RELACIÓN 1 EJERCICIOS: LÍMITES DE FUNCIONES

Ejercicio 1:

a) Calcular $\lim_{x \to 2} 3$ **Solución:** $\lim_{x \to 2} 3 = 3$	b) Calcular $\lim_{x \to 2} x$ **Solución:** $\lim_{x \to 2} x = 2$
c) Calcular $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x + 1}$ **Solución:** $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x + 1} = \frac{(3)^2 - 9}{3 + 1} = \frac{0}{4} = 0$	d) Encontrar $\lim_{x \to 3} x^3$. **Solución:** $\lim_{x \to 3} x^3 = (\lim_{x \to 3} x)^3 = (3)^3 = 27$
e) Evaluar $\lim_{x \to -1} (x^3 - 3x + 2)$. **Solución:** $\lim_{x \to -1} (x^3 - 3x + 2) =$ $(-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$	f) Encontrar $\lim_{x \to -2} (6x + 1)(2x - 3)$ **Solución:** $\lim_{x \to -2} (6x + 1)(2x - 3) =$ $(6(2) + 1)(2(2) - 3) = (13)(1) = 13$.
g) Determinar $\lim_{x \to 3} \sqrt{x + 13}$. **Solución:** $\lim_{x \to 3} \sqrt{x + 13} =$ $= \sqrt{3 + 13} = \sqrt{16} = 4$	h) Evaluar $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x + 2}}{2x - 10}$ **Solución:** $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x + 2}}{2x - 10} =$ $= \frac{\sqrt{7 + 2}}{2(7) - 10} = \frac{\sqrt{9}}{14 - 10} = \frac{3}{4}$
i) Encuentre $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x}$ **Solución:** $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} =$ $= \frac{\sqrt{4^2 + 9}}{4} = \frac{5}{4}$	j) Calcular $\lim_{x \to 1} \sqrt[5]{x^2 - x} + (x^2 + 4)^2$. **Solución:** $\lim_{x \to 1} \sqrt[5]{x^2 - x} + (x^2 + 4)^2 =$ $= \sqrt[5]{(1)^2 - 1} + ((1)^2 + 4)^2 = 0 + 25 = 25$

Ejercicio 2:

Calcula.

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim_{x\to+\infty} (x^4 + 2x^3 + x^2 - 17x)$

c) $\lim_{x\to+\infty} (-2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 27x - 42)$

d) $\lim_{x\to+\infty} (1 - 3x^3 + 5x^2 - 6x)$

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} (x^4 + 2x^3 + x^2 - 17x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} (-2x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 27x - 42) = -\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty} (1 - 3x^3 + 5x^2 - 6x) = -\infty$

Ejercicio 3:

Determina los límites.

a) $\lim_{x\to-\infty} (6x^3 + x^2)$

b) $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 12x + 1)$

c) $\lim_{x\to-\infty} (5x^3 - 3x^2 - 16x + 3)$

d) $\lim_{x\to-\infty} (7 - 12x + 3x^2 + 9x^3)$

a) $\lim_{x\to-\infty} (6x^3 + x^2) = -\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 12x + 1) = +\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} (5x^3 - 3x^2 - 16x + 3) = -\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} (7 - 12x + 3x^2 + 9x^3) = -\infty$

Ejercicio 4:

Determina los límites, y si es preciso, calcula los límites laterales.

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 6}{x - 2}$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{3}{9 - x^2}$

c) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+6}{x-2}\to\frac{10}{0}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2+6}{x-2}=-\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2+6}{x-2}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{9-x^2}\to\frac{3}{0}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{3}{9-x^2}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{3}{9-x^2}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+2x}{8-2x}\to\frac{24}{0}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 4^-}\frac{x^2+2x}{8-2x}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x^2+2x}{8-2x}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4-2x}{x^2-2x+1}\to\frac{2}{0}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{4-2x}{x^2-2x+1}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{4-2x}{x^2-2x+1}=+\infty$

<u>Ejercicio 5</u>:

