Unidad 3 – Sistemas de ecuaciones lineales

PÁGINA 57

cuestiones iniciales

1. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

a) $\begin{cases} x+2y=10 \\ 2x+5y=23 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \\ x+3y+6z+10t=0 \\ x+4y+10z+20t=0 \end{cases}$

2. Estudia y resuelve, cuando sea posible, los sistemas de ecuaciones siguientes, según los valores del parámetro *m*:

a) $\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=m^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx+y+z=4 \\ x+my+z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

a) La solución es $x=4$, $y=3$.

b) La solución es $x=2$, $y=-2$, $z=3$.

c) La solución es $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=0$.

2. La discusión en cada caso queda del siguiente modo:

a)
- Si $m=-1$, el sistema es incompatible.
- Si $m=1$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x=1-t$, $y=t$ con $t\in\mathbb{R}$.
- Si $m\notin\{-1, 1\}$, el sistema es compatible determinado.

Su solución es $x=\dfrac{-m}{m+1}$, $y=\dfrac{m^2+m+1}{m+1}$

b) • Si $m = -2$, el sistema es incompatible.
• Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 1 - t - s, \quad y = t, \quad z = s \text{ con } t, s \in \mathbb{R}.$$

• Si $m \notin \{-2, 1\}$ el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = -\frac{m+1}{m+2}, \quad y = \frac{1}{m+2}, \quad z = \frac{(m+1)^2}{(m+2)}$$

c) • Si $m = 1$, el sistema es incompatible.
• Si $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{1-m}, \quad z = \frac{4m-3}{m-1}$$

PÁGINA 71

ACTIVIDADES

- Encuentra el lenguaje y la notación adecuados en la resolución de los problemas siguientes:

1. **Pesada difícil.** Cuatro amigos, Arturo, Berta, Carlos y Diana, encuentran una antigua báscula que sólo pesa objetos de entre 50 y 100 kg. Estos amigos, individualmente, pesan menos de 50 kg y tres juntos, más de 100 kg, por lo que deciden pesarse de dos en dos de la siguiente manera: Arturo y Berta, 69 kg; Berta y Carlos, 79 kg; Carlos y Diana, 74 kg; Diana y Arturo, 64 kg. Con estos datos, ¿se puede determinar el peso de cada uno? Si no fuera posible determinar los pesos individualmente, ¿qué parejas deben pesarse para encontrar la solución?
2. **Curiosa elección.** En una clase hacen la elección de delegados de una forma muy original. Se piden tres alumnos voluntarios, que resultan ser Ana, Luis y Clara. Se les venda los ojos a cada uno de ellos y se les coloca en la cabeza una cinta, como la que llevan algunos tenistas. Estas tres cintas se toman de una bolsa que contiene tres cintas rojas y dos amarillas. Se les retira la venda de los ojos y de esta forma cada uno puede ver las cintas de sus compañeros, pero no la suya propia. Será elegido quien acierte el color de la cinta que lleva. Primero se pregunta a Ana y responde que no puede saberlo; lo mismo sucede con Luis. Por último, Clara dice que su cinta es roja, por lo que resulta ser elegida delegada. ¿Cómo lo supo?
3. **Suma de cubos.** ¿Cuánto suman los cubos de los n primeros números naturales?

SOLUCIONES

1. La solución queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Arturo} + \text{Berta} = 69 \\ \text{Berta} + \text{Carlos} = 79 \\ \text{Carlos} + \text{Diana} = 74 \\ \text{Diana} + \text{Arturo} = 64 \end{array}\right\}$$

Restando la primera igualdad a la segunda obtenemos: $\text{Arturo} - \text{Carlos} = -10$

Sumando a ésta la tercera obtenemos: $\text{Arturo} - \text{Diana} = 64$

Esta igualdad es la misma que tenemos en cuarto lugar. Luego no es posible determinar el peso de cada uno ya que nos queda un sistema indeterminado con más incógnitas que ecuaciones.
El sistema tiene una única solución si reemplazamos la tercera igualdad, sustituyéndola por la expresión: $\text{Arturo} + \text{Carlos} = 74\,\text{Kg}$ con lo cual obtenemos que: Arturo pesa 32 Kg; Berta pesa 37 Kg; Carlos pesa 42 Kg y Diana pesa 32 Kg.

2. En la siguiente tabla podemos ver todas las situaciones que se pueden plantear:

ANA	LUIS	CLARA	
R	R	R	(1)
R	R	A	(2)
R	A	R	(3)
A	R	R	(4)
R	A	A	(5)
A	R	A	(6)
A	A	R	(7)

En todos los casos lleva cinta roja excepto en (2), (5) y (6).

