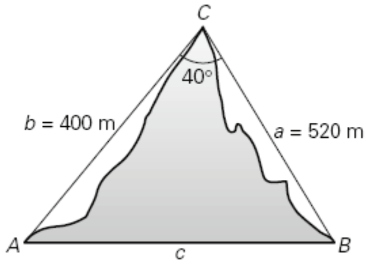


El ángulo $\widehat{C} = 24^{o}$.

Determinamos la distancia BC (lado *a*) mediante el teorema del seno:

$$\frac{1500}{\text{sen } 24^{o}} = \frac{BC}{\text{sen } 46^{o}} \Rightarrow BC = 2\,652{,}85 \text{ m}$$

19. La figura queda:

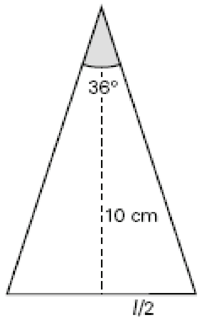


Mediante el teorema del coseno:

$$c^2 = 400^2 + 520^2 - 2 \cdot 400 \cdot 520 \cdot \cos 40º \Rightarrow c = 334,25 \text{ m} = AB$$

20. Como el decágono está circunscrito a la circunferencia, el radio de ésta es la apotema del polígono. El ángulo central del polígono es 36º.

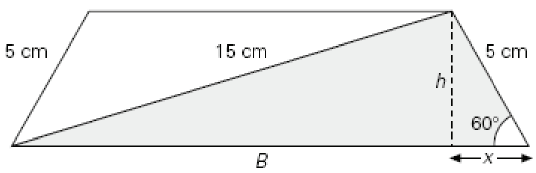
Obtenemos el lado del triángulo de la figura:



El cálculo queda:

$$\text{tg}\, 18º = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 6,5 \text{ cm} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Área} = \frac{10 \cdot 6,5 \cdot 10}{2} = 325 \text{ cm}^2$$

21. la figura es:



En el triángulo rayado aplicamos el teorema del coseno y obtenemos la base mayor B.

$$15^2 = B^2 + 5^2 - 2 \cdot B \cdot 5 \cdot \cos 60º \Rightarrow B = 16,86 \text{ cm}$$

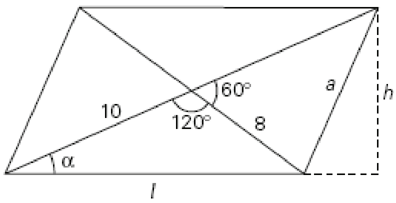
La altura h del triángulo mide: $h = 5 \cdot \text{sen}\, 60º = 4,33 \text{ cm}$

La base menor mide: $B - 2 \cdot x = B - 2 \cdot 5 \cdot \cos 60º = 11,86 \text{ cm}$

El área total queda:

$$\text{Área} = \frac{B + b}{2} h = \frac{16,86 + 11,86}{2} 4,33 = 62,18 \text{ cm}^2$$

22. La figura queda:



Los cálculos son:

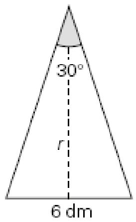
$$l^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 120º \Rightarrow l = 15,62 \text{ cm}$$
$$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60º \Rightarrow a = 9,17 \text{ cm}$$
$$\text{Perímetro} = 2 \cdot 15,62 + 2 \cdot 9,17 = 49,58 \text{ cm}$$

$$a^2 = 20^2 + l^2 - 2 \cdot 20 \cdot l \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9,17^2 = 20^2 + 15,62^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15,62 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 26º\ 20'\ 50''$$
$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{20} \Rightarrow \text{sen } 26º\ 20'\ 50'' = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 8,88 \text{ cm}$$
$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = \text{l} \cdot \text{h} = 15,62 \cdot 8,88 \Rightarrow \text{Área} = 138,71 \text{cm}^2$$

23. La distancia *d* que los separa viene dada por:

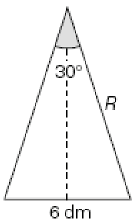
$$d^2 = 100^2 + 130^2 - 2 \cdot 100 \cdot 130 \cdot \cos 60º \Rightarrow d = 117,9\ k\text{m}$$

24. Las soluciones en cada uno de los casos:



El radio de la circunferencia inscrita es la apotema del dodecágono, por tanto:

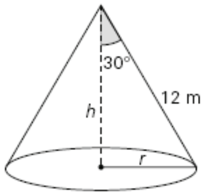
$$\text{tg } 15º = \frac{3}{r} \Rightarrow r = 11,20 \text{ dm}$$



El radio de la circunferencia circunscrita lo calculamos en el triángulo:

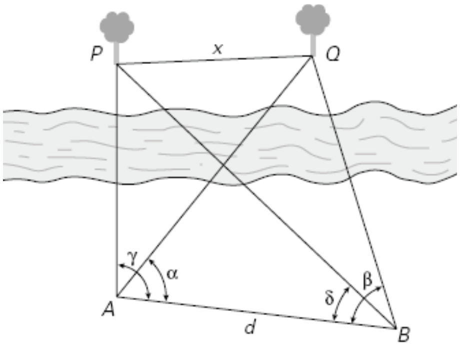
$$\text{sen } 15º = \frac{3}{R} \Rightarrow R = 11,59 \text{ dm}$$

25. La solución queda:



$$\left.\begin{aligned} r &= 12 \cdot \text{sen } 30º = 6 \text{ m} \\ h &= 12 \cdot \cos 30º = 10{,}39 \text{ m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 10{,}39}{3} = 391{,}7 \text{ m}^3$$

26. Según la figura:



Los cálculos quedan:

Sean P y Q los árboles.

En el triángulo ABP hallamos PB:

$$\frac{PB}{\text{sen } 110º} = \frac{120}{\text{sen } 30º} \Rightarrow PB = 225{,}53 \text{ m}$$

En el triángulo ABQ hallamos BQ:

$$\frac{BQ}{\text{sen } 50º} = \frac{120}{\text{sen } 55º} \Rightarrow BQ = 112{,}22 \text{ m}$$

En el triángulo PBQ hallamos x:

$$x^2 = PB^2 + BQ^2 - 2 \cdot PB \cdot BQ \cdot \cos 35º \Rightarrow x = 148{,}30 \text{ m}$$