Calcula los límites laterales y el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}\to\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x-3}\to\frac{5}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}=+\infty\end{array}\right\}\to\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}=+\infty$$

<u>Ejercicio 6</u>:

Resuelve los límites.

a) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-9x+10}{3x^2-7x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8}$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16}$

f) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}$

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{9}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-9x+10}{3x^2-7x+2} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-9x+10}{3x^2-7x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x-5)}{(x-2)(3x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{3x-1} = -\frac{1}{5}$$

c) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -4} \frac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8} = \lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(3x^2-1)}{(x+4)(x^2+3x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{3x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{47}{6}$$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x^2-4x-5)}{(x-5)(x^2+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2+2} = 0$$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x-7)}{(x-2)(4x-8)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-7}{4x-8} \to -\frac{3}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16} = -\infty$$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x} \to \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2(x-1)}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x} = 2$$

Ejercicio 7:

Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$$

determina los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to 1} f(x)$ c) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ d) $\lim_{x \to -2} f(x)$

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$

c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

d) $\lim_{x \to -2} f(x) \to \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{5}{4}$$

Ejercicio 8:

Calcular $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + x^2 - x + 4}{x^4 + x^3 - 5}$

Vemos que es un límite, cuando $x \to -\infty$, de un cociente de dos polinomios. En consecuencia aplicamos la regla anterior:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + x^2 - x + 4}{x^4 + x^3 - 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^5}{x^4} = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty.$$

Ejercicio 9:

Ejemplo A.4
Calcular $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} + x^2}{\sqrt[3]{x+1} + 2x}$

De nuevo vemos que se trata de un límite de tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
Observamos los términos que aparecen:
- en el numerador aparecen $\sqrt{x^4+1}$, cuyo comportamiento cuando $x \to +\infty$ es como $\sqrt{x^4} = x^{4/2} = x^2$, y x^2.
- en el denominador aparecen $\sqrt[3]{x+1}$, cuyo comportamiento es como $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, y $2x$.

Por tanto lo que tiende a infinito más rápidamente es x^2 (es la mayor potencia de x que aparece). Se puede, pues, aplicar la técnica de dividir numerador y denominador por x^2.
Sin embargo, es más fácil tener en cuenta sólo los términos dominantes, como antes:
- cuando $x \to +\infty$ el numerador se comporta como $x^2 + x^2 = 2x^2$.
- cuando $x \to +\infty$ el denominador se comporta como $2x$.

En consecuencia se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} + x^2}{\sqrt[3]{x+1} + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Ejercicio 10:

Ejemplo A.5
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

Es de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ así que razonamos como antes.

El numerador, en el límite, se comporta como $\sqrt[4]{x^2} = x^{2/4} = x^{1/2}$, mientras que el denominador se comporta como $\sqrt{x}+\sqrt{x} = 2x^{1/2}$.

En consecuencia, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2+1}+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{2x^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 11:

Resolver los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$; *b)* $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x-5}{x^2-25}$; *c)* $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$;

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$; *e)* $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$;

Solución

a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ indeterminación de la forma $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por -1:

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to-1} \frac{x^2-x+1}{x-1} = -\frac{3}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{x-5}{x^2-25}$ indeterminación de la forma $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por 5:

$$\lim_{x\to5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x\to5} \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x\to5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ indeterminación de la forma $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 3:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ indeterminación de la forma $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos x por 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ indeterminación de la forma $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos x por 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)}=\pm\infty$$

Ejercicio 12:

Calcula los límites laterales en el punto $x=3$ de:

$$f(x)=\begin{cases}x-3 & \text{si } x<3\\ x^2+1 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x-3)=0 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x^2+1)=10$$

Ejercicio 13:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-(x-5)\right)$$

