Unidad 5 – Geometría afín en el espacio

PÁGINA 107

cuestiones iniciales

1. Dada la recta del plano de ecuación $2x - 6y + 3 = 0$, escríbela en forma continua, paramétrica, vectorial y explícita.

2. Calcula el valor de a en la recta de ecuación $ax + 3y - 9 = 0$, para que:

a) Pase por el punto (3, 1).

b) Tenga de pendiente –1.

c) Uno de sus vectores directores sea $\vec{v} = (6, -4)$.

3. Estudia la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} 7x - 2y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x - 6y = -9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

4. Estudia la posición relativa, según los valores de a, de los pares de rectas:

a) $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + ay = ax \\ 3x + ay = ay \end{cases}$

SOLUCIONES

1. La recta $2x - 6y + 3 = 0$ pasa por el punto (0, 1/2) y un vector direccional es $\vec{v} = (3,1)$.
   Por tanto, las ecuaciones pedidas son:
   - Ecuación continua $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y - 1/2}{1}$
   - Ecuación paramétrica $\begin{cases} x = 3t \\ y = t + 1/2, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$
   - Ecuación vectorial $(x, y) = (0, 1/2) + t(3, 1)$, con $t \in \mathbb{R}$
   - Ecuación explícita $y = 1/3\ x + 1/2$

2. a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 2$

3. a) Las rectas se cortan en el punto (2, 1).
   b) Las rectas son paralelas.
   c) Las rectas son coincidentes.

4. a) Si $a=1$, las rectas son coincidentes.

   Si $a\neq1$, las rectas se cortan en el punto

$$\left(\frac{(a+1)(a^2+1)}{a^2+a+1}, -\frac{a}{a^2+a+1}\right)$$

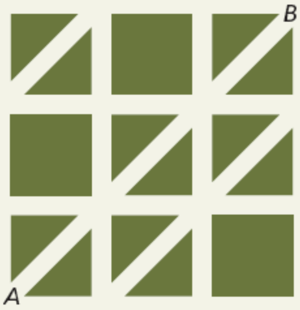
   b) Si $a=0$, las rectas son coincidentes.

   Si $a\neq0$, las retas se cortan en el (0, 0).

PÁGINA 121

ACTIVIDADES

■ Utiliza la estrategia de simplificar y/o particularizar en la resolución de los siguientes problemas:



1. **Sumas.** Demuestra: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 1001}=0{,}\widehat{498501}$
2. **Plano de ciudad.** La figura representa el plano de una ciudad. ¿De cuántas formas se puede ir desde A hasta B de manera que nunca retrocedamos?
3. **Trama triangular.** Resuelve el problema análogo al que figura en la página anterior, considerando que en este caso los triángulos equiláteros que debes contar son los que tienen el vértice hacia abajo.
4. **Primos.** Demuestra que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre un número múltiplo de 24.
5. **Tablero de ajedrez.** ¿Cuántos rectángulos de lados desiguales hay en un tablero de ajedrez?

SOLUCIONES

El término general de la sucesión formada por los sumandos es: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Descomponiendo este en fracciones simples obtenemos: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1/2}{2n-1}+\frac{-1/2}{2n+1}$

Aplicando esta igualdad a cada uno de los sumandos, obtenemos:

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1\cdot 3} & = & \frac{1/2}{1} & + & \frac{-1/2}{3} \\
\frac{1}{3\cdot 5} & = & \frac{1/2}{3} & + & \frac{-1/2}{5} \\
\frac{1}{5\cdot 7} & = & \frac{1/2}{5} & + & \frac{-1/2}{7} \\
\ldots & & \ldots & & \ldots \\
\frac{1}{997\cdot 999} & = & \frac{1/2}{997} & + & \frac{-1/2}{999} \\
\frac{1}{999\cdot 1001} & = & \frac{1/2}{999} & + & \frac{-1/2}{1001}
\end{array}
$$

Sumando todas estas igualdades, obtenemos:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{999\cdot 1001}=\frac{1/2}{1}+$$

$$+\frac{-1/2}{1001}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2002}=\frac{1000}{2002}=\frac{500}{1001}=0,\overset{\frown}{499500}$$

Fácilmente se comprueba la igualdad sin más que poner el numero decimal periódico puro dado en forma de fracción:

$$0,\overset{\frown}{499500}=\frac{499500}{999999}=\frac{500\cdot 27\cdot 37}{1001\cdot 27\cdot 37}=\frac{500}{1001}$$

Por tanto, la igualdad que plantea el problema es verdadera.

