Unidad 12 – Aplicaciones de las derivadas

PÁGINA 287

cuestiones iniciales

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones $f(x) = x \cdot |x|$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

2. Demuestra que la función $f(x) = 3^x$ es estrictamente creciente.

3. Expresa, en función de la longitud de la base, el área de un rectángulo cuyo perímetro vale 20 m. ¿Para qué valor de la base el área es máxima?

SOLUCIONES

1. En cada caso:

- $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & si \ x \geq 0 \\ -x^2 & si \ x < 0 \end{cases}$

Estudiamos a continuidad en $x=0$. $f(0)=0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2) = 0$$

La función f(x) es continua en $x=0$, luego es continua en toda la recta real.

Estudiemos la derivabilidad en $x=0$.

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(0+h)^2 - 0}{h} = 0$$

La función $f(x)$ es derivable en $x=0$, luego es derivable en toda la recta real.

- $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Esta función es continua en toda la recta real.
Estudiemos su derivabilidad en $x = 0$.

$$g'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{(0+h)^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \to 0^+} \sqrt[3]{\frac{h^2}{h^3}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$$

$$g'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{(0-h)^2}}{h} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

La función $g(x)$ no es derivable en $x = 0$.

2. Veamos que para todo $x_1 < x_2$ se cumple que $3^{x_1} < 3^{x_2}$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow 3^{x_2 - x_1} > 1 \Rightarrow \frac{3^{x_2}}{3^{x_1}} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{x_2} > 3^{x_1} \Rightarrow 3^{x_1} < 3^{x_2}$$

Luego queda probado que la función $f(x) = 3^x$ es estrictamente creciente.

3. Llamando a a la altura del rectángulo y b a la base del mismo, podemos escribir:

$2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow 10 - a$

Área $= b \cdot a = a(10-a) = 10a - a^2$

La función que nos da el area del rectángulo es una función cuadrática cuyo valor máximo lo alcanza en el vértice, es decir, para $a = 5\,m$.

Luego para este valor de la altura, la base mide $b = 10 - 5 = 5\,m$. Es decir, la base mide 5 m igual que la altura.

PÁGINA 303

ACTIVIDADES

- Utiliza el método de demostración por reducción al absurdo para resolver las siguientes actividades:

  1. **Número irracional.** Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

  2. **Implicación lógica**. Demuestra que si $P \Rightarrow Q$ entonces no $P \Rightarrow$ no Q.

SOLUCIONES

1. La solución queda:

Supongamos que $\sqrt{3}$ no es irracional, por tanto $\sqrt{3}$ será racional, con lo que se puede poner en forma de fracción de este modo:

$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y primos entre sí.

De esta igualdad obtenemos: $a = b\sqrt{3}$

Elevando ambos miembros al cuadrado nos queda: $a^2 = 3b^2$

De aquí deducimos que a^2 es múltiplo de 3. Si a^2 es múltiplo de 3 entonces a también lo es.

Podemos escribir: $a = 3m$ con $m \in \mathbb{Z}$ y sustituyendo en la igualdad $a^2 = 3b^2$ obtenemos:

$$(3m)^2 = 3b^2 \;\Rightarrow\; 9m^2 = 3b^2 \;\Rightarrow\; 3m^2 = b^2$$

Con lo que b^2 es múltiplo de 3 y, por tanto, b también lo es.

Con esto hemos llegado a que a y b son múltiplo de 3. Este resultado contradice el hecho de que *a* y *b* son primos entre sí. Por tanto, hemos llegado a una contradicción o absurdo, por lo que concluimos afirmando que $\sqrt{3}$ no es un número racional, es decir, es un número irracional.

2. Tiene que ser no P pues si fuera P entonces seria Q y como no dice no Q no puede ser P.

PÁGINA 308

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x - x^2$ c) $f(x) = -5x + 3$ e) $f(x) = \frac{2}{x}$ g) $f(x) = e^{3x}$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ d) $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$ f) $f(x) = 2^{-x}$ h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

2. Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $y = -x^2 + 6x - 5$ d) $y = x(x-1)^2$ g) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$

b) $y = \frac{x}{\ln x}$ e) $y = \frac{2}{1+x^2}$ h) $y = \frac{8x}{x^2+2}$

c) $y = \frac{x^2+1}{x}$ f) $y = x \cdot \ln x$ i) $y = x^2 \cdot e^x$

3. Halla el valor de a para que la función $f(x) = x^2 - 6x + a$ tenga un mínimo de valor -1.

4. Halla b y c para que la curva $y = -x^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo en el punto (0, 4).

5. Halla a, b y c de manera que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo relativo en el punto (6, −12) y se anule para $x = 8$.

6. En la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, halla a, b y c para que esta función pase por el punto (1, 0), tenga un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

7. Demuestra que la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene siempre extremo relativo en su vértice, siendo máximo si a es negativo y mínimo si a es positivo.

8. Estudia el crecimiento de la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{e^x}$. Determina, si existen, sus máximos y mínimos relativos.

9. Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$ c) $f(x) = \frac{2}{x}$ e) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ d) $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ f) $f(x) = \ln(x + 4)$

10. Halla los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \text{sen } 2x$$

11. Halla el valor de k que hace que la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un extremo relativo único. ¿Se trata de un máximo o un mínimo relativo?

12. Dada la función $f(x) = x(x-1)^3$:

a) Estudia su monotonía.

b) Halla sus extremos relativos.

c) Estudia el tipo de concavidad.

d) Determina, si existen, los puntos de inflexión.

SOLUCIONES

1. La tabla queda:

Funciones	Estrictamente Creciente	Estrictamente Decreciente
$f(x)=4x-x^2$	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$f(x)=x^3-3x^2+5$	$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$	$(0,2)$
$f(x)=-5x+3$		$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$	$\mathbb{R}$	
$f(x)=\dfrac{2}{x}$		$\mathbb{R}$
$f(x)=2^{-x}$		$\mathbb{R}$
$f(x)=e^{3x}$	$\mathbb{R}$	
$f(x)=\sqrt{x^2-9}$	$(3,+\infty)$	$(-\infty,-3)$

2. La tabla queda:

Funciones	Máximo Relativo	Mínimo Relativo
$y=-x^2+6x-5$	(3, 4)	
$y=\dfrac{x}{\ln x}$		(e, e)
$y=\dfrac{x^2+1}{x}$	(-1, -2)	(1, 2)
$y=x(x-1)^2$	$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{27}\right)$	(1 , 0)
$y=\dfrac{2}{1+x^2}$	(0, 2)	
$y=x\cdot\ln x$		$\left(\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{e}\right)$
$y=2x^3-15x^2+36x-12$	(2, 16)	(3, 15)
$y=\dfrac{8x}{x^2+2}$	$\left(\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)$
$y=x^2\,e^x$	$\left(-2,\dfrac{4}{e^2}\right)$	(0, 0)

3. La solución es:

$f(x)=x^2-6x+a \Rightarrow f'(x)=2x-6$

Igualando a cero: $2x-6=0 \Rightarrow x=3$

$f''(x)=2 \Rightarrow f''(3)>0$

La función tiene un mínimo relativo en el punto $(3,-1)$, luego este punto debe verificar la función: $-1=9-18+a \Rightarrow a=8$

4. Queda:

La función $f(x)=-x^2+bx+c$ tiene un máximo relativo en el punto (0, 4), por tanto:

a) $f(0)=4 \Rightarrow 4=c$

b) $f'(0)=0; f'(x)=-2x+b \Rightarrow b=0$

Luego c = 4; b = 0.

