Unidad 1 – Matrices

PÁGINA 7

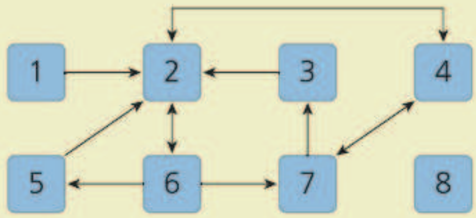
cuestiones iniciales

1. Expresa en notación matricial y resuelve por el método de Gauss los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y + 4z = 9 \\ 3x + 5y - z = 17 \\ -2x + 6y + z = 18 \end{cases}$

2. Si se cumple que $PQ = P$ y $QP = Q$, prueba que $P^2 = P$.

3. El grafo siguiente nos muestra las relaciones que se establecen en un grupo de ocho personas. Construye una tabla que indique las relaciones anteriores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos personas y con 0 la no existencia de relación.



SOLUCIONES

1. La resolución de los sistemas puede expresarse de la forma siguiente:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 - 2F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 0 & 13 & 78 \end{pmatrix}$$

La segunda matriz proporciona la solución $x=5, y=6$.

$$b)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & -1 & 17 \\ -2 & 6 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_1 + F_3 \to F_3]{3F_1 - F_2 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 \\ 0 & -14 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{pmatrix}$$

La última matriz proporciona la solución $x=2,\ y=3,\ z=4$.

2. Veamos que $P^2 = P$. Para ello,

$$P^2 \underset{(1)}{=} P \cdot P \underset{(2)}{=} PQ \cdot P \underset{(3)}{=} P \cdot QP \underset{(4)}{=} PQ \underset{(5)}{=} P$$

Las igualdades anteriores son debidas a:

(1) la definición de la potencia al cuadrado;
(2) la hipótesis $PQ = P$;
(3) la propiedad asociativa del producto;
(4) la hipótesis $QP = Q$;
(5) la hipótesis $PQ = P$.

3. La que indica las relaciones existentes en el grafo es:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

PÁGINA 23

A C T I V I D A D E S

■ Con el fin de que te acostumbres a escribir los protocolos de resolución de los problemas, escribe los protocolos de los siguientes problemas:

1. **Las edades de la familia.** Una madre de familia, que ronda la cuarentena, observa que, si escribe tres veces seguidas su edad, obtiene un número que es igual al producto de su edad multiplicada por la de su marido y las edades de sus cuatro hijos. ¿Qué edad tiene cada uno de los miembros de la familia?
2. **Dos números.** Encuentra dos números tales que su suma, su producto y su cociente sean iguales.

SOLUCIONES

1. Supongamos que la edad de la madre es de 39 años; imponiendo las condiciones del problema, obtenemos:

$$393939 = 39 \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \Rightarrow P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 10101$$
$$P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$$

Luego si la madre tiene 39 años, el padre tiene 37 y los cuatro hijos tienen respectivamente, 13, 7, 3 y 1 años.

Observamos que si partimos de que la madre tiene 38 años obtenemos la misma respuesta, e igual que para 37, 36, 35 años. Es decir, independientemente de la edad de la madre, nos salen las edades del padre, 37 años, y las edades de los hijos: 13, 7, 3 y 1 años.

En general la madre tendrá xy años $xy = 10x + y$ años.

$$xyxyxy = xy \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \Rightarrow \frac{xyxyxy}{xy} = P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4$$

Ahora bien:

$$\frac{xyxyxy}{xy} = \frac{100\,000x + 10\,000y + 1000x + 100y + 10x\,y}{10x + y} =$$
$$= \frac{101010x + 10101y}{10x + y} = \frac{10101(10x + y)}{10x + y} = 10101$$

Descomponemos 10 101 en factores y es: $10101 = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$

Luego las edades serán:

$Q = 37$ años $H_3 = 3$ años
$H_1 = 13$ años $H_4 = 1$ año
$H_2 = 7$ años

2. Llamamos x, y a los números. Se debe cumplir que:

$$x+y=x\cdot y=\frac{x}{y}$$

Resolviendo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=x\cdot y \\ x\cdot y=\dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow y=\dfrac{x}{x-1} \\ \Rightarrow xy^2=x \Rightarrow y=\pm 1 \end{array}$$

Luego para $y=+1 \Rightarrow \frac{x}{x-1}=1$ no tiene solución.