PÁGINA 126

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dados en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A(2, 3, 5)$ y $B(1, 0, 8)$, halla:
   a) Las componentes de los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.
   b) Dos puntos C y D tales que $\overrightarrow{CD}$ sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$.
   c) El extremo F de un vector fijo $\overrightarrow{EF}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo $E(-3, 6, -9)$.
   d) El origen G de un vector fijo $\overrightarrow{GH}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo $H(3, 2, 9)$.

2. Dados los vectores libres $\vec{u} = (5, -2, 3)$ y $\vec{v} = (-4, 2, 1)$:
   a) Dibuja un representante de cada uno de ellos y de su suma.
   b) ¿Cuál es el extremo de $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$ y $A(0, 2, 0)$?
   c) ¿Cuáles son las componentes de los vectores $2\vec{u}$ y $3\vec{u} - 5\vec{v}$?

3. Halla dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $(5, 3, 5) = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ y $(3, 2, 3) = \vec{u} + 2\vec{v}$.

4. Comprueba que son una base los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (1, 0, 2)$; $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 2, -3)$. Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{x} = (1, 1, 1)$ e $\vec{y} = (1, 2, 3)$ respecto de la base anterior.

5. Indica para qué valores de t los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$; $\vec{v} = (2, 2, t)$ y $\vec{w} = (t, 0, 0)$ no forman una base de $\mathbb{R}^3$.

6. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y tiene como vector direccional el vector $\vec{v} = (6, 5, 4)$. Obtén seis puntos que pertenezcan a dicha recta.

7. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $P(1, 1, 0)$ y $Q(1, 0, 1)$.

8. Estudia si los puntos $A(3, -4, 2)$, $B(1, 2, 3)$ y $C(-1, 4, 6)$ están alineados.

9. Expresa cada una de las siguientes rectas de todas las formas que conozcas:
   a) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$ b) $\begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

10. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta de ecuación $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{2} = -z$.

11. Halla la ecuación de los planos, en todas las formas que conozcas, determinados por las siguientes condiciones:
    a) Plano que pasa por el punto $P(2, -3, 5)$ y tiene como vectores direccionales a $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (3, -2, 1)$.
    b) Plano que pasa por los puntos $P(3, -1, 0)$ y $Q(1, -1, 3)$ y contiene el vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$.
    c) Plano que contiene los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 0, 2)$ y $C(2, -1, 0)$.

12. Escribe las ecuaciones paramétricas del plano: $3x - y + 2z = 10$.

13. Escribe la ecuación implícita o general del plano: $x = 3 - t$, $y = 2 + s$, $z = t + s$.

SOLUCIONES

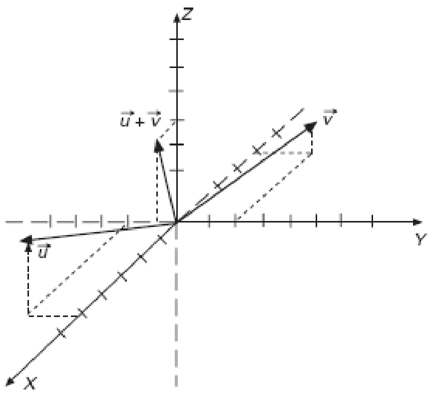
1. a) Los componentes de los vectores pedidos son:
$\vec{AB} = (-1, -3, 3)$ y $\vec{BA} = (1, 3, -3)$

b) Existen infinitas parejas de puntos C y D que cumplan la condición pedida. Por ejemplo, $C(0,0,0)$ y $D(-1,-3,3)$.

c) Sea $F(a,b,c)$, debe cumplirse: $(a+3, b-6, c+9) = (-1,-3,3)$. Luego $a=-4, b=3$ y $c=-6$.

d) Sea $G\,(a', b', c')$, debe cumplirse: $(3-a', 2-b', 9-c') = (-1,-3,3)$. Por tanto, $a'=4, b'=5, c'=6$.

