Tema 3
Potencias
y
notación científica

ESQUEMA DE LA UNIDAD

0. Potencias de exponente natural. Propiedades.

1. Potencias de exponente negativo

2. Notación científica

3. Operaciones en notación científica

   Suma y Resta

   Multiplicación División

4. Radicales de índice *n*

5. Operaciones con radicales. Propiedades

Potencias de exponente natural

Una potencia es una forma abreviada de escribir un producto de varios factores iguales.

EXPONENTE

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

BASE

Ejemplo: La potencia de base 3 y exponente 5 es:

EXPONENTE

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

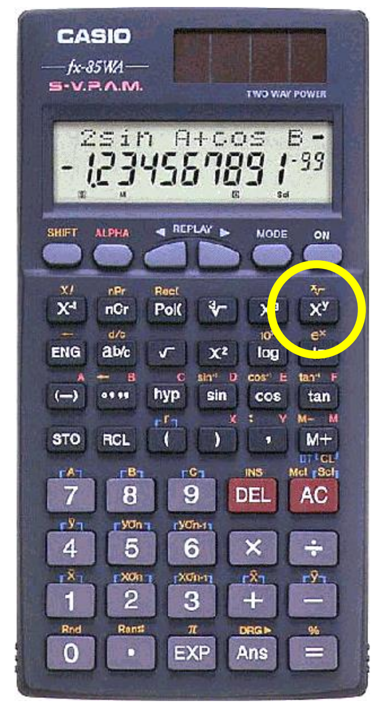
BASE

Cálculo de potencias con la calculadora

Para calcular potencias con la calculadora utilizamos la tecla x^y o x^y

Por ejemplo, para calcular **$(1,4)^3$** tecleamos: 1 , 4 x^y 3 =

y obtenemos como resultado en pantalla 2,744.



Propiedades de las potencias de exponente natural

Producto de potencias de la misma base

Si multiplicamos dos potencias de la misma base, el resultado es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad 3^2 \cdot 3^4 = 3^6$$

Cociente de potencias de la misma base

Si dividimos dos potencias de la misma base, el resultado es otra potencia de la misma base cuyo exponente es igual a la diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ con } n > m$$

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3^3$$

Potencia de una potencia

Si elevamos una potencia a un nuevo exponente, el resultado es otra potencia con la misma base cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad \left(2^3\right)^2 = 2^6$$

Potencia de un producto

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Potencia de un cociente

$$(a : b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

1. Potencias de exponente negativo

Vamos a dar significado a la expresión a^{-n}, que es una potencia en la que el exponente es un número negativo. También a la expresión a^{0}, en la que el exponente es 0. Para ello, utilizamos la propiedad del cociente de potencias de la misma base.

Aplicando la definición de potencia y simplificando	Aplicando la propiedad del cociente de potencias de igual base	Si los dos resultados han de ser iguales debe ser:
$\frac{3^5}{3^4}=\frac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3}=3$	$\frac{3^5}{3^4}=3^{5-4}=3^1$	$3^1=3$
$\frac{3^4}{3^4}=\frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3}=1$	$\frac{3^4}{3^4}=3^{4-4}=3^0$	$3^0=1$
$\frac{3^3}{3^5}=\frac{3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}=\frac{1}{3^2}$	$\frac{3^3}{3^5}=3^{3-5}=3^{-2}$	$3^{-2}=\frac{1}{3^2}$

Los ejemplos anteriores nos permite darnos cuenta de que es necesario definir las potencias de exponente negativo (que ya no consisten en multiplicar un número por sí mismo) de manera que además sigan cumpliendo las propiedades que ya conocemos.

Las potencias de exponente entero se definen así:

- $a^n = a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a$, para n natural y mayor que 1.
- $a^1 = 1$
- $a^0 = a$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ para n natural y $n > 0$

Potencias de exponente negativo con la calculadora

Cálculo de $(3{,}4)^{-2}$ con la calculadora

3 [,] 4 [x^y] 2 [±] [=]

En la pantalla aparece [0,08650519]

PONTE A PRUEBA

Halla con tu calculadora las siguientes potencias:

a) $(5{,}2)^0$

b) $(2{,}5)^{-4}$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

e) 3^{-3}

f) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$

Página 43 del libro

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Expresa el resultado de la operación como una sola potencia.