5. Queda:

Que la función $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene un mínimo relativo en el punto $(6,-12)$ significa que:

a) $f(6)=-12 \Rightarrow -12=36a+6b+c$

b) $f'(6)=0; f'(x)=2ax+b \Rightarrow 0=12a+b$

Como se anula para $x=8 \Rightarrow 64a+8b+c=0$. Resolviendo el sistema, obtenemos *a*, *b*, *c*.

$$\left.\begin{aligned} 12a+b&=0 \\ 36a+6b+c&=-12 \\ 64a+8b+c&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a&=3 \\ b&=-36 \\ c&=96 \end{aligned}$$

6. La solución es:

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \quad ; \quad f'(x)=3x^2+2ax+b$

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos el sistema:

$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ -2a+b=-3 \\ b=0 \end{cases}$ de aquí obtenemos $a=3/2$; $b=0$; $c=-5/2$

7. La solución es:

   El vértice de la función $f(x)=ax^2+bx+c$ es: $V\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

   $f'(x)=2ax+bx$

   $f(x)$ tiene extremo relativo en su vértice, pues su derivada primera se anula en el.

   $$f'\left(\frac{-b}{2a}\right)=2a\left(\frac{-b}{2a}\right)+b=0\Rightarrow \qquad f''(x)=2a\Rightarrow\begin{cases}f''(x)>0 & \text{si } a>0\\ f''(x)<0 & \text{si } a<0\end{cases}$$

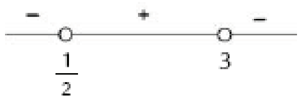
   Por tanto, si a > 0, entonces la función presenta un mínimo en el vértice y si a < 0 presenta un máximo en el vértice.

8. Estudiamos el signo de la derivada primera para ver el crecimiento de la función:

   $$f'(x)=\frac{(4x-3)\,e^x-e^x\,(2x^2-3x)}{e^{2x}}=\frac{-2x^2+7x-3}{e^x}$$

   Como el denominador es siempre positivo, estudiamos el signo del numerador:

   $$-2x^2+7x-3=0\Rightarrow x_1=3;\ x_2=\frac{1}{2}$$

   $f(x)$ es estrictamente creciente en $\left(\frac{1}{2},3\right)$

   $f(x)$ es estrictamente decreciente en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(3,+\infty)$

   Los extremos relativos son $x_1=\frac{1}{2}, x_2=3$. Para ver si son máximos o mínimos relativos hallamos la derivada segunda $f''(x)=\frac{2x^2-11x+10}{e^x}$

   $f''(3)=<0\Rightarrow f(x)$ Tiene máximo relativo en el punto $\left(3,\frac{9}{e^3},\right)$.

   $f''\left(\frac{1}{2}\right)>0\Rightarrow f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{e^{1/2}}\right)$

9. La tabla queda:

Funciones	Cóncava	Convexa	Punto de inflexión
$f(x)=2x^3-9x^2$	$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$	$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},\frac{-27}{2}\right)$
$f(x)=\sqrt{x^2+4}$	$\mathbb{R}$		No existe
$f(x)=\frac{2}{x}$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)$	No existe
$f(x)=x\cdot e^{-2x}$	$(1,+\infty)$	$(-\infty,1)$	$(1, e^{-2})$
$f(x)=x^4-12x^2+8$	$\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$	$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2},-12\right)\cup\left(-\sqrt{2},-12\right)$
$f(x)=\ln(x+4)$		$(-4,+\infty)$	No existe

10. La solución es:

$$f'(x)=2\cos 2x \Rightarrow 2\cos 2x=0 \Rightarrow \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f''(x)=-4\,\text{sen}\,2x$$

$f(x)$ tiene máximo relativo en todos los puntos de abscisa $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$

$$f''(x)=-4\,\text{sen}\,2x=0 \Rightarrow \text{sen}\,2x=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0+2\pi k \Rightarrow x=0+\pi k;\ k\in\mathbb{Z} \\ 2x=\pi+2\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k;\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f''(x)=-8\cos 2x$$

Como $f'''(0+\pi k)\neq 0$ y $f'''(\frac{\pi}{2}+\pi k)\neq 0$ entonces la función $f(x)$ tiene como punto de inflexión en todos los puntos de abscisa $x=0+\pi k$ y $x=0+\frac{\pi}{2}k$.

11. La solución:

$$f(x)=\frac{e^x}{x^2+k}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\,(x^2-2x+k)}{(x^2+k)^2}$$

$e^x(x^2-2x+k)=0 \Rightarrow x^2-2x+k=0 \Rightarrow$ Para que exista una única solución se debe verificar que $k=1$ $\Rightarrow$ la solución única es $x=1$.

$$f'(x) = \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^x (x-1)(x^3 - 3x^2 + 5x + 1)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow f''(1) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{e^x (x^6 - 6x^5 + 21x^4 - 36x^3 + 15x^2 + 18x - 5)}{(x^2+1)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(1) > 0$$

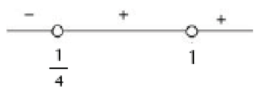
Por tanto, en x = 1 no hay ni máximo ni mínimo relativo.

12. La solución es:

La función es $f(x)=x(x-1)^3$ y su derivada $f'(x)=(x-1)^2(4x-1)$

a) Estudiamos el signo de $f'(x)$:

$$f'(x)=0 \Rightarrow (x-1)^2(4x-1)=0 \Rightarrow x=1;\ x=\frac{1}{4}$$



$$f'(0)<0 \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right)>0 \qquad f'(2)>0$$

$f(x)$ es creciente en $\left(\frac{1}{4},1\right)\cup(1,+\infty)$ y f es estrictamente decreciente en $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$

b) Respecto a los extremos.

$$f'(x)=(x-1)^2(4x-1)\ ;\ (x-1)^2(4x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=1\ ;\ x_2=\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f''(x)=(x-1)(12x-6)$$

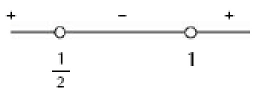
$$f''(1)=0$$

$$f''\left(\frac{1}{4}\right)>0$$

$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{4},\frac{-27}{256}\right)$

c) Para ver la curvatura estudiamos el signo de la derivada segunda:

$f''(x)=(x-1)(12x-6)$; igualando a cero: $x=1; x=1/2$



$$f''(0)>0 \qquad f''\left(\frac{3}{4}\right)<0 \qquad f''(2)>0$$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ y f es cóncava hacia abajo en $\left(\frac{1}{2},1\right)$

d) Los puntos de inflexión vienen dados:

$$f''(x)=(x-1)(12x-6)\ ;\ (x-1)(12x-6)=0$$

$$\Rightarrow x_1=1 \qquad x_2=\frac{1}{2}$$

$$f'''(x)=24x-18$$

$f'''\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0 \Rightarrow$ f tiene dos puntos de inflexión en

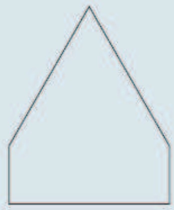
$\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{16}\right)$ y (1, 0).

