RELACIÓN 1 EJERCICIOS: FUNCIONES POLINÓMICAS

Ejercicio 1:

Representa cada una de las siguientes funciones

16. $y = 2x$

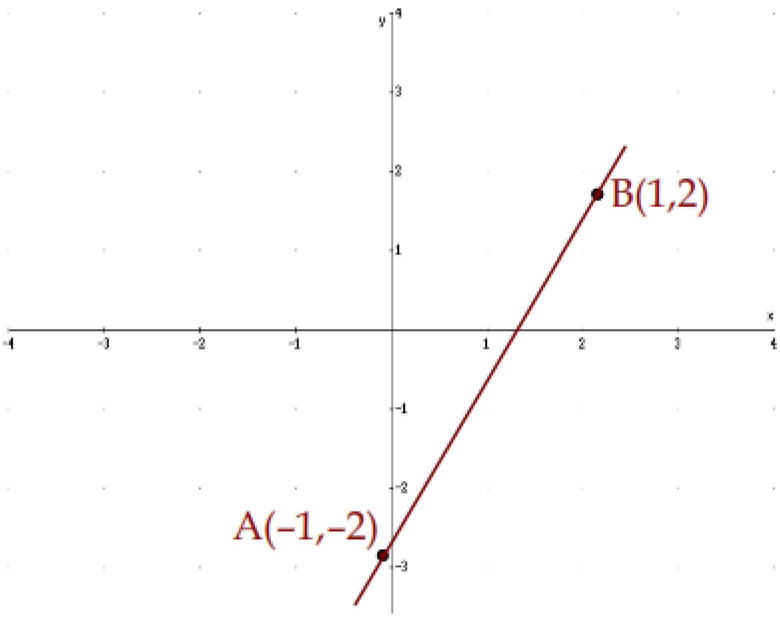
Solución:

La función dada se trata de una linea recta, ya que es de la forma y = mx+n, en dónde m es la pendiente. En nuestro caso, m=2 y n=0. Como n=0 ello quiere decir que la recta cortará al eje y en y=0.

Hacemos una tabla de valores para y=2x

x	y=2x	
–1	2(–1)=–2	$\Rightarrow$ A(–1,–2)
1	$2\cdot 1=2$	$\Rightarrow$ B(1,2)

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



17. $y = \dfrac{2x}{3}$

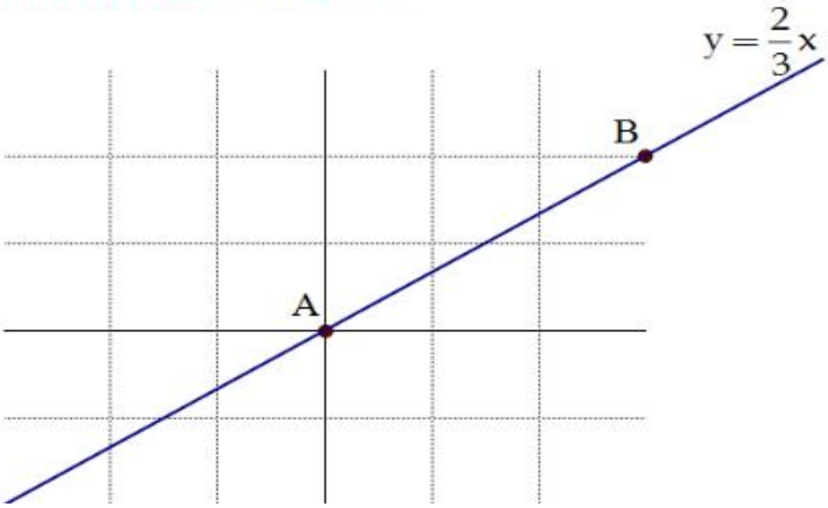
Solución:

- La función $y=\frac{2x}{3}$ se puede escribir también así: $y=\frac{2}{3}x$, o si lo prefieres de esta otra forma: $y=0,67x$