a) $(4^{-3} \cdot 4^2)^3$
b) $(5^3 : 5^{-2})^{-2}$
c) $(7^{-4})^{-2}$
d) $((4{,}2)^4 \cdot (4{,}2^{-3}))^{-1}$
e) $(7^{-3} : 7^{-5})^{-2}$
f) $(9^3)^{-3}$

2. Expresa como una potencia de base 3 las siguientes expresiones.

a) $(9^2 : 9^3)^{-2}$
b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$
c) $(9^2)^3$
d) $(27^2 \cdot 9^4)^2$
e) $(9^{-2})^{-4}$
f) $(27^{-2})^{-3}$

3. Expresa como una sola potencia de la base que consideres conveniente en cada caso.

a) $(8^2 : 4^3)^2$
b) $(9^2 \cdot 3^5)^2$
c) $(16^3 : 8^3)^4$
d) $(27^2 : 9^{-2})^3$

2. Notación científica

Existen numerosos contextos donde aparecen números muy grandes o muy pequeños. Las masas de los astros, las distancias interestelares… son cantidades muy grandes; el peso de los átomos, el diámetro de un glóbulo rojo… son cantidades muy pequeñas.

Para trabajar con ellos utilizamos la **notación científica**. En ella tienen gran importancia las potencias de 10.

El diámetro medio de un átomo es 0,000 000 000 3 m

El diámetro del Sol es 1 392 000 000 m

El diámetro del Sol es $1{,}392 \cdot 10^9$ m

El diámetro medio de un átomo es $3 \cdot 10^{-10}$ m

Potencias de 10

$10^0 = 1$

$10^1 = 1 \times 10 = 10$

$10^2 = 1 \times 10 \times 10 = 100$

$10^3 = 1 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 0{,}1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$$

Prefijo	Símbolo	Decimal Equivalente	Potencia de 10
tera-	T	1 000 000 000 000	10^{12}
giga-	G	1 000 000 000	10^{9}
mega-	M	1 000 000	10^{6}
kilo-	K	1 000	10^{3}
hecto-	h	100	10^{2}
deca-	da	10	10^{1}
		1	10^{0}
deci-	d	0,1	10^{-1}
centi-	c	0,01	10^{-2}
milli-	m	0,001	10^{-3}
micro-	µ	0,000 001	10^{-6}
nano-	n	0,000 000 001	10^{-9}
pico-	p	0,000 000 000 001	10^{-12}

La expresión de un número en notación científica consiste en representarlo como un número entero o un decimal con una sola cifra entera (en ambos casos del 1 al 9) multiplicado por una potencia de 10 (positiva o negativa).

$$\boxed{N \times 10^{n}}$$

N es un número entre 1 y 10

n es un número entero positivo o negativo

El número de átomos en 12 g de carbono:

602 200 000 000 000 000 000 000 $\quad 6{,}022 \cdot 10^{23}$

La masa de un átomo de carbono en gramos:

0,0000000000000000000000199 $\quad 1{,}99 \cdot 10^{-23}$

Un número en notación científica $N = a,bcd... \cdot 10^n$ consta de:

- Una parte entera formada por una sólo cifra: a
- Una parte decimal: bcd ...
- Una potencia de base 10 con exponente entero: 10^n

En esta notación el exponente n indica el orden de la magnitud.

Dado un número en notación científica, llamamos **orden de magnitud** al exponente de la potencia de 10. Nos da una idea clara de cómo es el número con el que estamos tratando. Por ejemplo, si es 6, estamos hablando de millones; si es 12, de billones; si es –3, de milésimas, etc.

20 300 tiene cinco dígitos enteros; tendremos que desplazar la coma hacia la izquierda 4 lugares, es decir, $20\,300 = 2,03 \cdot 10^4$.

0,000056 tiene como primer dígito no nulo 5. Habrá que desplazar la coma hacia la derecha 5 lugares; $0,000056 = 5,6 \cdot 10^5$.

Expresar un número en notación científica

Nº en notación decimal

Nº en notación científica

$$3\,190\,000 = 3{,}19 \cdot 10^{6}$$

6 5 4 3 2 1

$$0{,}0\,0\,0\,0\,2\,2\,0\,5 = 2{,}205 \cdot 10^{-5}$$

1 2 3 4 5

Expresar un número dado en notación científica en notación decimal

$1{,}234 \cdot 10^{-6}$

Puesto que el exponente es –6, hacer el número más pequeño moviendo la coma decimal 6 lugares a la izquierda.
Si faltan dígitos, añade ceros.