PÁGINA 309

■ 13. Descompón el número 48 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

■ 14. Halla el número positivo cuya suma, con 4 veces su recíproco, sea mínima.

■ 15. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio.



■ 16. Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero, como indica la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6,6 m, halla sus dimensiones para que su superficie sea máxima.

■ 17. De todos los rectángulos de diagonal igual a 1, halla las dimensiones del de área máxima.

■ 18. Se quieren construir botes de enlatar de forma cilíndrica con 10 litros de capacidad. Calcula sus dimensiones si se desea que el gasto de material sea mínimo.

■ 19. Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50 % más caro.

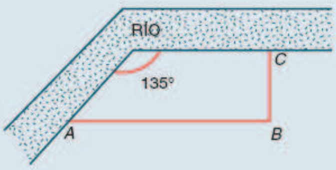
Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

■ 20. Halla las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de ortoedro sabiendo que el volumen ha de ser de 9 m^3, su altura 1 m y el coste de construcción por m^2 es de 30 euros para la base, 35 euros para la tapa y 20 euros para cada pared lateral.

■ 21. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtén, razonadamente, las dimensiones que minimizan la superficie de papel.

■ 22. Divide un segmento de 6 cm de longitud en dos partes tales que sea mínima la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas.

■ 23. Se desea construir un jardín, limitado en dos lados por un río que forma un codo de 135° y los otros dos lados por una valla *ABC* de 1,2 km de longitud. Halla las dimensiones del jardín de área máxima.



■ 24. En un jardín existe un paseo cerrado que consta de media circunferencia de radio 10 m y de su diámetro correspondiente. En el interior de la figura anterior se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. El parterre se plantará de camelias, que ocupan 0,25 m^2 cada una. ¿Cuál es el número máximo de plantas que pueden ubicarse?

13. Sean x y 48 – x los numero que hemos de buscar. La función a optimizar es $S(x)=5x^2+6(48-x)^2 \Rightarrow S(x)=11x^2-576x+13\,824$

$$S'(x) = 22x - 576 \Rightarrow 22x - 576 = 0 \Rightarrow x = \frac{288}{11}$$

$$S''(x) = 22 \Rightarrow S''\left(\frac{288}{11}\right) > 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{288}{11}$$

La función S(x) presenta un mínimo.

Los números buscados son: $\frac{288}{11}$ y $\frac{240}{11}$.

14. La función a optimizar es:

$$S(x) = x + \frac{4}{x} = \frac{x^2+4}{x}$$

$$S'(x) = \frac{x^2-4}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -2$$

$$S''(x) = \frac{8}{x^3} \Rightarrow S''(2) > 0 \text{ y } S''(-2) < 0$$

La función s(x) presenta un mínimo en x= 2
El numero buscado es x = 2.

15. El área es:

Como $x^2+y^2=1600 \Rightarrow y=\sqrt{1600-x^2}$

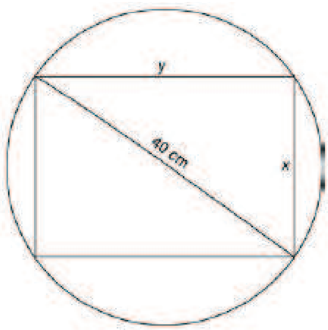
$$\Rightarrow A(x) = x\sqrt{1\,600 - x^2} = \sqrt{1\,600\,x^2 - x^4}$$

$$A'(x) = \frac{3\,200\,x - 4x^3}{2\sqrt{1\,600\,x^2 - x^4}} = \frac{1\,600 - 2x^2}{\sqrt{1\,600 - x^2}}$$

$$1\,600 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 20\sqrt{2}$$

$$A''(x) = \frac{2x^3 - 4\,800\,x}{(1\,600 - x^2)\sqrt{1\,600 - x^2}}$$

$$A''(20\sqrt{2}) < 0 \text{ y } A''(-20\sqrt{2}) > 0$$



La función a optimizar es $A = x \cdot y$

La función A(x) es máxima para $x=20\sqrt{2}$ e $y=20\sqrt{2}$. Por lo cual, el rectángulo de área máxima es un cuadrado.

16. La función a optimizar es:

$$A = x \cdot y + \frac{y \cdot y\sqrt{3}}{4}$$

Como $2x + 3y = 6,6 \Rightarrow x = \frac{6,6 - 3y}{2}$

La función a optimizar en una sola variable es:

$$A(y) = \frac{6,6y - 3y^2}{2} + \frac{\sqrt{3}\, y^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(y) = \frac{13,2y - 6y^2 + \sqrt{3}\, y^2}{4}$$

$$A'(y) = \frac{13,2 - 12y + 2\sqrt{3}y}{4} \Rightarrow 13,2 - 12y + 2\sqrt{3}y =$$

$$= 0 \Rightarrow y = \frac{13,2}{12 - 2\sqrt{3}} = 1,5 \text{ m}$$

$$A''(y) = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A''(1,5) < 0$$

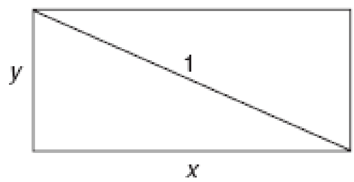
Luego la superficie es máxima para $y = 1,5\, m$ $x = 1,05\, m$.

La ventana es un rectángulo de base 1, 5 m y altura 1, 05 m y un triangulo equilátero de lado 1, 5 m.

17. El área es:

La función a maximizar es $A = xy$.