Para $y=-1 \Rightarrow \frac{x}{x-1}=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

La solución válida es: $x=\frac{1}{2}; y=-1$

PÁGINA 28

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula a, b, c y d para que se cumpla $2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

   a) $A + B$ b) $A - B - C$ c) $3A + 5B - 6C$ d) $AB - BC$ e) $2AB + 3AC - 5BC$

3. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula AB y BA.

4. Calcula los productos posibles entre las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, ¿son ciertas, en general, las igualdades siguientes?:

   a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ c) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

6. Obtén las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

   a) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

7. Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten, respectivamente, con las matrices siguientes:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, efectúa las siguientes operaciones:

   a) $C \cdot A^t$ b) $A^t \cdot B^t$ c) $2 \cdot C^t \cdot C$ d) $B \cdot A \cdot C^t$

9. Descompón en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica las matrices siguientes:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

10. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{97} y B^{59}.

11. Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A las siguientes matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

1. Realizando las operaciones indicadas y aplicando la igualdad de matrices, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & a+b+7 \\ c+d-2 & 3d+4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = a+5 \\ 2b = a+b+7 \\ 2c = c+d-2 \\ 2d = 3d+4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, $a=5$, $b=12$, $c=-6$, $d=-4$.

2. La solución en cada caso queda:

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A - B - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $3A + 5B - 6C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -19 \end{pmatrix}$

d) $AB - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & +2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

e) $2AB + 3AC - 5BC =$

$= 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & +2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} -$

$- 5\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -18 & 27 \end{pmatrix} -$

$- \begin{pmatrix} -20 & 40 \\ 25 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -39 \\ -49 & 55 \end{pmatrix}$

3. Los productos quedan:

$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 20 & 12 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$

4. Los productos posibles son:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

5. En general, las igualdades anteriores no son ciertas, ya que el producto de matrices no es conmutativo.

a) $(A + B)^2 = (A + B)\,(A + B) = AA + AB + BA + BB =$
$= A^2 + AB + BA + B^2$

b) $(A - B)^2 = (A - B)\,(A - B) = AA - AB - BA + BB =$
$= A^2 - AB - BA + B^2$

c) $(A + B)\,(A - B) = AA - AB + BA - BB =$
$= A^2 - AB + BA - B^2$

6. Llamamos A y B a las matrices numéricas que aparecen en cada uno de los sistemas. Resolvemos éstos por el método de reducción y obtenemos:

a) $\begin{cases} 2X + Y = A \\ X - 3Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = A \\ 7Y = A - 2B \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 3/7\,A + 1/7\,B \\ Y = 1/7\,A - 2/7\,B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 4/7 \\ -1 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 9/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 1/7 & -2/7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1/2\,A + 1/2\,B \\ Y = 1/2\,A - 1/2\,B \end{cases} \Leftrightarrow$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} 2X + Y = A \\ X + 2Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = A \\ Y = 1/3\,A + 2/3\,B \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 2/3\,A - 1/3\,B \\ Y = -1/3A + 2/3B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & -8/3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 10/3 \end{pmatrix}$

7. En cada uno de los casos queda:

Operando en la igualdad

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases}$$

La solución del sistema es $c=0$, $a=d$ y b cualquiera.

Por tanto, las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con a y b números reales cualesquiera.

De una forma análoga obtenemos que las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} d-c & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$

8. Las operaciones quedan:

a) $C\cdot A^t = \begin{pmatrix} 7 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

c) $2\cdot C^t \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 6 \\ 12 & 6 & 18 \end{pmatrix}$

d) $B\cdot A\cdot C^t = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

9. Toda matriz cuadrada A puede expresarse de la forma $A = \dfrac{A+A^t}{2} + \dfrac{A-A^t}{2}$.

En la suma anterior, el sumando $\dfrac{A+A^t}{2}$ es una matriz simétrica y el sumando $\dfrac{A-A^t}{2}$ es una matriz antisimétrica.

Las descomposiciones pedidas son:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 3/2 & 7/2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -7/2 \\ 1/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 9/2 \\ 1/2 & 0 & 5 & 9/2 \\ 0 & 5 & 7 & 9/2 \\ 9/2 & 9/2 & 9/2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 3 & -1/2 \\ -3/2 & 0 & 1 & 5/2 \\ -3 & -1 & 0 & -3/2 \\ 1/2 & -5/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$

10. En cada uno de los dos casos queda del siguiente modo:

Calculamos las potencias sucesivas de A y B.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$

$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$

$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I$

$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = -I;$ etcétera.