000 001,234

0,000 001 234

Por tanto,
$1{,}234 \cdot 10^{-6} = 0{,}000\,001\,234$

$3{,}04 \cdot 10^{5}$

Puesto que el exponente es 5, hacer el número más grande moviendo la coma decimal 5 lugares a la derecha.
Si faltan dígitos, añade ceros.

3,04 000

304 000

Por tanto,
$3{,}04 \cdot 10^{5} = 304\,000$

Números en notación científica en la calculadora

Se utilizan las teclas **EXP** y **±**

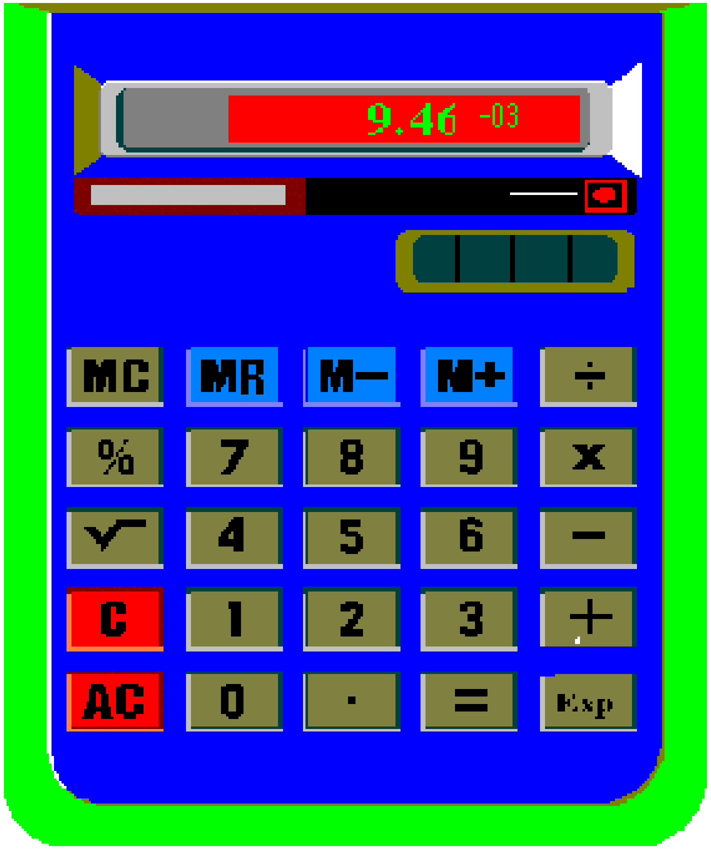
Para introducir el número $7{,}3 \cdot 10^9$ tecleamos

7 , 3 EXP 9

Para introducir $8{,}64 \cdot 10^{-3}$ teclearemos

8 , 64 EXP 3 ±

Si al trabajar con calculadora realizamos operaciones con resultados muy grandes o muy pequeños, es ella la que los expresa en notación científica automáticamente.



Las calculadoras muestran números en notación científica. Así el número que muestra la calculadora es:

$$9{,}46 \cdot 10^{-3} = \frac{9{,}43}{1000} = 0{,}00943$$

Página 44 del libro

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Expresa en notación científica.

a) 25.300
b) 0,000000089
c) 4.376,5
d) 9.800.000.000.000
e) 1.254,96
f) 96.300.000

2. Escribe con todas sus cifras los siguientes números escritos en notación científica.

a) $2{,}51 \cdot 10^{6}$
b) $9{,}32 \cdot 10^{-8}$
c) $1{,}01 \cdot 10^{-3}$
d) $1{,}15 \cdot 10^{4}$
e) $3{,}76 \cdot 10^{12}$
f) $9{,}3 \cdot 10^{5}$

3. Operaciones con números en notación científica

Realizar cálculos con números escritos en notación científica es muy fácil: basta con operar, por un lado, con los números que aparecen antes de la potencia de 10 y, por otro, con las potencias.