Solución

Tenemos una resta de infinitos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-(x-5)\right)=\infty-\infty$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\sqrt{x^2+x+2}-(x-5)=$$

$$=\left(\sqrt{x^2+x+2}-(x-5)\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+2}+(x-5)}{\sqrt{x^2+x+2}+(x-5)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2-(x-5)^2}{\sqrt{x^2+x+2}+(x-5)}=$$

$$=\frac{x^2+x+2-(x^2+25-10x)}{\sqrt{x^2+x+2}+(x-5)}=$$

$$=\frac{11x-23}{\sqrt{x^2+x+2}+(x-5)}$$

Así, es más fácil calcular el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{11x-23}{\sqrt{x^2+x+2}+(x-5)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{11x-23}{\sqrt{x^2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{11x-23}{x+x}=\frac{11}{2}$$

Ejercicio 14:

Problema 42. Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$, x -2 $\neq 0$

Solución: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$

Ejercicio 15:

Problema 43. Calcular $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$, $x - 2 \neq 0$

Solución: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{1}{4}$

Ejercicio 16:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{3x^2 + 2} \right)^{x^2}$$

Solución

El límite de la base y el del exponente son

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Por tanto, como 1/3 es menor que 1,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{3x^2 + 2} \right)^{x^2} = 0$$

Ejercicio 17:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3 - 2x}{3 - x} \right)^{x^2 - 1}$$

Solución

El límite de la base y el del exponente son

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3 - 2x}{3 - x} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3 - 2x}{3 - x} \right)^{x^2 - 1} =$$

$$= 2^{+\infty} = +\infty$$

El resultado es infinito porque la base es mayor que 1.

Ejercicio 18:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+3}-\sqrt{5x}$$

Solución

Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+3}-\sqrt{5x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x+3}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x}} = -\infty$$

El resultado es infinito porque el grado del numerador es mayor.

El signo del infinito es negativo porque el coeficiente principal es negativo.

Ejercicio 19:

Problema 44. Evaluar $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2}$ $x-1\neq 0$

Solución: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+2} = \frac{\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1}(x+2)} = \frac{1}{3.}$

Ejercicio 20:

Problema 45. Calcular $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6}$, $x-3\neq 0$

Solución: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)}{(x+2)} = \frac{6}{5}$

Ejercicio 21:

Problema 46. Hallar el $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ $x+1\neq 0$

Solución: $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{-2}{1} = -2$

Ejercicio 22:

Problema 47. Evaluar $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$, x -1 $\neq 0$

Solución: $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3$

Ejercicio 23:

Problema 53. Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ x-1 $\neq 0$

Solución: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)}{(x^3+x^2+x-)}=$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x^2+2x+3)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Ejercicio 24:

Problema 57. Hallar el $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, x – 4 $\neq 0$

Solución: $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x})^2-(2)^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$

Ejercicio 25:

Problema 58. Calcular el $\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{\sqrt{x+4}}$, x + 4 $\neq 0$

Solución:

$\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+4})^2}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(\sqrt{x+4})}{x+4}$

$\lim_{x\to -4}\sqrt{x+4}=\sqrt{-4+4}=0$

Ejercicio 26:

Problema 60. Calcular $\lim_{x\to 7}=\frac{x-7}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3}}$, x – 7 $\neq 0$

Solución:

$\lim_{x\to 7}=\frac{x-7}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}\right)}{(\sqrt{x-4})^2-(\sqrt{3})^2}=$

$\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}\right)}{x-4-3}=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{3}\right)}{x-7}=\lim_{x\to 7}\sqrt{x-4}+\sqrt{3}==\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

Ejercicio 27:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x+2}{5x^2+x}$$

Solución

Importante: x tiende a infinito negativo.

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, el resultado es infinito, pero tenemos que calcular su signo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x+2}{5x^2+x}=$$
$$=\text{signo}\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\text{singo}\left(\frac{(-\infty)^3}{(-\infty)^2}\right)\cdot\infty=$$
$$=-\infty$$

Hemos escrito el signo del cociente de los polinomios (es positivo) y el del cociente de infinito al cubo y al cuadrado (es negativo porque una potencia es impar y la otra es par).

