GEOMETRÍA EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD ANDALUCÍA – 2003-2006

Ejercicio 1.- (2006)

Sea r la recta de ecuación $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a+t \\ y & = & 1-2t \\ z & = & 4-t \end{array}\right.$ y s la recta de ecuación $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{3}$

(a) Calcula el valor de a sabiendo que las rectas r y s se cortan.

(b) Calcula el punto de corte.

Ejercicio 2.- (2006)

Halla un punto A de la recta r de ecuación $x=y=z$ y un punto B de la recta s de ecuación $x=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ de forma que la distancia entre A y B sea mínima.

Ejercicio 3.- (2006)

Determina los puntos de la recta r de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y-1 & = & \dfrac{z-3}{2} \end{array}\right.$ que equidistan del plano π de ecuación $x+z=1$ y del plano π' de ecuación $y-z=3$.

Ejercicio 4.- (2006)

Considera los puntos $A(1,0,-2)$ y $B(-2,3,1)$.

(a) Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.

(b) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C, donde C es un punto de la recta de ecuación $-x=y-1=z$. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C?

Ejercicio 5.- (2006)

Considera el plano π de ecuación $2x+y-z+2=0$ y la recta r de ecuación $\dfrac{x-5}{-2}=y=\dfrac{z-6}{m}$

(a) Halla la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m.

(b) Para $m=-3$, halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

(c) Para $m=-3$, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

Ejercicio 6.- (2006)

Considera el punto $P(3,2,0)$ y la recta r de ecuaciones $\left\{\begin{array}{lcl} x+y-z-3 & = & 0 \\ x+2z+1 & = & 0 \end{array}\right.$

(a) Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

(b) Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r.

©ManoloMat.com

Ejercicio 7.- (2006)

Sea r la recta de ecuación $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{4}$ y s la recta dada por $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y + z & = & 2 \\ -x + 2y - 3z & = & 2 \end{array} \right.$

(a) Determina la posición relativa de ambas rectas.

(b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Ejercicio 8.- (2006)

Considera la recta r de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x - 2y + 3z & = & 0 \end{array} \right.$

(a) Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y no corta al eje OZ.

(b) Calcula la proyección ortogonal del punto $A(1, 2, 1)$ sobre la recta r.

Ejercicio 9.- (2006)

Considera los puntos $A(2, 1, 2)$ y $B(0, 4, 1)$ y la recta r de ecuación $x = y - 2 = \dfrac{z-3}{2}$

(a) Determina un punto C de la recta r que equidiste de los puntos A y B.

(b) Calcula el área del triángulo de vértices ABC.

Ejercicio 10.- (2006)

Halla la ecuación de un plano que sea paralelo al plano π de ecuación $x + y + z = 1$ y forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $18\sqrt{3}$.

Ejercicio 11.- (2006)

Sea la recta r de ecuación $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ y el plano π de ecuación $x - y + z + 1 = 0$. Calcula el área del triángulo de vértices ABC, siendo A el punto de corte de la recta r y el plano π, B el punto $(2, 1, 2)$ de la recta r y C la proyección ortogonal del punto B sobre el plano π.

Ejercicio 12.- (2006)

Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta r de ecuación $x = y = z$, es paralela al plano π de ecuación $3x + 2y - z = 4$ y pasa por el punto $A(1, 2, -1)$.

Ejercicio 13.- (2005)

Considera el punto $P(2, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ z = 2. \end{array} \right.$

(a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.

(b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Ejercicio 14.- (2005)

Sean los vectores

$$\overrightarrow{v_1} = (0, 1, 0), \quad \overrightarrow{v_2} = (2, 1, -1) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{v_3} = (2, 3, -1).$$

(a) ¿Son los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ linealmente dependientes?

(b) ¿Para qué valores de a el vector $(4, a+3, -2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$?

(c) Calcula un vector unitario y perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$.

©ManoloMat.com

Ejercicio 15.- (2005)

Sea el punto $P(1,0,-3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+z=0. \end{cases}$

(a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r.