2. a) El vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ el $\vec{u}+\vec{v}=(1,0,4)$. Un representante de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}+\vec{v}$ puede verse en el dibujo.



b) Las coordenadas de $\vec{AB} = \vec{u} - \vec{v}$ son: $\vec{AB} = (9, -4, 2)$
Llamando $B = (a, b, c)$, se tiene:
$(a-0, b-2, c-0) = (9, -4, 2)$.
Por tanto, $a = 9$, $b = -2$, $c = 2$.

c) Las coordenadas de los vectores bucados son:
$2\vec{u} = 2\,(5, -2, 3) = (10, -4, 6)$
$3\vec{u} - 5\vec{v} = 3(5, -2, 3) - 5\,(-4, 2, 1) =$
$= (15, -6, 9) - (20, 10, 5) = (35, -16, 4)$.

3. Resolvemos el sistema vectorial $\begin{cases} 2\vec{u}+3\vec{v}=(5,3,5) \\ \vec{u}+2\vec{v}=(3,2,3) \end{cases}$

Multiplicando la segunda ecuación por -2 y sumando a la primera se obtiene $\vec{v}=(1,1,1)$.

Con este vector sustituido en la segunda ecuación se obtiene $\vec{u}=(1,0,1)$.

Por tanto, los vectores buscados son $\vec{u}=(1,0,1)$ y $\vec{v}=(1,1,1)$.

4. Los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ forman una base, ya que el rango de la matriz formada por sus filas es tres, al ser:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

Las coordenadas del vector $\vec{x} = (1,1,1)$ respecto de la base anterior son los escalares *a*, *b* y *c*, que cumplen:

$$(1, 1, 1) = a\,(1, 0, 2) + b\,(-1, 1, 2) + c\,(0, 2, -3)$$

Operando y resolviendo el sistema resultante se obtiene: $a = 12/11$, $b = 1/11$, $c = 5/11$.

Análogamente, el vector $\vec{y} = (1,2,3)$ tiene las siguientes coordenadas respecto de la base anterior:

$$a = 19/11,\ b = 8/11 \text{ y } c = 7/11$$

5. El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{vmatrix}$ vale $t^2 - 2t$.

Si la expresión anterior es nula, los tres vectores no forman base de $\mathbb{R}^3$.
Por tanto, $t^2 - 2t = 0$, es decir, para t = 0 y t = 2.

6. Las distintas expresiones de la recta buscadas son:

- Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$
- Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{4}$
- Ecuación como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} 5x - 6y = -7 \\ 2x - 3z = -7 \end{cases}$$

En la ecuación paramétrica pueden obtenerse los puntos dando valores a *t*. Así,

- $t = 0$ $P_0 = (1, 2, 3)$
- $t = 1$ $P_1 = (7, 7, 7)$
- $t = 2$ $P_2 = (13, 12, 11)$
- $t = -1$ $P_4 = (-5, -3, -1)$
- $t = -2$ $P_5 = (-11, -8, -5)$
- $t = 3$ $P_6 = (19, 17, 15)$

7. La recta viene determinada por el punto $P(1,1,0)$ y el vector $\vec{v} = PQ = (0,-1,1)$.
Las ecuaciones de la citada recta son:

• Paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

• Intersección de planos

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ y + z = 1 \end{array}\right\}$$

8. La recta determinada por los puntos A y B tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-3}{-1}$$

Al sustituir las coordenadas del punto C en la recta anterior, se tiene:

$$\frac{-1-1}{2} \neq \frac{4-2}{-6} \neq \frac{6-3}{-1}$$

Por tanto los puntos no están alineados.