(2) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera sabido que su cinta era roja, ya que si hubiera sido amarilla Ana hubiera sabido el color de la suya.

(5) no es posible pues en esta situación ana hubiese dicho que su cinta era roja.

(6) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera dicho que su cinta era roja. Por tanto en todos los demás casos la de Clara es roja.

3. Queda así:

$1^3 = 1 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$

1, 3, 6, 10, 15, … Es una progresión aritmética de 2º orden y su término general es $\frac{n^2+n}{2}$, por tanto:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

Vamos a probarlo por inducción:

Suponemos que es cierto para $n=1$, $n=2$, …, $n=n$ y veamos si es cierto para $n=n+1$.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)^2+n+1}{2}\right]^2$$

Restando $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)^2+n+1}{2}\right]^2 - \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

Habría que ver si esa igualdad es cierta. Operando el segundo miembro:

$$(n+1)^3 = \frac{4n^3+12n^2+12n+4}{4}$$

Es cierta esta igualdad.
Por tanto queda probado que para «n» se cumple:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$$

PÁGINA 76

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 7x - 2y = 12 \\ x - 2 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 7 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + 4y + z = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \\ 10x - 5y = 15 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 3 \\ -y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$

2. Dado el sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$:

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema tenga infinitas soluciones.

3. Discute y resuelve, según los valores de a, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2 y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + ay = ax \\ 2x - ay = ay \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = a \\ ax + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

4. Dado el sistema $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$, halla m para que:

a) No tenga soluciones.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) Tenga solución única.

d) Tenga una solución en la que $x = 3$.

5. Calcula el valor de m para que el sistema $\begin{cases} y + z = 1 \\ (m-1)x + 3y + z = 2 \\ x + (m-1)y - z = 0 \end{cases}$:

a) Tenga una solución única.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) No tenga soluciones.

6. ¿Para qué valores de k el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + 3z = k \\ x + z = 1 \end{cases}$ tiene solución única?

7. Estudia, según los valores de a, el sistema $\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 0 \\ ax + y - z = 1 \end{cases}$. Resuélvelo para $a = 1$.

8. Discute según los valores de a y resuelve, cuando sea posible, el sistema: $\begin{cases} 2y - z = a \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = a \end{cases}$

9. a) Discute el siguiente sistema según los valores de b:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2b \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

   a) La solución es $x=2,\ y=1$.
   b) La solución es $x=3,\ y=-2,\ z=0$.
   c) El sistema es incompatible.
   d) Las soluciones son: $x=5-7t,\ y=-2+5t,\ z=t$ con $t\in\mathbb{R}$.
   e) El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x=t,\ y=2t-3$ con $t\in\mathbb{R}$.
   f) El sistema no tiene solución.

2. Queda así:

   a) Por ejemplo, la ecuación añadida para que el sistema sea incompatible es $3x+2z=5$.
   b) La ecuación añadida para que el sistema sea compatible indeterminado puede ser $3x+2z=2$.

3. Las soluciones en cada caso son:

   a) Consideraremos cada uno de los casos:
      - Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado.
        Sus soluciones son: $x=1-t,\ y=t$ con $t\in\mathbb{R}$.
      - Si $a\neq 1$, el sistema es compatible determinado.
        Sus soluciones son: $x=\dfrac{(a+1)(a^2+1)}{a^2+a+1},\quad y=\dfrac{a}{a^2+a+1}$

   b) Consideraremos cada uno de los casos:
      - Si $a=0$, el sistema es compatible indeterminado.
        Sus soluciones son: $x=0,\ y=t$ con $t\in\mathbb{R}$.
      - Si $a=2$, el sistema es compatible indeterminado.
        Sus soluciones son: $x=2t,\ y=t$ con $t\in\mathbb{R}$.
      - Si $a\notin\{0,2\}$, el sistema es compatible determinado.
        Sus soluciones son: $x=0,\quad y=0$.

   c) Consideraremos cada uno de los casos:
      - Si $a=1$, el sistema es compatible determinado. Sus soluciones son: $x=1,\ y=1$.
      - Si $a=-8$, el sistema es compatible determinado. Sus soluciones son: $x=10,\ y=28$.
      - Si $a\notin\{1,-8\}$, el sistema es incompatible.

4. Queda:

   a) Si $m=-1$, el sistema es incompatible.
   b) Si $m=1$, el sistema es compatible indeterminado.
   c) Si $m\neq 1$ y $m\neq -1$, el sistema es compatible determinado.
   d) El valor de m es $-4/3$.