(b) Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Ejercicio 16.- (2005)

Se sabe que los puntos $A(m,0,1)$, $B(0,1,2)$, $C(1,2,3)$ y $D(7,2,1)$ están en un mismo plano.

(a) Halla m y calcula la ecuación de dicho plano.

(b) ¿Están los puntos B, C y D alineados?

Ejercicio 17.- (2005)

Se sabe que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} ax+6y+6=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases}$$

son paralelas.

(a) Calcula a.

(b) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Ejercicio 18.- (2005)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x+z-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{x}{2} = y-1 = \dfrac{z}{3}$.

(a) Halla la ecuación del plano π que contiene a s y es paralelo a r.

(b) Calcula la distancia de la recta r al plano π.

Ejercicio 19.- (2005)

Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 6+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 5-7\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} 2x-3y+1 = 0 \\ 3x-y-2 = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 20.- (2005)

Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo.

(a) Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

(b) Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por el origen de coordenadas.

(c) Calcula el área del triángulo ABC.

©ManoloMat.com

***Ejercicio 21**.-* (2005)

Considera el punto $A(0,-3,1)$, el plano $\pi \equiv 2x-2y+3z=0$ y la recta $r \equiv x+3=y=\dfrac{z-3}{2}$.

(a) Determina la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

(b) Determina la ecuación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

***Ejercicio 22**.-* (2005)

Se sabe que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = b+t \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ 6x+2z=2 \end{cases}$$

están contenidas en un mismo plano.

(a) Calcula b.

(b) Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

***Ejercicio 23**.-* (2005)

Considera un plano $\pi \equiv x+y+mz=3$ y la recta $r \equiv x=y-1=\dfrac{z-2}{2}$.

(a) Halla m para que r y π sean paralelos.

(b) Halla m para que r y π sean perpendiculares.

(c) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π?

***Ejercicio 24**.-* (2005)

Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x+y-z+5=0$ y $\pi_2 \equiv x+2y+z+2=0$.

(a) Calcula las coordenadas del punto P sabiendo que está en el plano π_1 y que su proyección ortogonal sobre el plano π_2 es el punto $(1,0,-3)$.

(b) Calcula el punto simétrico de P respecto del plano π_2.

***Ejercicio 25**.-* (2004)

Calcula el área del triángulo de vértices $A(0,0,1)$, $B(0,1,0)$ y C, siendo C la proyección ortogonal del punto $(1,1,1)$ sobre el plano $x+y+z=1$.

***Ejercicio 26**.-* (2004)

Considera el punto $A(0,1,-1)$, la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-z=-4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-2y-z=2$. Halla la ecuación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

***Ejercicio 27**.-* (2004)

Se sabe que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice C, que pertenece a la recta intersección de los planos $y+z=1$ e $y-3z+3=0$, y que sus otros dos vértices son $A(2,0,1)$ y $B(0,-3,0)$. Halla C y el área del triángulo ABC.

©ManoloMat.com

Ejercicio 28.- (2004)

Halla la perpendicular común a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta - 1 \\ z = -1. \end{cases}$$

Ejercicio 29.- (2004)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3. \end{cases}$$

Halla la ecuación de una recta que corte a r y s y sea perpendicular al plano $z = 0$.

Ejercicio 30.- (2004)

Sean los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, -1, 3)$.

(a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por A y por B.

(b) Calcula el área del paralelogramo de vértices consecutivos $ABCD$ sabiendo que la recta determinada por los vértices C y D pasa por el origen de coordenadas.

Ejercicio 31.- (2004)

Halla la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z - 2}{-3} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x - 1 = 1 - z \\ y = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 32.- (2004)

Considera los puntos $P(6, -1, -10)$, $Q(0, 2, 2)$ y R, que es el punto de intersección del plano $\pi \equiv 2x + \lambda y + z - 2 = 0$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

Determina λ sabiendo que los puntos P, Q y R están alineados.

Ejercicio 33.- (2004)

Considera el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 7 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda. \end{cases}$

(a) Halla la ecuación de un plano perpendicular a π y que contenga a la recta r.