9. a) Ecuación paramétrica $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \quad t \in \Re \\ z = 4 + 3t \end{cases}$

Ecuación como intersección de dos planos:
$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - z = 2 \end{cases}$

b) Ecuación paramétrica $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -2 + 2t \\ z = t \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$

c) Ecuación continua: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$

Ecuación como intersección de dos planos: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$

10. Dos rectas paralelas tienen vectores directores iguales o proporcionales. La recta pedida tiene por ecuación $\frac{x}{-2}=\frac{y}{2}=-z$

11. La solución es:

a) La ecuación es: $0=\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=x+y-z+6$

b) El plano viene determinado por el punto $P(3, -1, 0)$ y los vectores $\vec{u} = \vec{PQ} = (-2, 0, 3)$ y $\vec{v} = (1, 2, 3)$. Su ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6x - 9y + 4z - 27$$

c) El plano viene determinado por el punto $A(1, 2, 3)$ y los vectores $\vec{u} = \vec{AB} = (-2, -2, -1)$ y $\vec{v} = \vec{AC} = (1, -3, -3)$. Su ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 3x - 7y + 8z - 13$$

12. Pueden ser: $\begin{cases} x= \\ y=-10+3t+2s \\ z=s \end{cases}$, con t y s$\in \Re$

13. La ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z - 1$$

PÁGINA 127

■ 14. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, -4, 0)$ y contiene la recta:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$$

■ 15. En cada uno de los siguientes apartados determina la ecuación del plano correspondiente:

a) Plano que pasa por los puntos $A(2, 1, 2)$ y $B(0, 1, -1)$, y es paralelo al eje OY.

b) Plano que contiene a las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = -1-t \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x+2y = 5 \\ z+1 = 0 \end{cases}$$

c) Plano que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralelo al plano $x - y + z = 4$.

■ 16. Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{7}$$

■ 17. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 0, -2)$ y es paralela a los planos: $x - y - 3z = 1$; $x - 3y + z = 5$.

■ 18. Estudia la posición relativa de los planos en cada uno de los siguientes apartados:

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x = 1 \end{cases}$

b) $\pi_1 \equiv x - 2y + z = 3$; $\pi_2 \equiv 2x + y = 4$; $\pi_3 \equiv 5y - 2z = -2$

c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -8 \\ 2x - y + z = 6 \\ 4x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$

■ 19. Determina, en cada caso, la posición relativa de la recta y el plano:

a) $\pi \equiv 3x - 2y + z = 3$ y $r \equiv \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=z+3$

b) $\pi \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t - 4s \\ y = -2 - t + 3s \\ z = 1 - t \end{cases}$ y $r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(2, 1, -4)$

■ 20. Estudia si las rectas $r: \begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$ se cortan, son paralelas o se cruzan.

Halla el plano que contiene a s y es paralelo a r.

■ 21. Estudia, según los valores de b, la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(-3, 1, b) \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+1}{3} = -y + 1 = z$$

■ 22. Sea m un número real; discute según los valores de m, la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2z = 2 - m$.

14. El plano tiene por ecuación $\begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 11x+2y-3z-14=0$.

15. a) El plano tiene por ecuación $\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3x-2z-2=0$

b) Las rectas dadas se cortan en el punto $(1,2,-1)$.el plano pedido tiene por ecuación $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+2y+3z-2=0$

c) Todos los planos paralelos al dado tienen por ecuación $x-y+z+D=0$,obligando a que pase por el punto (1, 0, 1) hallamos que $D=-2$ y el plano buscado tiene por ecuación $x-y+z-2=0$

16. Estas rectas son paralelas pues tiene vectores directores iguales o proporcionales. Para hallar la ecuación del plano que las contiene tomamos uno de los vectores y un punto de cada una de ellas, con lo que tenemos otro vector y un punto. El plano tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ -1 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 5x-4y+3z+2=0.$$

17. La recta paralela a estos planos estará en la intersección de dos planos paralelos a estos de la forma $\begin{cases} x-y-3z+D=0 \\ x-3y+z+K=0 \end{cases}$ hallamos las constantes D y K obligando a que pasen por el punto $(0,0,-2)$ y obtenemos la recta de ecuaciones: $\begin{cases} x-y-3z-6=0 \\ x-3y+z+2=0 \end{cases}$

18. a) Los planos se cortan dando una recta de ecuaciones $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 5x=1 \end{cases}$

b) Los planos se cortan dando una recta de ecuaciones $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$

c) Los planos se cortan en el punto $(1,-1,3)$

19. a) El plano y la recta se cortan en el punto $(\frac{5}{2}, 1, \frac{-5}{2})$

b) el plano y la recta se cortan en el punto $(\frac{5}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{-8}{9})$

20. Las rectas se cruzan. El plano pedido tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \Rightarrow 4x+7y+2z-5=0$$

21. Estudiamos la posición relativa de estas rectas estudiando el determinante formado por el vector director de una de las rectas, el vector director de la otra y el vector de un punto de una de las rectas a un punto de la otra, de este modo:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & b \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = b+1$$

Si $b=-1$ las rectas son coplanarias, en este caso se cortan.