Suma y resta en notación científica

Consideremos la suma $2{,}35 \cdot 10^7 + 1{,}264 \cdot 10^7$. Como el exponente de ambos números es el mismo, basta con sacar factor común 10^7:

$$2{,}35 \cdot 10^7 + 1{,}264 \cdot 10^7 = (2{,}35 + 1{,}264) \cdot 10^7 = 3{,}614 \cdot 10^7$$

Cuando el exponente de ambos es diferente, se reducen a exponente común (el mayor de ellos) multiplicando el menor por la potencia de 10 adecuada.

Ejemplo: Calcula la suma

$$4{,}31 \cdot 10^{4} + 3{,}9 \cdot 10^{3} =$$

Escribe los dos números con el mismo exponente (el mayor).

$$3{,}9 \cdot 10^{3} = 0{,}39 \cdot 10^{4}$$

$$= 4{,}31 \cdot 10^{4} + 0{,}39 \cdot 10^{4} =$$

$$= (4{,}31 + 0{,}39) \cdot 10^{4} = 4{,}70 \cdot 10^{4}$$

Ejemplo:

$$(1{,}2 \cdot 10^{3}) + (3{,}4 \cdot 10^{5})$$

Escribe $1{,}2 \cdot 10^{3}$ con exponente 5.

Suma 2

$$1{,}2 \cdot 10^{3} = 0{,}012 \cdot 10^{3+2=5}$$

Desplaza 2←

$$(0{,}012 \cdot 10^{5}) + (3{,}4 \cdot 10^{5}) =$$

$$(0{,}012 + 3{,}4) \cdot 10^{5}$$

$$= 3{,}412 \cdot 10^{5}$$

Para realizar restas se sigue el mismo proceso: se reducen al exponente mayor y se resta la parte entera o decimal de ambos números.

Ejemplo: $(3,4 \cdot 10^5) - (1,2 \cdot 10^4)$

Suma 1

$1,2 \cdot 10^4 = 0,12 \cdot 10^{4+1=5}$

Desplaza 1←

$(3,4 \cdot 10^5) - (0,12 \cdot 10^5) =$

$(3,4 - 0,12) \cdot 10^5$

$= 3,28 \cdot 10^5$

Ejemplo:

$(1,2 \cdot 10^{-6}) + (3,2 \cdot 10^{-7}) = (1,2 \cdot 10^{-6}) + (0,32 \cdot 10^{-6}) = (1,2 + 0,32) \cdot 10^{-6}$

$= 1,52 \cdot 10^{-6}$

$3,2 \cdot 10^{-7} = 0,32 \cdot 10^{-7+1=-6}$

Desplaza 1← Suma 1

Ejemplo:

$(5,6 \cdot 10^{-6}) - (3,4 \cdot 10^{-9}) = (5,6 \cdot 10^{-6}) - (0,0034 \cdot 10^{-6}) = (5,6 - 0,0034) \cdot 10^{-6}$

$= 5,5966 \cdot 10^{-6}$

$3,4 \cdot 10^{-9} = 0,0034 \cdot 10^{-9+3=-6}$

Desplaza 3← Suma 3

Página 45 del libro

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Realiza las siguientes operaciones en notación científica.

a) $37,3 \cdot 10^{-2} + 0,01 \cdot 10^{2}$

b) $11.000.000.000 - 6,5 \cdot 10^{15}$

c) $0,00000009 + 1,5 \cdot 10^{-6}$

d) $13.200 \cdot 10^{3} - 5,4 \cdot 10^{5}$

2. Calcula el término que falta en cada caso.

a) $2,5 \cdot 10^{6} - \boxed{} = 8,4 \cdot 10^{5}$

b) $9,32 \cdot 10^{-3} + \boxed{} = 5,6 \cdot 10^{-2}$

c) $1,15 \cdot 10^{4} + \boxed{} = 3 \cdot 10^{5}$

d) $3,6 \cdot 10^{12} - \boxed{} = 2 \cdot 10^{12}$

3. Realiza la suma $7,8 \cdot 10^{99} + 5 \cdot 10^{99}$.

a) Intenta realizarla con la calculadora. ¿Qué ocurre?

b) ¿Por qué crees que pasa eso?

Multiplicación y división en notación científica

Para multiplicar números en notación científica, *multiplica los primeros factores decimales* y *suma los exponentes*.