(b) ¿Hay algún plano paralelo a π que contenga a la recta r? En caso afirmativo determina sus ecuaciones.

©ManoloMat.com

Ejercicio 34.- (2004)

Las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+2y+z-4=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x+y-6=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$$

contienen dos lados de un cuadrado.

(a) Calcula el área del cuadrado.

(b) Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

Ejercicio 35.- (2004)

Sean los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,1)$, $C(0,5,3)$ y $D(-1,4,3)$.

(a) Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano. Halla la ecuación de dicho plano.

(b) Demuestra que el polígono de vértices consecutivos $ABCD$ es un rectángulo.

(c) Calcula el área de dicho rectángulo.

Ejercicio 36.- (2004)

Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(2,1,0)$ y $\overrightarrow{v}=(-1,0,1)$, halla un vector unitario $\overrightarrow{w}$ que sea coplanario con $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y ortogonal a $\overrightarrow{v}$.

Ejercicio 37.- (2003)

Se sabe que los puntos $A(1,0,-1)$, $B(3,2,1)$ y $C(-7,1,5)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo $ABCD$.

(a) Calcula las coordenadas del punto D.

(b) Halla el área del paralelogramo.

Ejercicio 38.- (2003)

Los puntos $A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. Además, se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D.

Ejercicio 39.- (2003)

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,1,-1)$, es paralela al plano $3x-y+z=4$ y corta a la recta intersección de los planos $x+z=4$ y $x-2y+z=1$.

Ejercicio 40.- (2003)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-2y+z=0$.

(a) Calcula el haz de planos que contienen a la recta r.

(b) Halla el plano que contiene a la recta r y corta al plano π en una recta paralela al plano $z=0$.

©ManoloMat.com

<u>Ejercicio 41</u>.- (2003)

Considera el punto $P(-2,3,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z+2 \;=\; 0 \\ 2x-2y+z+1 \;=\; 0. \end{cases}$

(a) Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a la recta r.

(b) Determina el punto de r más próximo a P.

<u>Ejercicio 42</u>.- (2003)

Considera una recta r y un plano π cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{array}\right\} \quad (t\in\mathbb{R}) \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{array}\right\} \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R}).$$

(a) Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π.

(b) Dados los puntos $B(4,4,4)$ y $C(0,0,0)$, halla un punto A en la recta r de manera que el triángulo formado por los puntos A, B y C sea rectángulo en B.

<u>Ejercicio 43</u>.- (2003)

Sabiendo que las rectas

$$r \equiv x=y=z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x &=& 1+\mu \\ y &=& 3+\mu \\ z &=& -\mu \end{cases}$$

se cruzan, halla los puntos A y B, de r y s respectivamente, que están a mínima distancia.

<u>Ejercicio 44</u>.- (2003)

Determina el punto P de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x+y+z+3=0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6-\mu. \end{cases}$$

<u>Ejercicio 45</u>.- (2003)

Se sabe que el plano Π corta a los semiejes positivos de coordenadas en los puntos A, B y C, siendo las longitudes de los segmentos OA, OB y OC de 4 unidades, donde O es el origen de coordenadas.

(a) Halla la ecuación del plano Π.

(b) Calcula el área del triángulo ABC.

(c) Obtén un plano paralelo al plano Π que diste 4 unidades del origen de coordenadas.

<u>Ejercicio 46</u>.- (2003)

Halla la perpendicular común a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x=\beta \\ y=2+2\beta \\ z=0. \end{cases}$$

©ManoloMat.com

<u>Ejercicio 47</u>.- (2003)

Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + 1 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + az + 2 = 0. \end{cases}$

(a) Halla el valor de a sabiendo que la recta está contenida en el plano.

(b) Calcula el ángulo formado por el plano π y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$

<u>Ejercicio 48</u>.- (2003)

Halla la ecuación de una circunferencia que pase por el punto $(-1, -8)$ y sea tangente a los ejes coordenados.

©ManoloMat.com