Al ser $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$



La función a optimizar en una sola variable es:

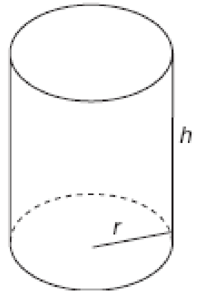
$$A(x) = x\sqrt{1 - x^2} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$$

$$A'(x) = \frac{2 - 4x^2}{2\sqrt{1 - x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 4x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{y} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La única solución con sentido es $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Para este valor la altura y vale $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

18. Sea r el radio de la base del cilindro y h su altura. La función a optimizar es:



$A = 2\pi r^2 + 2\pi h$

La relación entre las variables es $\pi r^2 h = 10$ o $h = \dfrac{10}{\pi r^2}$

La función a minimizar expresada en una única variable es:

$$A = 2\pi r^2 + \frac{20}{r}$$

Derivando obtenemos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{20}{r^2} \qquad A''(r) = 4\pi + \frac{40}{r^3}$$

$$A'(r) = 0 \;\Rightarrow\; 4\pi r^3 - 20 = 0 \;\Rightarrow\; r^3 = \frac{5}{\pi} \;\Rightarrow\; r = 1{,}17$$

$$A''(1{,}17) = 28{,}8 > 0$$

Las dimensiones del bote de enlatar de material mínimo en las condiciones dadas son:
Radio = 1, 17 dm   y altura = 2, 33 dm

19. La solución es:

Sea x la medida del lado de la base e y la medida de la altura lateral.
La función a minimizar es $f(x, y) = x^2 + 1{,}5x^2 + 4xy$

La relación entre variables es $x^2 y = 80$ es decir, $y = \dfrac{80}{x^2}$.

La función a optimizar expresada en una única variable es:

$$f(x) = 2{,}5x^2 + \frac{320}{x}$$

Derivando, obtenemos:

$$f'(x) = 5x - \frac{320}{x^2} \qquad f''(x) = 5 + \frac{640}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 5x^3 - 320 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = 64 \;\Rightarrow\; x = 4$$

$$f''(4) = 15 > 0$$

Las dimensiones del envase son:
Lado de la base = 4 cm
Altura lateral = 5 cm

20. Sean x e y las medidas de la base. La función a optimizar es:

$$f(x, y) = 30xy + 35xy + 40(x + y)$$

La relación entre las variables es $xy = 9$, es decir, $y = \frac{9}{x}$

La función a minimizar expresada en función de una única variable es:

$$f(x) = 585 + 40\,x + \frac{360}{x}$$

Derivando, obtenemos:

$$f'(x) = 40 - \frac{360}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{720}{x^3}$$

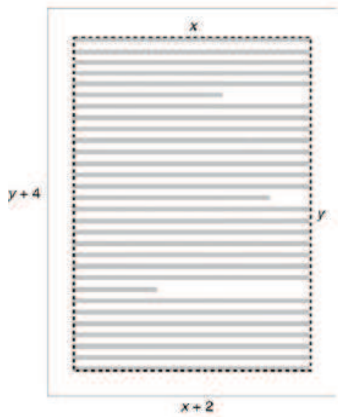
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 40x^2 - 360 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = -3 \ \text{y} \ x = 3$$

$$f''(3) = \frac{720}{27} > 0$$

Para x = 3 obtenemos un mínimo.
Las dimensiones del contenedor de coste mínimo son x = 3 m e y = 3 m.

21. El problema queda:



Llamando *x*, *y* a las dimensiones del texto impreso, obtenemos que la función de optimización buscada es:

$$S = (y + 4)\,(x + 2) = xy + 2y + 4x + 8$$

Expresando esta función en una sola variable mediante:

$$x \cdot y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}$$

$$S(x) = 18 + \frac{36}{x} + 4x + 8 \Rightarrow S(x) = \frac{4x^2 + 26x + 36}{x}$$

$$S'(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2} \Rightarrow \frac{4x^2 - 36}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

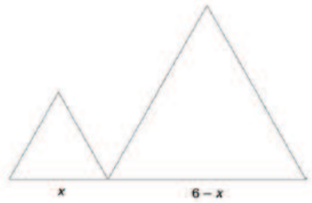
$$S''(x) = \frac{72}{x^3} \ \text{y} \ S''(3) > 0$$

Por tanto, la superficie de la hoja es mínima para x = 3 cm y = 6 cm, es decir, la hoja tendrá por dimensiones:

$x + 2 = 5$ cm de anchura

$y + 4 = 10$ cm de altura.

22. La solución es:



Llamando x a una de las partes, la otra tendrá por longitud 6 – x.

La altura de un triangulo equilátero de lado l unidades viene dada por: $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ unidades.

La función a optimizar es:

$$S(x) = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{(6-x) \cdot \frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}}{2} =$$

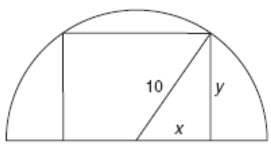
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 12x + 36)$$

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(4x - 12) \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

$$S''(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3} \Rightarrow S''(3) > 0$$

Por tanto, la función se hace mínima para x = 3 cm.
Luego el segmento dado se divide en dos partes iguales de longitud 3 cm cada una de ellas.

23. La solución es:



Sea x la longitud de la mitad de la base del parterre e y la longitud de su altura.
Debe ser máxima el área el área del parterre, es decir, la función:
$A = 2xy$

La relación entre las variables es $x^2 + y^2 = 100$ o $y = \sqrt{100 - x^2}$

La función a maximizar expresada en términos de una única variable es:

$A(x)=2x\sqrt{100-x^2}$ que derivando: $A'(x)=\dfrac{200-4x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

$$A''(x) = \frac{4x^3 - 600x}{(100-x^2)\cdot\sqrt{100-x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 200 - 4x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{50},\ x = \sqrt{50}$$

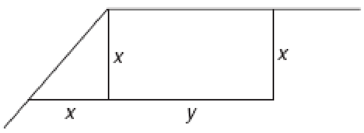
$$A''(\sqrt{50}) = -8 < 0$$

Para $x=\sqrt{50}$ m existe un máximo.

Las dimensiones que hacen máximo el parterre son $x=2\sqrt{50}$ m e $y=\sqrt{50}$ m; el área máxima vale 100 m^2 .

En esta superficie puede plantearse $100:0,25=400$ camelias.

24. La solución es:



Sea x e y las longitudes de los segmentos que aparecen en el dibujo.
El área del jardín será:

$$A = \frac{1}{2}x^2 + xy$$

La relación entre las variables es $2x+y=1,2$.

La función a maximizar expresada en términos de una variable es:

$$A = \frac{1}{2}x^2 + x(1,2-2x) \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{3}{2}x^2 + 1,2x$$

Derivando:

$$A'(x) = -3x + 1,2$$
$$A''(x) = -3$$

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x + 1,2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,4$$

Para x = 0,4 la función tiene un máximo.

Las dimensiones del jardín de área máxima son 0, 4 km para el lado más corto y 0, 8 km para el lado más largo.

PÁGINA 310

ACTIVIDADES FINALES

25. Comprueba que la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ verifica el teorema de Rolle en el intervalo [0, 1].

26. Estudia la derivabilidad de la función $1 - \sqrt[3]{x^2}$ y analiza si la función verifica las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [–1, 1].

27. Consideramos la función $f(x) = e^x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^7 \operatorname{sen}^3 x$. Prueba que existe, al menos, un número real x_0, con $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$ tal que $f'(x_0) = 0$.