Ejemplo: Multiplica $(3{,}2 \cdot 10^{-7}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{5})$

$(3{,}2 \cdot 2{,}1) \cdot 10^{-7+5} =$ **$6{,}72 \cdot 10^{-2}$**

Ejercicio: Multiplica $(9 \cdot 10^{7}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{4})$ **$1{,}35 \cdot 10^{12}$**

Para dividir números en notación científica, *divide el primer factor decimal del numerador por el primer factor decimal del denominador. Entonces resta el exponente del denominador al exponente del numerador.*

Ejemplo: Divide $(6{,}4 \cdot 10^{6}) : (1{,}7 \cdot 10^{2})$

$(6{,}4 : 1{,}7) \cdot 10^{6-2} =$ **$3{,}76 \cdot 10^{4}$**

Ejercicio: Divide $(2{,}4 \cdot 10^{-7}) : (3{,}1 \cdot 10^{14})$ **$7{,}74 \cdot 10^{-22}$**

Operaciones en notación científica con la calculadora

Vamos a calcular la suma $\mathbf{9{,}56 \cdot 10^{13} + 1{,}67 \cdot 10^{16}}$.

Con la calculadora la suma se realiza de forma muy rápida y sencilla, no hace falta reducir al exponente mayor (lo hace ella sola).

Tecleamos: 9 [,] 56 [Exp] 13 [+] 1 [,] 67 [Exp] 16 [=]

y en pantalla obtenemos el resultado: 1.67956 16

Recuerda que esto significa
$\mathbf{1{,}67956 \cdot 10^{16}}$

Para multiplicar o dividir en la calculadora basta con teclear los factores (incluso sin expresarlos en notación científica):

Así, para hacer la multiplicación $\mathbf{318 \cdot (5{,}927 \cdot 10^{24})}$, tecleamos:

318 [x] 5 [,] 927 [Exp] 24 [=]

En pantalla obtenemos: 1.884786 27

Página 46 del libro

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Realiza las siguientes operaciones en notación científica.

a) $(37,3 \cdot 10^{-2}) \cdot (0,01 \cdot 10^{2})$

b) $13.650.000.000 : (6,5 \cdot 10^{15})$

c) $0,00000009 \cdot (1,5 \cdot 10^{-6})$

d) $(14.310 \cdot 10^{3}) : (5,4 \cdot 10^{5})$

2. Calcula el término que falta en cada caso.

a) $(2,5 \cdot 10^{6}) \cdot \boxed{} = 8,4 \cdot 10^{5}$

b) $(9,52 \cdot 10^{-3}) : \boxed{} = 5,6 \cdot 10^{-2}$

c) $(1,15 \cdot 10^{4}) \cdot \boxed{} = 2,53 \cdot 10^{5}$

d) $(3,6 \cdot 10^{12}) : \boxed{} = 2 \cdot 10^{12}$

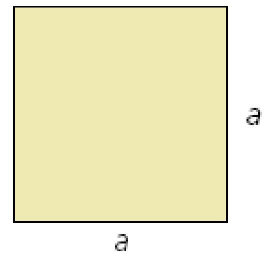
3. Realiza el producto $(7,8 \cdot 10^{99}) \cdot (5 \cdot 10^{99})$. Intenta realizarlo con la calculadora. ¿Qué ocurre? ¿Por qué crees que pasa eso?

4. Radicales

La elevación a potencias tiene una operación inversa: la radicación. En ella se conoce la potencia y el exponente y tenemos que encontrar la base.

¿Cuál es el lado de un cuadrado de área 25 cm²?

Cuadrado de área 25 cm²



$a^2 = 25 \rightarrow a = \sqrt{25} = \pm 5$

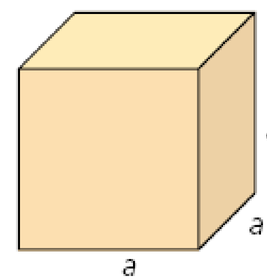
Su lado *a* mide 5 cm.

Sabemos que el área del cuadrado es $a^2 = 25$. Debemos encontrar un número que elevado al cuadrado nos dé 25.

A ese número se le llama la **raíz cuadrada** de 25 y se escribe $\sqrt{25}$. Comprueba que 5 y –5 son raíces cuadradas de 25. En este caso sólo consideramos el valor 5, ya que un lado negativo carece de sentido.

¿Cuál es la longitud de la arista del cubo de volumen 27 cm³?