5. Queda:

   a) Si $m\neq 2$ y $m\neq -1$, el sistema es compatible determinado.
   b) Si $m=2$, el sistema es compatible indeterminado.
   c) Si $m=-1$, el sistema es incompatible.

6. Para cualquier valor de k el sistema tiene solución única.
   Ésta es:

$$x = 2 - k/4,\ \ y = 3 + k/4,\ \ z = -1 + k/4.$$

7. Queda del siguiente modo:

- Si $a=-1$, el sistema es incompatible.
- Si $a\neq -1$, el sistema es compatible determinado.
- Para $a=1$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones son: $x=\frac{1}{2},\ \ y=\frac{1}{2},\ z=0$.

8. Queda:

- Si $a\neq 6$, el sistema es incompatible.
- Si $a=6$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones son: $x=5,\ \ y=4,\ z=2$.

9. Queda:

   a) Si $b\neq 0$ y $b\neq 1$, el sistema es compatible determinado.
   Si $b=0$, el sistema es incompatible.
   Si $b=1$, el sistema es compatible indeterminado.

   b) Si $b=1$, resolviendo se obtiene $x=-5t,\ y=1,\ z=t$ con $t\in\mathbb{R}$.

PÁGINA 77

■ 10. Dado el sistema homogéneo $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + kz = 0 \\ x - y - 4z = 0 \end{cases}$:

a) Indica para qué valores de k admite solución distinta de la trivial.

b) Resuélvelo para un valor k que lo haga compatible indeterminado.

■ 11. Discute y resuelve, según los valores de m, los sistemas:

a) $\begin{cases} mx + 2y + z = 0 \\ 4x + 2my + mz = 0 \\ 2x + (2m-2)y + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 5x - my + 3z = 0 \end{cases}$

■ 12. Elimina los parámetros que intervienen en los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x = 2m + n \\ y = -m + n \\ z = 3m - 2n \\ t = m + n \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = p + q \\ y = q + r \\ z = p + r \\ t = 2p - 3r \\ u = p + q + r \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 1 + p + q \\ y = -p + 2q \\ z = 2 + 2p + 3q \\ t = -1 + 2p \\ u = 3 - q \end{cases}$

■ 13. Un determinado concesionario de coches tiene abiertas tres sucursales. El número total de coches vendidos a final de mes entre las tres es 177, pero los vendidos en la tercera sucursal son la cuarta parte de los vendidos en la primera. Además, la diferencia entre el número de coches vendidos en la primera y la segunda es inferior en dos unidades al doble de los vendidos en la tercera. ¿Cuántos coches ha vendido en ese mes cada una de las sucursales?

■ 14. ¿Existen tres números tales que dados dos cualesquiera de ellos su suma es el otro más uno? En caso afirmativo, hállalos.

■ 15. En un jardín hay veintidós árboles entre naranjos, limoneros y pomelos. El doble del número de limoneros más el triple del número de pomelos es igual al doble del número de naranjos.

a) ¿Es posible saber con estos datos el número de naranjos que hay?

b) Si además se sabe que el número de naranjos es el doble del de limoneros, ¿cuántos árboles hay de cada tipo?

■ 16. Dada la ecuación $2x + 3y - z = 1$:

a) Añade dos ecuaciones para que el sistema resultante tenga una única solución.

b) Añade dos ecuaciones para que el sistema resultante no tenga solución.

c) Añade una ecuación para que el sistema resultante tenga infinitas soluciones.

■ 17. Dado el sistema $\begin{cases} ax + y - z = z \\ x - ay - z = -x \\ 3x - 3y - z = -y \end{cases}$, estudia su compatibilidad según los valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea posible.

10. Queda del siguiente modo:

a) Sólo para $k = 7/4$, el sistema admite solución distinta de la trivial.

b) Para el valor anterior las soluciones son: $x = \frac{5t}{4},\ y = \frac{-11t}{4},\ z = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

11. Queda:

a) Si $m \neq 2$ y $m \neq -2$, el sistema es compatible determinado y su solución es la trivial.

Si $m = -2$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x = 2t,\ y = t,\ z = 2t$ con $t \in \mathbb{R}$.

Si $m = 2$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x = t,\ y = u,\ z = -2t - 2u$ con $t, u \in \mathbb{R}$.

b) Es un sistema homogéneo. Si $m \neq 5$, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial.