28. Se considera la función $f(x) = x^{2/3}$. ¿Existe un intervalo $[a, b]$ en el que se pueda aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)$? Justifica la respuesta.

29. Consideramos la función f definida en el intervalo cerrado [0, 2] y dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a, b y c para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en dicho intervalo. Halla el valor o los valores de x a los que se refiere el teorema.

30. Halla el valor de a para el cual se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$. Encuentra el valor de c que indica el teorema.

31. Demuestra que la ecuación $x^3 + x^2 + x = 2$ tiene una única solución en (–1, 1).

32. Prueba que las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^{-x}$, se cortan en un único punto en el intervalo (0, 1).

33. Aplica el teorema de Cauchy a las siguientes funciones en los intervalos indicados:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ en [–1, 1].

b) $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^x + 2$ en [0, 2].

34. Estudia si se puede aplicar el teorema de Lagrange a las siguientes funciones en los intervalos dados y, cuando sea posible, halla el valor de c que da el teorema:

a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 10$ en [2, 5].

b) $f(x) = \sqrt[5]{x^2} - 2$ en [–1, 1].

35. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } -2 \le x \le -1 \\ (x^2 - 3)/2 & \text{si } -1 < x \le 0 \end{cases}$:

a) Prueba que $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [–2, 0].

b) Determina los puntos cuya existencia afirma dicho teorema.

36. Halla los valores de $x \in [0, 2\pi]$ en los que la función $f(x) = e^x \cdot \cos x$ presenta extremos relativos y/o puntos de inflexión.

25. La función $f(x)$ es continua en [0, 1] por ser una función polinómica.

La función $f(x)$ es derivable en [0, 1] al ser una función polinómica.

Además se cumple:

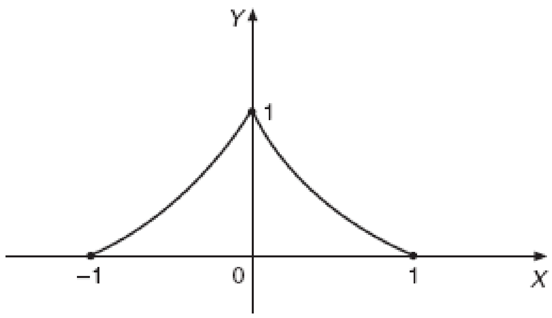
$f(0)=1$ y $f(1)=1$

El valor del interior del intervalo (0, 1) que anula la derivada de la función $f(x)$ es $c=\frac{1}{3}$.

26. La función no es derivable en todos los puntos del intervalo (- 1, 1) al no ser derivable en el punto x = 0.

En el origen se cumple $f'(0)=\infty$ y por tanto, no se verifican todas las hipótesis del teorema de Rolle.

La grafica de la función en el intervalo [- 1, 1] es la siguiente:



27. La función $f(x)$ del enunciado cumple las hipótesis del teorema de Rolle al ser:

– Continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

– Derivable en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

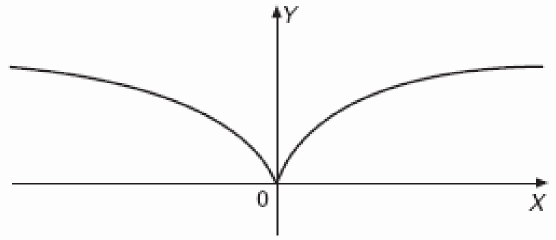
– $f(0) = 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

La tesis del citado teorema nos asegura la existencia de $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ cumpliendo $f'(x_0) = 0$.

28. No existe el citado intervalo, ya que :

- La función es par $f(-x) = f(x)$.
- La función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.
- La derivada en el origen no existe al ser $f'(0) = \infty$.

Todo ello puede verse en la gráfica:



29. La función tiene que ser continua en x = 1 y deberá cumplirse:

$-10 = a + b + c$

La función tiene que ser derivable en x = 1 y se cumplirá:

$-9 = 2a + b$

Se cumplirá: $f(0) = f(2)$; es decir, $1 = 4a + 2b + c$.

La solución del sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = -10 \\ 2a + b = -9 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \quad \text{es} \quad \begin{cases} a = 20 \\ b = -49 \\ c = 19 \end{cases}$$

El valor al que se refiere el teorema es $c = 49/40 \in (0,2)$ en el cual $f'\left(\frac{49}{40}\right) = 0$.

30. La función f(x) ha de ser continua en el intervalo dado. Veamos su continuidad en x=0:

$f(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^2 + ax\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} (1 - \cos x) = 0$. Por tanto la función es continua en el intervalo dado para cualquier valor de *a*.

La función ha de ser derivable en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$

$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & si \quad x < 0 \\ 2x + a & si \quad x > 0 \end{cases}$ $\quad f'_-(0) = 0$; $f'_+(0) = a$

Para que sea derivable en x=0 ha de ser a = 0.

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y f(1) = 1 coinciden las ordenadas en los extremos del intervalo.

Luego la función dada verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$.

Entonces existe al menos un valor en ese intervalo en el que la derivada de la función dada se anula y el valor es c = 0

31. Consideremos la función $f(x)=x^3+x^2+x-2$. Esta función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo [-1,1], luego existe al menos un valor c en el intervalo (-1,1) en el cual la función se nula.

    Como $f'(x)=3x^2+2x+1$ esta función f(x) es estrictamente creciente en el intervalo dado por lo tanto la solución c es única.

32. Consideremos la función $h(x)=x^2-e^{-x}$. Esta función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo [0,1], luego existe al menos un valor *c* en el intervalo (0,1) en el cual la función se nula.

    Como $h'(x)=2x+e^{-x}$ esta función *h(x)* es estrictamente creciente en el intervalo dado por lo tanto la solución *c* es única.

33. En cada caso:

    a) Las funciones f(x) y g(x) verifican las hipótesis del teorema de Cauchy en el intervalo dado puesto que: son funciones continuas en [-1,1], derivables en (-1,1) y no anulan a la vez sus derivadas. Por tanto aplicando el teorema de Cauchy tenemos que $\exists\, c \in (-1,1)$ tal que:

    $$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} \quad \text{es decir} \quad \frac{2c-2}{3c^2-14c+20}=\frac{-2}{21} \quad ; \quad c = 0{,}14$$

    b) Las funciones f(x) y g(x) verifican las hipótesis del teorema de Cauchy en el intervalo dado puesto que: son funciones continuas en [0, 2], derivables en (0, 2) y no anulan a la vez sus derivadas. Por tanto aplicando el teorema de Cauchy tenemos que $\exists\, c \in (0,2)$ tal que:

    $$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)} \quad \text{es decir} \quad \frac{2e^{2c}}{e^c}=\frac{e^4-1}{e^2-1} \quad ; \quad c = 1{,}434$$

34. La solución en cada caso:

    a) La función f(x) verifica las hipótesis del teorema de Lagrange puesto que es continua en el intervalo dado y es derivable en (2,5). Por tanto $\exists\, c \in (2,5)$ tal que $f'(c)=\frac{f(5)-f(2)}{3}$ es decir c = 3,5.

    b) La función f(x) no verifica las hipótesis del teorema de Lagrange ya que no es derivable en x = 0, por tanto no es derivable en (-1, 1).