Cubo de volumen 27 cm³



$a^3 = 27 \rightarrow a = \sqrt[3]{27} = 3$

Su arista *a* mide 3 cm.

En este caso tenemos que encontrar un número que elevado al cubo nos dé 27. Ese número es la **raíz cúbica** de 27 y se escribe $\sqrt[3]{27}$. En este caso su valor es 3, $3^3 = 27$.

En general llamamos *raíz n-ésima* de un número dado al número que elevado a *n* nos da el primero.

Se escribe $\sqrt[n]{a}$

Índice

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$

radical radicando

Arriba hemos visto ejemplos de radicales de índice 2 (cuadráticos) y de índice 3 (cúbicos). Observa que, en el caso de los cuadráticos, el índice no se escribe.

Página 47 del libro

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Señala el radicando e índice de cada radical.

a) $\sqrt[9]{3}$ c) $\sqrt[7]{11}$ e) $\sqrt[13]{-2}$

b) $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt{7}$ f) $\sqrt[8]{\dfrac{3}{4}}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = -16$ d) $x^2 = 100$

b) $x^3 = -1$ e) $x^3 = 8$

c) $x^2 = 25$ f) $x^3 = -27$

3. Ten en cuenta los resultados del ejercicio anterior y contesta a las siguientes preguntas:

a) La ecuación $x^2 = a$, ¿en qué casos tiene solución?

b) Si tiene solución, ¿cuántas tiene?

c) La ecuación $x^3 = a$, ¿en qué casos tiene solución?

d) Si tiene solución, ¿cuántas tiene?

5. Operaciones con radicales. Propiedades

A la hora de operar con radicales es interesante que sepas cómo hallar sus valores utilizando la calculadora científica.

Teclas para el cálculo de radicales

x^y	Eleva el número *x* a la potencia *y*
1/x	Calcula el inverso del número *x*
$a^{b/c}$	Permite escribir fracciones

Por ejemplo, para hallar $\sqrt[5]{7}$ tecleamos:

7 x^y 5 1/x = o bien 7 x^y 1 $a^{b/c}$ 5 =

en ambos casos obtenemos 1.475773162

Hallar el radical de índice *n* de un número equivale en la calculadora científica a elevar dicho número a *1/n*. Después veremos el significado de las potencias de exponente fraccionario.

Propiedades de los radicales

Propiedad	Ejemplo	Enunciado
1. Producto de radicales $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[7]{12} \cdot \sqrt[7]{4} = \sqrt[7]{12 \cdot 4} = \sqrt[7]{48}$	Para multiplicar radicales del mismo índice se deja el mismo índice y se multiplican los radicandos.
2. Cociente de radicales $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$	$\sqrt[7]{12} : \sqrt[7]{4} = \sqrt[7]{12 : 4} = \sqrt[7]{3}$	Para dividir radicales del mismo índice se deja el mismo índice y se dividen los radicandos.
3. Potencia de un radical $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\left(\sqrt[5]{6}\right)^{11} = \sqrt[5]{6^{11}}$	Para elevar un radical a una potencia se eleva el radicando a dicha potencia.
4. Raíz de una raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{9}} = \sqrt[3\cdot 5]{9} = \sqrt[15]{9}$	Para hallar el radical de otro radical se multiplican los índices de ambos.

La primera propiedad tiene una aplicación muy importante a la hora de introducir (o sacar) factores de un radical. Observa unos ejemplos:

$$5\cdot\sqrt{3} = \sqrt{5^2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{5^2\cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3\cdot 5} = \sqrt[3]{40}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{5^2\cdot 2^3} = \sqrt{5^2}\cdot\sqrt{2^3} = 5\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

Racionalizaciones

- En los cálculos manuales, conviene evitar denominadores con raíces.
- El proceso de obtener como denominador un número racional se llama racionalización.
- Este proceso puede ser necesario para simplificar.

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$$

Página 48 del libro

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Expresa como un radical.

a) $\sqrt[7]{5} \cdot \sqrt[7]{9}$

b) $\sqrt[10]{(-2)^4} : \sqrt[10]{(-2)^2}$

c) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^5$

d) $\sqrt{\sqrt[8]{16}}$

2. Introduce factores dentro del radical.

a) $5\sqrt[3]{7}$ b) $8\sqrt[4]{12}$ c) $6\sqrt[10]{2}$ d) $15\sqrt{3}$

3. Descompón en factores primos cada radicando y extrae todos los factores que puedas.

a) $\sqrt[3]{54}$ b) $\sqrt[4]{80}$ c) $\sqrt{1.800}$ d) $\sqrt[5]{224}$

Potencias de exponente fraccionario

¿Qué sentido se le puede dar a expresiones del tipo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{5}{3}}$?