Si $m = 5$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x = \frac{t}{5},\ y = \frac{4t}{5},\ z = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

12. En cada caso queda:

Eliminando los parámetros, se obtiene:

a) $\begin{cases} x - 7y - 3z = 0 \\ 2x + y - 3t = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 5y - z - 2t = 0 \\ x + y + z - 2u = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x + y - 3z = 1 \\ 4x - 2y - 3t = 7 \\ 2x - t + 2u = 9 \end{cases}$

13. El sistema se plantea del siguiente modo:

Llamamos *x*, *y*, *z* al número de coches vendidos cada día en una sucursal, las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 177 \\ z = \frac{1}{4}x \\ x - y = 2z - 2 \end{cases}$$

Expresado el sistema y aplicando el método de Gauss en la resolución obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 177 \\ x \quad\; - 4z = \quad 0 \\ x - y - 2z = \; -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 177 \\ \quad y + 5z = 177 \\ 2y + 3z = 179 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 177 \\ \quad y + 5z = 177 \\ \qquad 7z = 175 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = \;\; 52 \\ z = \;\; 25 \end{cases}$$

Por tanto, la primera sucursal vendió 100 coches, la segunda 52 y la tercera 25.

14. El sistema se plantea del siguiente modo:

Llamamos x, y, z a los números buscados. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y = z + 1 \\ x + z = y + 1 \\ y + z = x + 1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \; z = 1 \\ \quad 2y - 2z = 0 \\ \quad 2y \qquad = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Los tres números son $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

15. Queda del siguiente modo:

a) Llamamos n al número de naranjos, l al número de limoneros y p al número de pomelos. Las condiciones del enunciado nos permiten formular el sistema:

$$\begin{cases} \quad n + l + p = 22 \\ 2n - 2l - 3p = \;\; 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene dos soluciones: $n=12$, $l=6$, $p=4$ y $n=13$, $l=8$, $p=1$. No consideramos la solución $n=11$, $l=11$, $p=0$. Existen otras soluciones del sistema cuyos valores no son números naturales. Por tanto, no podemos saber el número de naranjos que hay.

b) Con la tercera solución planteamos y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \quad n + l + p = 22 \\ 2n - 2l - 3p = \;\; 0 \\ \; n - 2l \qquad = \;\; 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + l + p = 22 \\ \;\; 4l + 5p = 44 \\ \;\; 3l + \;\; p = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + l + p = 22 \\ \;\; 4l + 5p = 44 \\ \qquad 11p = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 \\ l = \;\; 6 \\ n = \;\; 4 \end{cases}$$

Los árboles del jardín son 12 naranjos, 6 limoneros y 4 pomelos.

16. Queda del siguiente modo:

a) Este apartado admite una respuesta abierta a múltiples soluciones. Una de ellas puede ser:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = 8 \\ -3x + y + 2z = 6 \end{cases} \text{ con solución } x=1,\ y=1,\ z=4.$$

b) Como ocurre en el caso anterior un ejemplo podría ser:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = 8 \\ 3x + 2y + z = 15 \end{cases}$$

c) En este caso:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = 8 \\ 3x + 2y + z = 9 \end{cases}$$ las infinitas solución pueden venir dadas en la forma: $x = 5 - t,\quad y = -3 + t,\quad z = t \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}.$

17. La solución es:

El sistema del enuncido es el sistema homogéneo

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ -2x + ay + z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ -2 & a & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 8a + 7$$

El estudio a realizar es:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 7$, el rango de la matriz A es 3, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial.
- Si $a = 1$, el rango de la matriz A es 2, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x = t,\ y = t,\ z = t$ con $t \in \mathbb{R}$.
- Si $a = 7$, el rango de la matriz A es 2, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x = -5t,\ y = t,\ z = -17t$ con $t \in \mathbb{R}$.

PÁGINA 78

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

18. Encuentra todas las soluciones del sistema siguiente según los valores del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

19. Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3m \end{cases}$$

20. El señor García deja a sus hijos herederos de todo su dinero con las siguientes condiciones: al mayor le deja la media aritmética de lo que les deja a los otros dos más 30 000 €; al mediano, exactamente la media aritmética de lo que les deja a los otros dos; y al más pequeño, la media aritmética de lo de los otros dos menos 30 000 €. Conociendo estas condiciones solamente, ¿pueden los hijos saber cuánto dinero ha heredado cada uno?

21. Discute, según los valores de b, el sistema $\begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & b & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Resuélvelo encontrando la solución para $z = -3$.

22. Estudia, en función de los valores del parámetro k, el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + z = y \\ x + 2y + kz = k \end{cases}$ y resuélvelo cuando sea compatible.