35. En cada caso:

a) la función es continua en el intervalo [- 2, 0] al estar formada por dos funciones polinómicas y cumplirse:

$$\lim_{x \to -1^-} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 3}{2} = -1.$$

La función es derivable en el intervalo (- 2, 0) al cumplirse:

$$f'(-1^-) = -1 \quad \text{y} \quad f'(-1^+) = -1.$$

b) Los puntos cuya existencia afirma el teorema son:

$$f'(c) = -\frac{-\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{0 - (-2)} \quad \Rightarrow \quad f'(c) = -\frac{1}{2}$$

Por tanto los puntos buscados son $-\frac{1}{2}$ y $-\sqrt{2}$.

36. En cuanto a esta función:

Esta función tiene un máximo relativo en $x=\frac{\pi}{4}$, un mínimo relativo en $x=\frac{5\pi}{4}$ y dos puntos de inflexión en $x=0$ y $x=\pi$.

PÁGINA 311

37. Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Lagrange a la siguiente función, en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1)^2 + a & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ bx^2 - 6x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

38. Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = \ln x - 1$ en el que la recta tangente sea paralela a la secante que pasa por los puntos $A(1, -1)$ y $B(e, 0)$.

39. Como aplicación del teorema de Lagrange demuestra que si una función $y = f(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) = 0$ en todos los puntos del intervalo (a, b), entonces la función $y = f(x)$ es constante en el intervalo $[a, b]$.

40. Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en $[0, 5]$ existe un c tal que $f'(c) = 8$.

41. Demuestra que $e^x \geq 1 + x$ con $x \geq 0$.

42. Prueba que si $x > 0$, se cumple: $\dfrac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$.

43. Haciendo uso del teorema de Lagrange demuestra que $\cos b - \cos a < b - a$.

44. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} [x^2 - 2x]^{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right]$

d) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \left[\dfrac{2}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{2}{\pi - x}\right]$

e) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2x)\ln x$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^x$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\sqrt[x]{b} - 1\right]$

h) $\lim\limits_{x \to 1^+} [x - 1] \cdot \operatorname{tg}\left[\dfrac{\pi x}{2}\right]$

i) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\ln(2 - e^x)}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} [\operatorname{tg} x]^{\cos x}$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{a^x + b^x}{2}\right]^{\frac{1}{x}}$, $a > 1$ y $b > 1$

n) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left[\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1}\right]$

ñ) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + x)^{\frac{2}{\operatorname{sen} x}}$

45. Halla a y b de modo que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{bx^3 + ax} = 4$$

46. Halla b, c y d en la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un punto de inflexión en $(1, -3)$ y la recta tangente en el punto de abscisa 0 tenga por pendiente 3.

37. La solución es:

- f(x) ha de ser continua en el intervalo dado. Para ello observamos que es continua por la derecha en x = 3/2 , por la izquierda en x = 3 y falta ver que sea continua en x = 2 que es el punto del intervalo en el que cambia de definición.

  f(2) = a ; $\underset{x\to 2^+}{lím}\left(bx^2-6x\right)=4b-12$; $\underset{x\to 2^-}{lím}\left(\ln(x-1)^2+a\right)=a$

  Por tanto se tiene que cumplir que 4b – 12 = a.

- f(x) ha de ser derivable en el intervalo (3/2, 3).

  $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-1} & si \quad 1<x<2\\ 2bx-6 & si \quad 2<x<4\end{cases}$$ $f'_-(2) = 1$; $f'_+(2) = 4b - 6$

  Por tanto debe ser b=7/4 y a = -5

38. Se debe verificar que $f'(x)=\dfrac{1}{e-1}$ luego el punto buscado es (e-1, ln(e-1) – 1).

39. La función f(x) dada verifica las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo [a, b] por tanto aplicando este teorema tenemos:

    $\exists\, c\in(a,b)$ De modo que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y como esta expresión es nula tenemos que f(a) = f(b) por tanto la función es constante en el intervalo dado.

40. Teniendo en cuenta el teorema del valor medio se cumplirá:

    $$f'(c)=\frac{f(5)-f(0)}{5-0} \quad\Rightarrow\quad 8=\frac{f(5)-3}{5} \quad\Rightarrow\quad f(5)=43.$$

41. Aplicamos el teorema de Lagrange a la función f(x) = e^x en el intervalo (0, x). Esta función f(x) es continua en el intervalo [0, x] y derivable en (0, x) por lo tanto $\exists\, c\in(0,x)$ de modo que $e^c=\dfrac{e^x-1}{x}$. Como c > 0 , $e^c > 1$ de donde $\dfrac{e^x-1}{x}>1$

    Por tanto de aquí deducimos que $e^x > x + 1$ esto para x>0. La igualdad es evidente que se cumple para x = 0.

42. Aplicamos el teorema de Lagrange a la función f(x) = ln(x + 1) en el intervalo (0, x). Esta función f(x) es continua en el intervalo [0, x] y derivable en (0, x) por lo tanto $\exists\, c \in (0, x)$ de modo que $\dfrac{1}{c+1} = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Como c > 0 entonces 1+c > 1 y $\dfrac{1}{1+c} < 1$ de donde $\dfrac{\ln(x+1)}{x} < 1$ es decir que ln(x+1)<x

Por otro lado c < x entonces 1+c < 1+x y $\dfrac{1}{1+c} < \dfrac{1}{1+x}$ de donde $\dfrac{1}{1+x} < \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ es decir que ln(x + 1) > $\dfrac{x}{1+x}$. De este modo tenemos demostrada la desigualdad para x > 0.

43. Aplicamos el teorema de Lagrange a la función f(x) = cos x en el intervalo (a, b).
Esta función f(x) es continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) por lo tanto $\exists\, c \in (a, b)$ de modo que $-senc = \dfrac{\cos b - \cos a}{b-a} < 1$ de donde se deduce la desigualdad buscada.