Aplicando la definición de raíz	Aplicando la propiedad del producto de potencias de igual base	Si los dos resultados han de ser iguales
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$	$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$	$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$	$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a$	$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

Una potencia de exponente fraccionario es igual a un radical donde

- el denominador de la fracción es el índice del radical, y
- el numerador de la fracción es el exponente del radicando.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Cálculo con potencias y raíces

- Las potencias de exponente fraccionario verifican las mismas propiedades que las potencias de exponente entero.
- Las operaciones con radicales se pueden realizar recurriendo a las potencias de exponente fraccionario

Como raíces	Como potencias
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$(a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$

Actividades de refuerzo

Página 50 del libro

Calcula mentalmente

1. Expresa como una sola potencia.

a) $(5^3 \cdot 5^5)^3$
b) $(7^3 : 7^{-4})^{-2}$
c) $((3{,}2)^4 \cdot (3{,}2^{-3}))^{-1}$
d) $(9^{-3} : 9^{-7})^{-2}$

2. Expresa en notación científica.

a) 800.000
b) 0,00005
c) 356
d) 180,5

3. Opera en notación científica.

a) $3 \cdot 10^5 + 2{,}1 \cdot 10^5$
b) $7 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-6}$
c) $(2 \cdot 10^3) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{10})$
d) $(9 \cdot 10^6) : (3 \cdot 10^4)$

4. Expresa como un solo radical.

a) $\sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[6]{9}$
b) $\sqrt[8]{(-3)^5} : \sqrt[8]{(-3)^3}$
c) $\left(\sqrt[7]{5}\right)^6$
d) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{11}}$

Página 50 del libro

Calcula

5. Efectúa las siguientes operaciones de potencias dando el resultado como una sola potencia:

a) $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7$

b) $3^{-2} \cdot (3^4 : 3^5)$

c) $4^{-5} \cdot 4^{-6} \cdot (4^4)^3$

d) $(-2)^{11} : ((-2)^3)^{-2}$

6. Expresa el resultado de las operaciones siguientes como una potencia de 2.

a) $(4^2 \cdot 8^3)^{-2}$

b) $(2^3 \cdot 4^{-3})^{-4}$

c) $(8^{-2} : 4^{-3})^3$

d) $(16^{-3})^2 : (8^3)^{-4}$

7. Expresa como una sola potencia del número que consideres apropiado el resultado de las siguientes operaciones.

a) $(5^2 \cdot 25^2)^3$

b) $(9^2 : 27^4)^{-4}$

c) $((-2)^{12})^3 \cdot (-8)^5$

d) $(6^{-3} \cdot 36^{-2})^{-1}$

8. Calcula en cada caso el valor del exponente *a* para que se cumplan las igualdades siguientes.

a) $(3^a \cdot 3^5)^2 = 3^{14}$

b) $((-5)^a \cdot (-5)^5)^2 = (-5)^{20}$

c) $(2^5 : 2^a)^{-2} = 2^6$

d) $((6^5)^a)^{-2} = 6^{10}$

9. Escribe en notación científica estos números.

a) 1.234.000.000

b) 107.000

c) 0,000023

d) 35,076

10. Escribe en notación científica:

a) Tres billones y medio.

b) Doscientas milésimas.

c) Diez millonésimas.

Página 50 del libro

11. Sin hacerlas previamente, ¿cuál será el orden de magnitud del resultado de estas operaciones?

a) $6{,}3 \cdot 10^2 + 4{,}5 \cdot 10^2$

b) $7{,}7 \cdot 10^4 - 7{,}2 \cdot 10^4$

c) $(2{,}6 \cdot 10^3) \cdot (3{,}1 \cdot 10^4)$

d) $(5 \cdot 10^7) : (2{,}5 \cdot 10^6)$

12. Realiza las siguientes operaciones expresando el resultado en notación científica.

a) $293{,}5 \cdot 10^{-2} + 0{,}01 \cdot 10^3$

b) $1.023.000.000 - 0{,}57 \cdot 10^{11}$

c) $0{,}00000065 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-6})$

d) $20.100 \cdot 10^3 : (6{,}7 \cdot 10^5)$

13. Sustituye *a* por su valor para que cada una de las siguientes igualdades sea cierta:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{a}$