Ejercicio 28:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^6+3x^3+2}{7x^6+x-1}$$

Solución

Como el grado del numerador es el mismo que el del denominador, el límite es el cociente de los coeficientes principales:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^6+3x^3+2}{7x^6+x-1}=\frac{3}{7}$$

Ejercicio 29:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9}{x(x^2+1)}$$

Solución

Tenemos un cociente de polinomios:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9}{x^3+x}$$

El grado del numerador es menor que el del denominador, así que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9}{x^3+x}=0$$

Ejercicio 30:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{2x^4+3x-11}}{\sqrt[7]{x^3+2}}$$

Solución

Como los monomios que importan son los de grado mayor, podemos escribir

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{2x^4+3x-11}}{\sqrt[7]{x^3+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{2x^4}}{\sqrt[7]{x^3}}$$

Escribiendo las raíces como potencias,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{2x^4}}{\sqrt[7]{x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{2}\cdot x^{4/5}}{\sqrt[7]{1}\cdot x^{3/7}}$$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, el límite es infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{2x^4+3x-11}}{\sqrt[7]{x^3+2}} = +\infty$$

Ejercicio 31:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^5 - x\sqrt{x}\right)$$

Solución

Tenemos la indeterminación infinito menos infinito.

Operamos en el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^5 - x\sqrt{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x^5 - x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x^5 - x^{3/2}\right) = +\infty$$

El límite es infinito porque tenemos infinito elevado a 5 menos infinito elevado a 3/2 (5 es mayor que 3/2). Es decir, prima el exponente mayor.

Ejercicio 32:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-5x^3 - x\sqrt{x}\right)$$

Solución

Reescribimos el límite (escribimos la raíz como una potencia y operamos):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-5x^3 - x\sqrt{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-5x^3 - x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-5x^3 - x^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= -5\cdot(+\infty) = -\infty$$

Observad que el signo negativo del coeficiente principal es la causa del signo negativo del infinito.

Ejercicio 33:

$$\lim_{x\to-\infty}(-5x^3 - x^2)$$

Solución

Observad que x tiende a infinito negativo.

Como prima el exponente mayor, tenemos

$$\lim_{x\to-\infty}(-5x^3 - x^2)=$$

$$= -5\cdot(-\infty)^3 =$$

$$= -5\cdot(-\infty) = +\infty$$

Observad que el cubo mantiene el signo negativo del infinito, pero el coeficiente negativo cambia el signo del infinito al multiplicarlo.

Ejercicio 34:

$$\lim_{x\to-\infty}(-5x^3 + 8x - 3x^6)$$

Solución

Observad que x tiende a infinito negativo.

Como prima el exponente mayor,

$$\lim_{x\to-\infty}(-5x^3 + 8x - 3x^6) =$$

$$= -3\cdot(-\infty)^6 =$$

$$= -3\cdot(+\infty) = -\infty$$

Observad que la potencia x^6 hace que el infinito sea positivo (porque 6 es par), pero el coeficiente -3 cambia su signo.

Ejercicio 35:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

Solución

Tenemos la indeterminación cero partido cero porque 1 es raíz de los polinomios. Podemos simplificar el cociente:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{x+2}{x-2}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

Ejercicio 36:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 - 2x + 5}}{x - 1}$$

Solución

Tenemos un cociente de infinitos.

El grado en el denominador es 1. En el numerador también, porque tenemos un cubo dentro de una raíz cúbica. Por tanto, el límite es el cociente de los coeficientes principales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 - 2x + 5}}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3}}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{27} \cdot x^{\frac{3}{3}}}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x - 1} = 3$$

Ejercicio 37:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5-\sqrt{x^2-1}}{5-\sqrt{1+x^2}}$$

Solución

Tenemos infinito partido infinito.

El límite depende de los sumandos x^2, así que podemos omitir los otros:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5-\sqrt{x^2-1}}{5-\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{-\sqrt{x^2}} = 1$$

Ejercicio 38:

$$\lim_{x \to -1} \frac{1-\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

Solución

Observad que x tiende a -1.

El límite es fácil de calcular ya que sólo tenemos que sustituir x por -1:

$$\lim_{x \to -1} \frac{1-\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1-0}{1-0} = 1$$