44. Los límites quedan:

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{x - sen\, x}{x^3} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$
$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{6x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

b) $$\lim_{x \to 0} (x^2 - 2x)^{x^2} \overset{(0^0)}{\Rightarrow} \text{Haciendo } M = \lim_{x \to 0} (x^2 - 2x)^{x^2}$$

y tomando logaritmos, obtenemos:

$$\ln M = \ln \left[\lim_{x \to 0} (x^2 - 2x)^{x^2} \right] = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \ln (x^2 - 2x) \overset{(0 \cdot \infty)}{=}$$

$$\overset{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\ln (x^2 - 2x)}{\frac{1}{x^2}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x - 2}{x^2 - 2x}}{\frac{-2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\ (x - 1) \cdot x^3}{2x\ (x - 2)} = 0$$

Por tanto, $\ln M = 0 \Rightarrow M = \lim_{x \to 0} (x^2 - 2x)^{x^2} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right] \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x\,e^x - x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + x\,e^x - 1} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x}{2e^x + x\,e^x} = \frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \left(\frac{2}{\text{sen } x} - \frac{2}{\pi - x} \right) \overset{\infty-\infty}{=}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{2\pi - 2x - 2\,\text{sen } x}{(\pi - x) \cdot \text{sen } x} =$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{-2 - 2\cos x}{-\text{sen } x + (\pi - x)\cos x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{2\,\text{sen } x}{-\cos x - \cos x - (\pi - x)\,\text{sen } x} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 - 2x\right)\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2 - 2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x^2 - 2x\right)^2}{2x - 2x^2} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{x} \right) \right]^x \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right]}$

Calculamos el límite del exponente aparte:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\cos\left(\frac{1}{x} \right) - 1 \right] \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

Por tanto, el límite pedido vale:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{x} \right) \right]^x = e^0 = 1$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,[\sqrt[x]{b} - 1] = \lim\limits_{x \to +\infty} x\,[b^{1/x} - 1] \overset{\infty \cdot 0}{=}$

$$\overset{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{b^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{b^{1/x} \cdot \ln b \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \ln b$$

h) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) \cdot tg\left(\frac{\pi x}{2}\right) \overset{0 - \infty}{=}$

$$\overset{0 - \infty}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1) \cdot sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 1^+} \frac{sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) + (x-1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{-\frac{\pi}{2} \cdot sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}$$

i) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\ln(2 - e_x)}$

Este límite presenta la indeterminación 0^0. Resolveremos esta indeterminación tomando logaritmos neperianos:

$$M = \lim_{x \to 0^+} x^{\ln(2-e^x)} \Rightarrow \ln M = \ln\left[\lim_{x \to 0^+} x^{\ln(2-e^x)}\right]:$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \ln(2 - e^x) \cdot \ln x \overset{0 \cdot \infty}{=}$$

$$\overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(2 - e^x)}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{(2 - e^x)\ln^2(2 - e^x)}{x \cdot e^x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{-e^x \ln^2(2 - e^x) - 2\,e^x \ln(2 - e^x)}{e^x + x\,e^x} =$$

Por tanto: $\ln M = 0 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\ln(2-e^x)} = 1$

j) Llamamos a $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx} = M$ tomando logaritmos neperianos obtenemos:

$\ln M = \lim\limits_{x\to 0} \; tgx\cdot \ln\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\ln x}{\cot gx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2sen^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{4senx\cos x}{1} = 0$ de donde M=1

k) $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x - sen\, x}{x^3} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\, sen\, x - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-sen\, x}{3x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3} = \frac{-1}{3}$$

l) $$\lim_{x\to \pi^+/2} (tg\, x)^{\cos x} = \left(\infty^0\right) \Rightarrow \text{Llamando:}$$

$M = \lim\limits_{x\to\pi^+/2} (tg\, x)^{\cos x}$ y tomando logaritmos:

$$\ln M = \lim_{x\to\pi^+/2} \cos x\cdot \ln\,(tg\, x) \overset{(0\cdot\infty)}{=}$$

$$\overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to\pi^+/2}\frac{\ln\,(tg\, x)}{\dfrac{1}{\cos x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to\pi^+/2}\frac{\dfrac{1+tg^2 x}{tg\, x}}{\dfrac{sen\, x}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\pi^+/2}\frac{\cos x}{sen^2 x} = 0$$

Por tanto, $\ln M = 0 \Rightarrow M = \lim\limits_{x\to\pi^+/2} (tg\, x)^{\cos x} = 1$

m) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{(1^\infty)}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{a^x+b^x}{2-1}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\cdot\ln a + b^x\cdot\ln b}{2}} =$$

$$= e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{a\cdot b}$$

n) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \overset{\infty-\infty}{=}$

$\overset{\infty-\infty}{=} \quad \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \quad \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x \cdot \ln x + x - 1} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \quad \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x \cdot \ln x + 1 - 1} = \frac{1}{2}$

ñ) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + x)^{\frac{2}{senx}} = e^Z$; Z = $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2(\cos x + x - 1)}{senx} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2(-senx + 1)}{\cos x} = 2$

Por tanto el límite pedido vale e^2.

45. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen2x}{bx^3 + ax} = (\text{aplicando L´Hopital}) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\cos 2x}{3bx^2 + a} = \frac{2}{a}$ de modo que $a = 1/2$ y b cualquier número real.

46. La solución queda:

Las derivadas primera y segunda son: $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6x + 2b$

Por tanto como $f''(1) = 0$ obtenemos que $6 + 2b = 0$

Como $f(1) = -3$ obtenemos que $1 + b + c + d = -3$

Como $f'(0) = 3$ obtenemos que $c = 3$

De estas igualdades deducimos los valores buscados $b = -3$; $c = 3$; $d = -4$

PÁGINA 312

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

47. Estudia el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\ln x + 2}{x^2}$ y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

48. Estudia los intervalos de monotonía y los extremos de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Como aplicación, prueba que si $x > 0$, entonces $x^e \leq e^x$.

49. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos de $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

50. Estudia la concavidad de la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 3)$.

51. Determina un punto P de la curva $y = 12 - x^2$, con $x > 0$, de forma que el área del rectángulo determinado por los ejes y las rectas paralelas a ellos que pasan por P sea máxima.

52. Halla la ecuación de una recta que pase por el punto (3, 2) y corte los ejes coordenados determinando en el primer cuadrante un triángulo de área mínima.

53. Halla los puntos de la curva $y^2 = 8x$ cuya distancia al punto (6, 0) sea mínima.

54. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener un cono circular recto de 1 metro de generatriz? (Recuerda que el volumen de un cono es un tercio del área de la base por la altura).

55. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\operatorname{cosec} x}{2}}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{e^x - 1}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 - 3x + 2}$

56. Las gráficas que se muestran a continuación corresponden a una función f, a su derivada f' y a otra función g. Todas ellas están definidas en un mismo intervalo. Desafortunadamente, al componer el dibujo (en el que se muestran también los ejes), las gráficas han sido colocadas al azar.

Identifica de forma razonada cuál de ellas corresponde a f, cuál a f' y cuál a g.

(A) (B) (C)

57. Prueba que la ecuación $x^3 - 2x^2 + 3x = 3$ admite una solución y sólo una en (1, 2).

47. La solución:

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R}\ |x > 0\} = (0, +\infty)$$

Determinamos la monotonía estudiando el signo $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-2\ ln\ x - 3}{x^3}$$

$f(x)$ Es estrictamente creciente en $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ y estrictamente decreciente en $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

48. Queda:

- Determinamos la monotonía de $f(x)$ estudiando el signo de $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

$f(x)$ es estrictamente creciente en (0,e) y estrictamente decreciente en $(e, +\infty)$.