Si $b \neq -1$ las rectas no son coplanarias, es decir se cruzan en el espacio.

22. Discutimos el sistema formado por la ecuación del plano y las ecuaciones de la recta y obtenemos:

Si $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado por lo que la recta y el plano se cortan en un punto.

Si $m=2$ el sistema es compatible indeterminado por lo que la recta está contenida en el plano.

PÁGINA 128

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

23. ¿Para qué valores de a el conjunto de vectores (1, 1, 1); (1, a, 1) y (1, 1, a) es una base de $\mathbb{R}^3$?

24. Consideremos la recta r, el plano π y el punto P, siendo:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-2}{5}; \qquad \pi: 2x - y + 3z = 1; \qquad P(1, 0, 4)$$

Obtén una recta s paralela a r que pase por el punto P. Calcula el punto de intersección de π y s.

25. Halla las ecuaciones de la recta paralela a los planos $x + y = 1$, $x + z = 0$ y que pasa por el punto (2, 0, 0).

26. Halla las ecuaciones de la recta que es paralela a la recta $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ y pasa por el punto (4, 5, 6).

27. Dado un tetraedro $ABCD$ de vértices $A(1, 2, 0)$, $B(2, 6, 0)$, $C(5, 3, 0)$ y $D(3, 4, 3)$:

a) Comprueba que los puntos medios de las aristas AB, BD, CD y CA están en un mismo plano y halla su ecuación.

b) El plano obtenido es paralelo a las otras dos aristas CB y AD.

28. Siendo r la recta determinada por las ecuaciones $\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$ y el plano π definido por $2x + y + mz = n$, halla m y n, de modo que:

a) r corte a π b) r y π sean paralelos c) r esté contenida en π

29. Halla la ecuación del plano que pasa por (0, 0, 1) y contiene la recta $r: \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$

30. Estudia la posición relativa de las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 2 \end{cases}$

31. Estudia, según los valores del parámetro m, la posición relativa de las rectas:

$$r: \{x - 2z = 1,\ y - z = 2\} \quad \text{y} \quad s: \{x + y + z = 1,\ x - 2y + 2z = m\}$$

32. Estudia, para los diferentes valores de m, la posición relativa de los planos:

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y + mz = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + z = 1 \\ my + z = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ mx + 10y + 4z = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = m \\ 2x - 5y + mz = -2 \end{cases}$

33. El plano $x + y + z = 0$ y la recta de ecuaciones $x = 1 + t$; $y = 2 - t$; $z = -4 + t$ se cortan en el punto A. Halla de forma razonada la ecuación de la recta que pasa por A y por $B(2, 2, 3)$.

34. De dos rectas en el espacio se sabe que no son coplanarias, ¿qué posiciones relativas pueden tener? Pon un ejemplo de cada una de las posiciones y razona la respuesta.

35. Prueba que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera (en el espacio) son siempre vértices de un paralelogramo.

23. Sean los valores de a que hagan el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ distinto de cero.

El determinante anterior vale $a^2 - 2a + 1 = (a^2 - 1)^2$, es distinto de cero para cualquier valor diferente de uno.