Observamos que las potencias de la matriz A se repiten de cuatro en cuatro. Así:

$A^{97} = A^{4 \cdot 24 + 1} = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = I \cdot A = A$

Calculando las sucesivas potencias de $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos que:

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Podemos continuar y observar que las potencias pares siguen una recurrencia y las impares otra. Es decir:

Si n es par $B^n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$ y si n es impar $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{\frac{n+1}{2}} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto $B^{59} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{30} \\ 2^{29} & 0 \end{pmatrix}$

11. Quedan del siguiente modo:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

b) Si $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,

entonces $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\text{sen}\,n\alpha \\ \text{sen}\,n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2+n/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

PÁGINA 29

12. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

15. Calcula la matriz $B^{-1}A^2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

16. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

17. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

a) $\begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

18. a) Escribe tres matrices de dimensión 3×4, que tengan, respectivamente, rango 2, 1 y 4. Razona la respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4, que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

19. Si A es una matriz cuadrada de orden n, tal que $A^2 = A$, e I es la matriz unidad de orden n, ¿qué matriz es B^2, si $B = 2A - I$?

20. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Demuestra que si $A \cdot B = A$ y $B \cdot A^{-1} = B$ entonces $A^2 = A$.

b) Si A es una matriz que conmuta con B y C, ¿es cierto que $(B \cdot C) \cdot A = A \cdot (B \cdot C)$?

21. Contesta las siguientes preguntas:

a) Dada una matriz A, ¿existe otra matriz B tal que el producto AB sea una matriz de una sola fila?

b) Sea A una matriz cuadrada, demuestra que $A + A^t$ es simétrica.

c) Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica.

22. Sean X, Y, Z tres matrices tales que es posible efectuar $Z^t - XY$. ¿Es posible efectuar $(Y \cdot Z)^t + X^t$?

12. Las triangulares equivalentes son:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_1 + F_3 \to F_3]{F_1 + F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_3 \to F_3}$

$\xrightarrow{F_2 - 2F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_1 - F_3 \to F_3]{3F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_3}$

$\xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 + F_3 \to F_3 \\ 3F_1 - F_4 \to F_4}]{2F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_4 - F_2 \to F_4]{F_2 - F_3 \to F_3}$

13. Las inversas quedan del siguiente modo:

a) $\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 4 & 8 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 4 & -1 \end{pmatrix}$ No existe matriz inversa

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & \vdots & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & \vdots & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

14. Queda:

La matriz (AB) es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz traspuesta de la anterior $(AB)^t$ es $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de la anterior $(AB)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} -1/14 & 1/2 \\ 3/14 & -1/2 \end{pmatrix}$

15. Queda:

La matriz B^{-1} es $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

La matriz A^2 es $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

La matriz $B^{-1}A^2$ es $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -45 \\ -27 & 36 \end{pmatrix}$

La matriz $B^{-1}A^2 B$ es $\begin{pmatrix} 36 & -45 \\ -27 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

16. Realizamos operaciones elementales en las filas de las matrices, obteniendo matrices equivalentes.

a) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$

b) Rango de $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

d) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix} =$

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 5 & 15 & 23 & 18 \end{pmatrix} =$

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

17. Queda del siguiente modo:

a) Rango de $\begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a-2 & a+2 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a-6 \end{pmatrix}$

Si $a = 6$ el rango es 1 y si $a \neq 6$ el rango es 2.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & a-4 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$

Si $a = 4$, el rango es 2 y si $a \neq 4$, el rango es 3.

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 2a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$

- Si $a = 1$, el rango es 1.
- Si $a = -2$, el rango es 2.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, el rango es 3.

18. Quedan:

a) La matrices de dimensión 3×4,

- con rango 2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

- con rango 1 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

- con rango 4 no es posible construirla.

b) Como en el apartado anterior, admite múltiples respuestas. Un ejemplo podría ser:

- con rango 1: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \\ 10 & -10 & 20 & -30 \end{pmatrix}$

- con rango 2: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$

- con rango 3: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

- con rango 4: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

19. La solución queda:

Se tiene que:

$B^2 = B \cdot B = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A \cdot A - 2A \cdot I - 2A \cdot I +$
$+ I^2 = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4A - 4A + I = I$

Por tanto la matriz B^2 es la matriz unidad. Las matrices como B se denominan idempotentes.