- Determinemos los extremos:

$$f'(x) = \frac{1 - ln\ x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - ln\ x = 0 \Rightarrow x = e$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot ln\ x - 3}{x^3};\ f''(e) < 0.$$

$f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

La función $f(x)$ solo está definida para x > 0 por la monotonía y la existencia de máximo en

$\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$, podemos escribir que $f(x) \le 1/e \Rightarrow ln\ x/x \le 1/e \Rightarrow e\ ln\ x \le x \Rightarrow$

$\Rightarrow ln\ x^e \le x \Rightarrow \boxed{x^e \le e^x}$

49. Queda:

$$f(x) = x^2 - 2\,|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ es:

Monótona creciente en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$

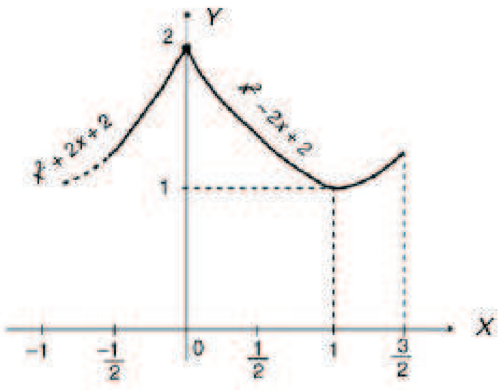
Monótona decreciente en $(0, 1)$

Tiene un mínimo relativo en $(1, 1)$, pues

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \; (x \geq 0)$

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(1) > 0 \Rightarrow$ Mínimo $(1, 1)$.

En x = 1 tiene un mínimo absoluto que vale 1 y en x = 0 un máximo absoluto que vale 2, como podemos ver a través de la grafica.



50. Para estudiar la concavidad de esta función vemos el signo de la derivada segunda.

$f'(x) = e^{-x}(-x^2 - 2x + 1)$

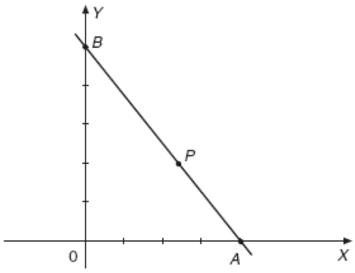
$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 3)$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba si $f''(x) > 0$, es decir en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(+\sqrt{3}, +\infty\right)$ y cóncava hacia abajo si $f''(x) < 0$, es decir, en $\left(-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\right)$.

51. El punto buscado es de la forma $\left(x, 12 - x^2\right)$

Área $= x \cdot (12 - x^2)$ esta función alcanza el máximo relativo en el punto $(2, 8)$.

52. La solución:



La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ y corta a los semiejes positivos es:

$$y-2=m(x-3) \quad \text{con} \quad m<0.$$

El área del triangulo de vértices OAB es:

$$A\left(\frac{3m-2}{m}, 0\right) \quad \text{y} \quad B(0, 2-3m)$$

Derivando :

$$A'(x)=\frac{-18m^2+8}{4m^2}=\frac{4-9m^2}{2m^2} \;;\; A''(x)=-\frac{4}{m^3}$$

$$A'(x)=0 \;\Rightarrow\; -18m^2+8=0 \;\Rightarrow\; m=\pm\frac{2}{3}$$

Para $m=-\frac{2}{3}$, $A''\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{27}{2}>0$ y existe un mínimo.

La ecuación de la recta buscada es:

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-3) \;\Leftrightarrow\; 2x+3y=12$$

53. Los puntos buscados serán de la forma $P(x,\pm\sqrt{8x})$

La función a optimizar es:

$$d(x)=\sqrt{(x-6)^2+(\pm\sqrt{8x}-0)^2}=\sqrt{x^2-4x+36}$$

$$d'(x)=\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}}=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+36}} \Rightarrow$$

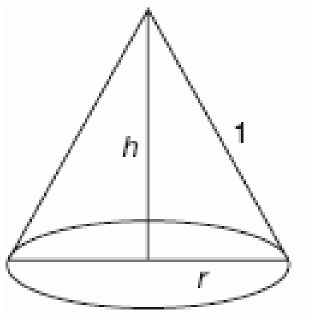
$$\Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$d''(x)=\frac{32}{(x^2-4x+36)\sqrt{x^2-4x+36}}$$

$$d''(2)>0$$

Por tanto, para x = 2 la distancia es mínima. Los puntos buscados son : $P(2,+4), Q(2,-4)$.

54. El volumen del cono de radio r y altura h es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



La relación del radio, la altura y la generatriz es:

$$r^2 + h^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 1 - h^2$$

La función a maximizar es:

$$V = \frac{1}{3}\pi(1 - h^2)\,h \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

Derivando:

$$V' = \frac{1}{3}\pi - \pi h^2 \qquad V'' = -2\pi h$$

$$V' = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi - \pi h^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ y } h = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para $h = \frac{\sqrt{3}}{3}, V''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -2\pi\frac{\sqrt{3}}{3} < 0$, la función presenta un máximo.

El cono de altura $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m y radio $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m tienen un volumen máximo de $\frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,403\,m^3$.

55. Los límites son:

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - sen\, x}{x - sen\, x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + tg^2x - \cos x}{1 - \cos x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2tg\, x\, (1 + tg^2x) + sen\, x}{sen\, x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\, (1 + tg^2x)}{\cos x} + 1 = 3$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + sen\, x)^{\frac{cosec\, x}{2}} \overset{(1^{\infty})}{=} e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{cosec\, x}{2}(1 + sen\, x - 1)} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\, x}{2 sen\, x}} = e^{1/2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{e^x - 1}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2x - 2}{xe^x - x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2}{e^x - xe^x - 1} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x}{2e^x + xe^x} = 1$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{3x} - 5x)^{1/x} \overset{(\infty^0)}{=} L$

Tomando logaritmos y operando:

$\ln L = \lim\limits_{x \to \infty} \ln (e^{3x} - 5x)^{1/x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln (e^{3x} - 5x)}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3e^{3x} - 5}{e^{3x} - 5x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{9e^{3x}}{3e^{3x} - 5} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}$

$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{27e^{3x}}{9e^{3x}} = 3.$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{sen\, (x - 1)}{x^2 - 3x + 2} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos\, (x - 1)}{2x - 3} = -1.$

56. En cada caso decimos:

La función f se corresponde con la grafica C.
La función f' se corresponde con la grafica A.
La grafica B queda para una cierta función *g*.

57. Sea la función $f(x)=x^3-2x^2+3x-3$, definida en el intervalo [1,2]. Cumple las hipótesis del teorema de Bolzano al ser continua y tomar los siguientes valores en los extremos:
$f(1)=-1$ y $f(2)=3$.
El teorema anterior nos asegura al menos una solución en el intervalo (1,2).
Existe solo una solución ya que la función $f(x)$ es siempre creciente al cumplirse:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 = 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}\right] > 0.$$