24. La ecuación de la recta s es: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{5}$

La intersección de s con el plano π es el punto $-\frac{5}{8}, -\frac{39}{16}, -\frac{1}{16}$

25. La intersección de s con el plano π es el punto $-\frac{5}{8}, -\frac{39}{16}, -\frac{1}{16}$

El vector director de la recta pedida será proporcional al vector director de la recta determinada por los dos planos, $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

La ecuación de la recta pedida es:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$$

26. La recta viene determinada por el punto (4, 5, 6) y el vector $\vec{v} = (1, 3, 1)$, y su ecuacion es:

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-6}{1}$$

27. La solución es:

a) La ecuación del plano que pasa por los puntos medios (3/2, 4, 0), (5/2, 5, 3/2), (4, 7/2, 3/2) y (3, 5/2, 0) es $6x + 6y - 8z - 33 = 0$.

b) La arista CB tiene por ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 0 \end{array}\right\} \text{con } t \in \mathbb{R}$$

La otra arista AD tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}.$$

El plano del apartado a) es paralelo a las recta anteriores, ya que ninguna de las dos rectas corta al plano.

28. a) La recta r corta al plano π si $m \neq -\dfrac{23}{7}$

b) La recta y el plano son paralelos si $m = -\dfrac{23}{7}$ y $n \neq \dfrac{9}{7}$.

c) La recta está contenida en el plano si $m = -\dfrac{23}{7}$ y $n = -\dfrac{23}{7}$.

29. El haz de planos de arista r tiene por ecuación:

$(5x - 3x + 2z - 5) + \lambda(2x - y\ z - 1) = 0$

Si el haz incide con el punto (0, 0, 1), se cumple:

$2 - 5 + \lambda(-1 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -3/2$

Para este valor $\lambda = -3/2$, el plano buscado es:

$4x - 3y + 7z - 7 = 0$

30. Las rectas se cruzan en el espacio al ser cuatro el rango de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

31. La solución queda:
Si $m=-4$, las rectas se cortan en un punto x = 0, y = 3/2, z = -1/2.
Si $m\neq-4$ las rectas se cruzan en el espacio.

32. La solución es:

a) Si $m\neq-2$, se cortan en un punto.
Si $m=-2$, se cortan dos a dos.

b) Si $m\neq0$ y $m\neq1$, se cortan en un punto.
Si $m=0$, dos planos son paralelos y el otro corta a los anteriores.
Si $m=1$, los planos se cortan en una recta.

c) Si $m\neq7$, se cortan en un punto.
Si $m=7$, se cortan en una recta.

d) Si $m\neq 1$, se cortan en un punto.
Si $m=1$, se cortan dos a dos.

33. El punto *A*, punto de corte del plano y la recta del enunciado, tiene por coordenadas: $A(2,1,-3)$
La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es:

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1+t \\ z=-3+6t \end{array}\right\} \text{con } t\in\mathbb{R}$$

34. Queda:

Entendemos por rectas coplanarias aquellas que están en un plano, es decir, aquellas rectas pueden generar un único plano.

De las cuatro posiciones relativas de dos rectas en el espacio, las que no son coplanarias son las rectas que se cruzan.

Dos rectas que se cruzan son:

$$r_1:\begin{cases} 2x+y=-5 \\ 4x-z=-10 \end{cases} \quad r_2:\begin{cases} 2y-z=-7 \\ 2x-3y=8 \end{cases}$$

35. Sean $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2\ y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ y $P_4(x_4, y_{4,} z_4)$, cuatro puntos cualesquiera del espacio. Los puntos medios de los lados del cuadrilátero formado por P_1, P_2, P_3, y P_4 tienen por coordenadas.

$$M_1 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$$M_2 = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}\right)$$

$$M_3 = \left(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2}, \frac{z_3 + z_4}{2}\right)$$

$$M_4 = \left(\frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 + y_1}{2}, \frac{z_4 + z_1}{2}\right)$$

Los vértices M_1, M_2, M_3 y M_4 forman un paralelogramo ya que los vectores $\overrightarrow{M_1 M_2}$ y $\overrightarrow{M_4 M_3}$ son iguales; de igual forma que $\overrightarrow{M_4 M_1}$ y $\overrightarrow{M_2 M_3}$.

Los vectores anteriores tienen por coordenadas:

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_4 M_3} = \left(\frac{x_3 - x_1}{2}, \frac{y_3 - y_1}{2}, \frac{z_3 - z_1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{M_4 M_1} = \overrightarrow{M_2 M_3} = \left(\frac{x_4 - x_2}{2}, \frac{y_4 - y_2}{2}, \frac{z_4 - z_2}{2}\right)$$