23. Elimina los parámetros a y b en el sistema $\begin{cases} x + y = 3a + 3 \\ 2x + y - z = 3a + 3b + 1 \\ x - 2y + z = -2a + 5b - 8 \end{cases}$

24. Discute, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} x - y = m \\ x + m^2 z = 2m + 1 \\ x - y + (m^2 - m)z = 2m \end{cases}$

Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

25. Determina para qué valores del parámetro a el sistema $\begin{cases} ax + y + a^2 z = 3 \\ -x - 7y + 8z = 0 \\ x + a^3 y + a^2 z = -3 \end{cases}$ admite como solución $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, y resuélvelo en estos casos, comprobando que, efectivamente, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ es solución del sistema. Razona la respuesta.

26. Dado el sistema $\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$, discútelo en función de a y resuélvelo para $a = -5$.

18. En este caso queda del siguiente modo:

Para cualquier valor que tome el parámetro a, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son las siguientes: $x=1-t,\ y=(1-2a)t,\ z=2t$ con $t\in\mathbb{R}$.

19. La discusión queda:

- Si $m\neq 2$, el sistema es incompatible.
- Si $m=2$, el sistema es compatible determinado.

20. Queda:

Llamando *M* lo que recibe el hijo mayor, *m* el mediano y *p* el pequeño e imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2M-m-p=60000 \\ M-2m+p=0 \\ M+m-2p=60000 \end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado por lo que no podemos saber lo que deja a cada uno de los hijos con estas condiciones.

21. Queda:

Este sistema es homogéneo. La discusión quedaría:

- Si $b\neq -3$ y $b\neq -1$, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial.
- Si $b=-3$, el sistema es compatible indeterminado y la solución en la que $z=-3$ es la siguiente: $x=-3/2,\ y=3/2,\ z=-3$.
- Si $b=-1$, la $z=0$ por lo que no hay ninguna solución que verifique el enunciado.

22. La solución es:

Este sistema es no homogéneo. La discusión quedaría:

- Si $k=7$, el sistema es incompatible.
- Si $k\neq 7$, el sistema es compatible determinado y su solución es:

$$x=\frac{-3k}{k-7}\ ,\ y=\frac{-2k}{k-7}\ ,\ z=\frac{k}{k-7}$$

23. La solución es:

Debe cumplirse que

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & x+y-3 \\ 3 & 3 & 2x+y-z-1 \\ -2 & 5 & x-2y+z+8 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando se obtiene: $\boxed{y-2z=2}$

24. La discusión queda:

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado.
- Si $m=1$, el sistema es incompatible.
- Si $m=0$, el sistema es compatible indeterminado y las posibles soluciones del mismo son: $x=1,\ y=1,\ z=t$ con $t \in \mathbb{R}$.

25. La solución queda:

Sustituyendo $x=1,\ y=1,\ z=1$ en el sistema, el parámetro debe cumplir:

$$\begin{cases} a+1+a^2=3 \\ 1+a^3+a^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-2=0 \\ a^3+a^2+4=0 \end{cases}$$

Las soluciones de la primera ecuación son: $a=1$ y $a=-2$, solamente $a=-2$ cumple la segunda ecuación.
Por tanto, para $a=-2$ el sistema admite como solución $x=1,\ y=1,\ z=1$. Veamos que es cierto:

Para $a=-2$ el sistema queda: $\begin{cases} -2x+y+4z=3 \\ -x-7y+8z=0 \\ x-8y+4z=-3 \end{cases}$

El rango de la matriz A es 2 ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 8 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 0$

y $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$.

El rango de la matriz A^* es 2 ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & -7 & 0 \\ 1 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 0$

El sistema es compatible indeterminado, se reduce a

$$\begin{cases} -2x + \quad y = 3 - 4z \\ \quad x + 7y = 8z \end{cases}$$

y sus soluciones son:

$$x = \frac{36z - 21}{15} \quad y = \frac{12z + 3}{15} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{12t - 7}{5} \\ y = \dfrac{4t + 1}{5} \\ z = t;\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Obsérvese que la solución que se cita en el enunciado, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, se obtiene para $t = 1$.

26. Queda del siguiente modo:

Hallando el determinante de la matriz ampliada obtenemos la expresión $18a - a^3 - 35$ y resolviendo la ecuación $18a - a^3 - 35 = 0$ obtenemos la solución real $a = -5$.

La discusión del sistema es:

Si $a = -5$ el sistema es compatible determinado y en caso contrario es incompatible. Por tanto, para este valor puede resolverse obteniéndose como solución $x = -1$, $y = -1$.