b) $\sqrt[7]{15} : \sqrt[7]{a} = \sqrt[7]{3}$

c) $\left(\sqrt[3]{7^a}\right)^4 = \sqrt[3]{7^8}$

d) $\sqrt[a]{\sqrt[3]{11}} = \sqrt[12]{11}$

Página 50 del libro

Plantea, resuelve y expresa en notación científica

14. Un glóbulo rojo tiene forma de cilindro con un diámetro de unas 7 millonésimas de metro y unas 2 millonésimas de altura. ¿Cuál es su volumen?

15. Un embalse que abastece a una población tiene 12 hm^3 de agua. Si por término medio una persona gasta 400 litros de agua diarios, ¿a qué población podrá abastecer durante un año?

16. Un año luz son $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km aproximadamente. Expresa en kilómetros el radio del universo si se estima que su valor es de 15 mil millones de años luz.

Actividades de ampliación

Página 51 del libro

Calcula

1. Considera las siguientes potencias: 2^{-2}, 2^{-3} y 2^{-5}.

a) ¿Cuál es la mayor de las tres?

b) ¿Cómo es la potencia a medida que el exponente negativo aumenta en valor absoluto?

c) Contesta a las dos preguntas anteriores para las potencias $0{,}7^{-3}$, $0{,}7^{-4}$ y $0{,}7^{-5}$.

2. Una potencia de exponente entero positivo, ¿es siempre mayor que la base? ¿En qué casos? ¿Y si el exponente es un entero negativo?

3. Halla en cada caso el valor de b para que se cumplan las igualdades siguientes.

a) $2^3 \cdot b^2 = 2^7$

b) $(b^4)^2 = 11^{-8}$

c) $8^3 : b^6 = 8^{21}$

d) $(-3)^4 \cdot b^5 = (-3)^{-11}$

4. Calcula y expresa en notación científica.

a) $\dfrac{0{,}00025 + 134{,}6 \cdot 10^{15}}{67.300}$

b) $\dfrac{(29{,}6 \cdot 10^9)(0{,}78 \cdot 10^7)}{(0{,}37 \cdot 10^3)(1.625 \cdot 10^{11})}$

c) $4 \cdot 10^{15} - \dfrac{0{,}048 + 26{,}6 \cdot 10^{12}}{66.500.000}$

5. Con la ayuda de la calculadora estudia, realizando varios ejemplos de cada una, si son ciertas las igualdades siguientes:

a) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Página 51 del libro

Plantea, resuelve y expresa en notación científica

6. La cantidad de glóbulos rojos en la sangre es de unos 5 millones por milímetro cúbico. Aprovechando que hemos calculado el volumen de uno de ellos, ¿qué porcentaje del volumen total de la sangre suponen los glóbulos rojos?

7. Supongamos que una determinada ciudad que ahora tiene 100.000 habitantes está en un rápido crecimiento que hace que su población aumente el 4% anual.

   a) Si se mantiene ese ritmo de crecimiento, ¿cuánto habrá crecido en 10 años?

   b) ¿Y en 20 años?

Página 51 del libro

8. El cuerpo humano necesita 240 millonésimas de gramo de yodo cada día para su correcto funcionamiento (su falta es la causante de la enfermedad del bocio).

   a) ¿Qué cantidad diaria de yodo necesita toda la humanidad —unos seis mil millones de habitantes— para tener cubiertas sus necesidades?

   b) Si una persona consume 3 gramos diarios de sal y queremos que todo el yodo que necesitamos nos llegue por esa vía, ¿cuál tiene que ser el porcentaje de yodo en la misma?

9. Una unidad utilizada para medir cantidades muy pequeñas es el picogramo, que equivale a una billonésima de un gramo. Los valores normales de la vitamina B_{12} en la sangre son entre 100 y 650 picogramos por cada mililitro en la mujer y entre 200 y 800 en el varón. Si la cantidad de sangre de una persona es de cinco litros, y su concentración de vitamina B_{12} es la normal, ¿entre qué valores oscila la cantidad de vitamina B_{12} en su sangre?