20. Quedan:

a) Se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$\underset{(1)}{A^2} = \underset{(2)}{A \cdot A} = \underset{(3)}{(A \cdot B) \cdot A} = \underset{(4)}{A \cdot (B \cdot A^{-1}) A} = A \cdot B \cdot A^{-1} \cdot \underset{(5)}{A} = \underset{(6)}{AB} = A$$

ya que:

(1) Es la definición de potencia cuadrado de una matriz.

(2) Por la hipótesis $A \cdot B = A$.

(3) Por la hipótesis $BA^{-1} = B$.

(4) Por la propiedad asociativa del producto.

(5) Al ser $A \cdot A^{-1} = I$.

(6) Por la hipótesis $AB = A$.

b) Se cumple:

$$(B \cdot C) \cdot A \underset{(1)}{=} B \cdot (C \cdot A) \underset{(2)}{=} B \cdot (A \cdot C) \underset{(3)}{=} (B \cdot A) \cdot C \underset{(4)}{=} (A \cdot B) \cdot C \underset{(5)}{=} A \cdot (B \cdot C)$$

al ser:

(1); (3) y (5) Por la propiedad asociativa del producto de matrices.

(2) Las matrices A y C conmutan.

(3) Las matrices A y B conmutan.

21. Las respuestas quedan:

a) En el caso de que la matriz A tenga una dimensión $m \times n$, con $m \neq 1$, es imposible encontrar la matriz B cumpliendo las condiciones pedidas. En el caso de que la matriz A tenga dimensión $1 \times n$, la matriz B tendrá dimensión $n \times m$ y la matriz resultante será la matriz fila $1 \times m$.

b) $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$ por tanto la matriz $(A + A^t)$ es simétrica pues coincide con su traspuesta.

c) Una matriz A es antisimétrica si $A^t = -A$.

Veamos cómo son las potencias sucesivas:

$(A^2)^t = (A \cdot A)^t = A^t \cdot A^t = (-A) \cdot (-A) = A^2$, luego A^2 es simétrica.

$(A^3)^t = (A^2 \cdot A)^t = A^t \cdot (A^2)^t = (-A) \cdot A^2 = -A^3$, luego A^3 es antisimétrica.

Por tanto, las potencias pares son matrices simétricas y las potencias impares son antisimétricas.

22. Sean X, Z, Y tres matrices de dimensiones $m \times n$, $p \times q$ y $r \times s$, respectivamente.

Si es posible calcular XZ tiene que cumplirse que $n = p$ y la dimensión del producto es $m \times q$.

La dimensión de Y^t, $s \times r$, debe coincidir con la de XZ, es decir, con $m \times q$; lo que implica que $s = m$ y $q = r$.

Con las condiciones anteriores, las dimensiones de las matrices anteriores son $m \times n$ para X, $q \times m$ para Y y $n \times q$ para Z.

Es posible calcular $ZY - X^t$ ya que se puede efectuar el producto ZY resultando de dimensión $n \times m$, dimensión que coincide con la de la matriz traspuesta de X.

PÁGINA 30

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

23. Halla las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

24. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula.

25. Obtén la matriz inversa de $A + A^t$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

26. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, construye la matriz $Y = 3A^tA - 2I$, y resuelve la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27. Prueba que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

28. Sean las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si M es una matriz de la forma $M = aI + bJ$, siendo a y b números reales, se pide:

   a) Calcula M^2 y M^3.

   b) Calcula M^n, siendo n un número natural.

29. La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es distinta de la matriz nula. ¿Es inversible? En caso afirmativo, halla M^{-1}.

30. Si A y B son dos matrices diagonales de orden 2, demuestra que $A \cdot B = B \cdot A$. Halla todas las matrices diagonales A tales que $A \cdot A = I$.

31. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Comprueba que $A^{-1} = A^t$.

   b) Utilizando el resultado anterior calcula $(A^t \cdot A)^{1999}$.

32. Estudia según los valores de m el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix}$.

33. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) ¿Para qué valores de x la matriz A posee inversa?

   b) Encuentra la matriz inversa de A para $x = -1$.

   c) ¿Qué dimensiones debe tener una matriz X para que la ecuación $A \cdot X = B \cdot C$ tenga sentido? Halla esta matriz para $x = 1$.

23. La solución es:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b\,(a+d) \\ b\,(a+d) & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b\,(a+d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$$

Los casos posibles son:

1. $b=0$, entonces $a=0$ ó $a=1$, y $d=0$ ó $d=1$. Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $a=1-d$, entonces $b=\pm\sqrt{d-d^2}$ con $d\in[0,1]$. Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 1-d & \pm\sqrt{d-d^2} \\ \pm\sqrt{d-d^2} & d \end{pmatrix} \text{ con } d \in [0,\ 1]$$

24. Queda del siguiente modo:

La matriz $A - kI$ es $A - kI = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$

La matriz $(A - kI)^2$ es

$$(A-kI)\,(A-kI) = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ -2k+2 & -2k+2 & 5-6k+k^2 \end{pmatrix}$$

El valor que hace que la última matriz sea la matriz nula es $k=1$.

25. Queda:

La matriz $A + A^t$ es

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matriz $(A + A^t)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

26. Queda del siguiente modo:

La matriz $Y = 3A^tA - 2I$ es

$$Y = 3\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 & 39 \\ 39 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 100 & 39 \\ 39 & 13 \end{pmatrix}$$

Para resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, llamamos a $X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, operamos y resolvemos el sistema correspondiente.

El sistema es $\begin{cases} 3a_{11} + a_{21} = 2 \\ 5a_{11} + 2a_{21} = 0 \\ 3a_{12} + a_{22} = 0 \\ 5a_{12} + 2a_{22} = 1 \end{cases}$

Las soluciones son: $a_{11} = 4$, $a_{21} = -10$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 3$

La matriz X es: $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$.

27. Queda:

Calculamos $A^2 - A - 2I$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la expresión $A^2 - A - 2I = 0$, operando se obtiene:

$$A^2 - A - 2I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A - I = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A = I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = I$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \dfrac{1}{2}A - \dfrac{1}{2}I$.

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

28. La solución es:

La matriz $M = aI + bJ$ adopta la expresión $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$,

a) La potencias cuadrada y cúbica de M son:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

b) Para encontrar la expresión de M^n con n natural, calculamos nuevas potencias.

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \cdot M = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4b \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, M^n con n natural tiene la expresión siguiente:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

La demostración de esta última proposición puede efectuarse por el método de inducción.

29. Calculamos la posible matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, obteniendo:

$$a)\ \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & b & a \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \dfrac{a^2}{a^2+b^2} & \dfrac{-ab}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{-b}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right)$$

La matriz M siempre es invertible, ya que a y b no pueden ser 0 simultáneamente entonces $a^2 + b^2 \neq 0$.

La matriz inversa de M es:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

30. Queda:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$. Los productos de ambas son:

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = BA$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ una matriz diagonal cualquiera. La condición $A \cdot A = I$ nos conduce al sistema:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 = 1 \\ a_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \pm 1 \\ a_2 = \pm 1 \end{cases}$$

Las matrices diagonales buscadas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

31. La solución queda:

a) Calculamos A^{-1} mediante el procedimiento de Gauss-Jordan. Para ello intercambiamos las filas primera y segunda y, posteriormente la segunda y la tercera para obtener:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

b) Teniendo en cuenta que $A^t = A^{-1}$ siguiendo la definición de matriz inversa obtenemos la siguiente expresión $A^t \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A^t = I$ y $(A^t \cdot A)^{1999} = (A^{-1} \cdot A)^{1999} = I^{1999} = I$.

32. La solución queda:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $m=0$ el rango es 2 y para todos los demás valores de m el rango es 3.

33. En cada uno de los casos queda:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 4x - 2 - x^2$

La matriz A tiene inversa para todos los valores de x excepto aquellos que anulen el determinante de A, es decir, $\exists\, A^{-1} \quad \forall x \neq -2 \pm \sqrt{2}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) La matriz X ha de ser de dimensión 3x2. Despejando obtenemos: $X = A^{-1} \cdot B \cdot C$

Calculando la matriz A^{-1} para $x=1$ y sustituyendo obtenemos: $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$