- Ahora, como siempre en estos casos, construimos una tabla de valores para obtener dos puntos (para dibujar una línea recta no hacen falta más puntos):

x	$y=\frac{2}{3}x$	
0	0	$\Rightarrow A(0,0)$
3	2	$\Rightarrow B(3,2)$

- Por último, representamos los dos puntos en un plano cartesiano y por ellos trazamos la línea recta que buscamos:



18. $y=-2x+3$

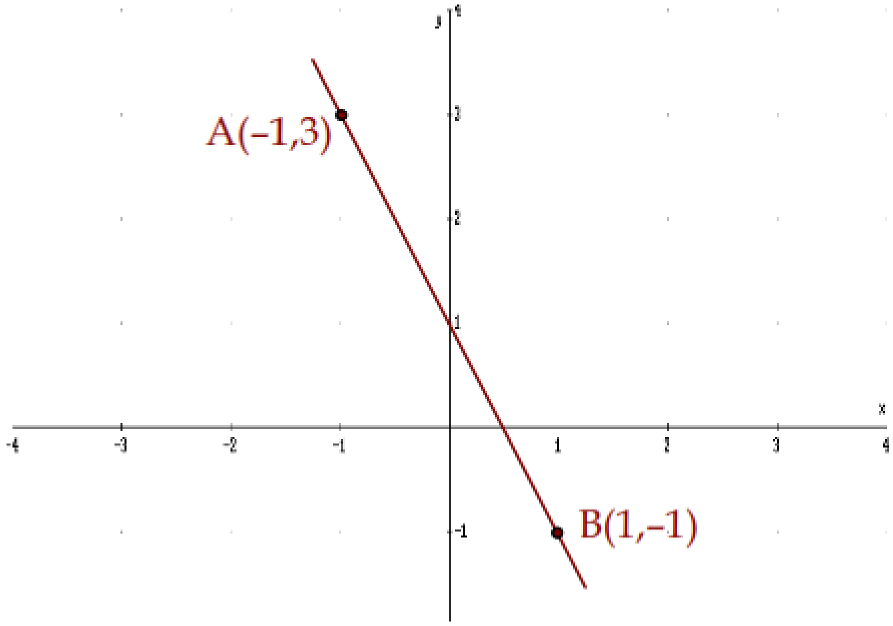
<u>Solución</u>:

La función dada es una línea recta, ya que es de la forma y = mx+n, en dónde m es la pendiente. En nuestro caso, m=–2 y n=1. Como n=1 ello quiere decir que la recta cortará al eje y en y=1.

Hacemos una tabla de valores para y=–2x+1

x	y=–2x+1	
–1	–2(–1)+1=3	$\Rightarrow$ A(–1,3)
1	$-2 \cdot 1+1=-1$	$\Rightarrow$ B(1,–1)

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



Ejercicio 2:

Representa cada una de las siguientes funciones

20. Representa la siguiente función cuadrática: $y = x^2 - 5x + 6$

Solución:

- **Los puntos de corte con el eje x:**
  Se obtienen a partir de la condición y=0. En ese caso:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

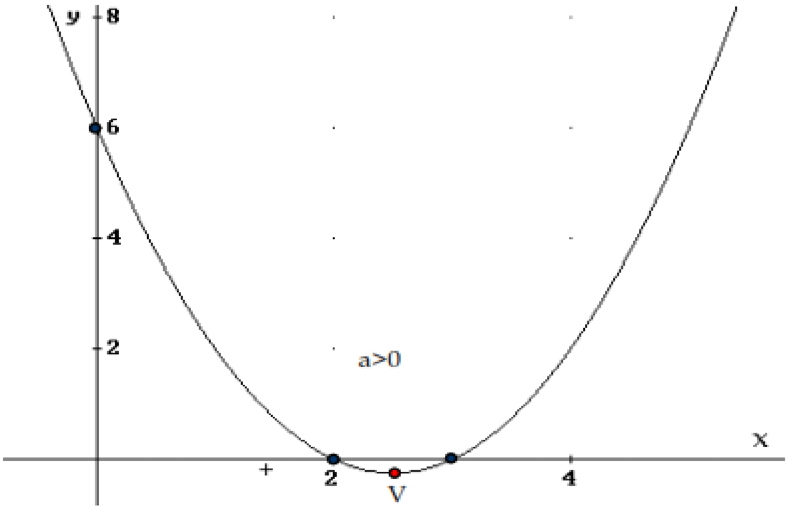
- **Las coordenadas del vértice:**
  Están dadas por $x = -\dfrac{b}{2a}$; $y = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$. Sustituyendo los valores de a y b en estas expresiones obtenemos:

$x=-\frac{(-5)}{2};\ y=\frac{-(-5)^2+4\cdot 1\cdot 6}{4\cdot 1^2}\Rightarrow x=\frac{5}{2};\ y=-\frac{1}{4}$, que vamos a expresar como $V\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$

- **Orientación de la parábola:**
  Como a>0, entonces la parábola es cóncava hacia arriba.

- **El punto de corte con el eje y:**
  Está dado por la condición x=0. En nuestro caso, cuando x=0 se tiene que y=6.

- **Representación gráfica:**
  plano cartesiano los puntos que hemos conseguido y unirlos.



Ejercicio 3:

Calcular los puntos de corte de la siguiente parábola con los ejes de coordenadas:

$$y = x^2 - x$$

Solución

Podemos escribir la ecuación en forma factorizada como

$$y = x(x-1)$$

Puntos de corte con el eje de abscisas (eje OX):

Oocurre cuando $y = 0$. Sustituimos en la ecuación y obtenemos

$$0 = x(x-1)$$

Como la ecuación de segundo grado está factorizada no es necesario aplicar la fórmula cuadrática. Las soluciones son $x = 0$ y $x = 1$.

Luego tenemos dos puntos de corte:

$$(0,0),\ \ (1,0)$$

Puntos de corte con el eje de ordenadas (eje OY):

Ocurre cuando $x = 0$. Sustituimos en la ecuación y obtenemos

$$y = 0(0-1) = 0$$

El punto es (0,0).

Notemos que hemos obtenido el punto (0,0) (el origen) como punto de corte con el eje de abscisas y el de ordenadas. Y es que, en efecto, en el origen, la parábola corta a los dos ejes.

Calculamos ahora el vértice y con los puntos de corte y el vértice podemos representar fácilmente la parábola.

Para calcular el vértice, identificamos los coeficientes a, b y c y aplicamos la fórmula:

$$y = x^2 - x \;\rightarrow\; a = 1, \quad b = -1, c = 0$$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, y\right) = \left(-\frac{-1}{2\cdot 1}, y\right) = \left(\frac{1}{2}, y\right)$$

El valor de y lo obtenemos sustituyendo el valor de x en la ecuación:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} =$$

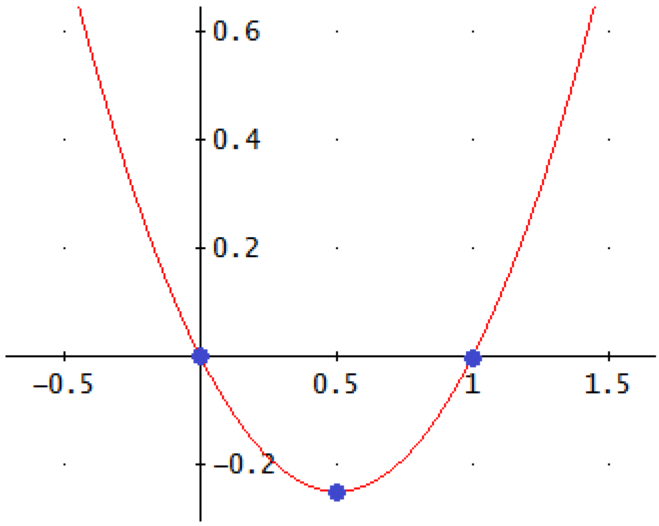
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1-2}{4} =$$

$$= -\frac{1}{4}$$

El **vértice** es

$$V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = (0.5, -0.25)$$

La gráfica es



Ejercicio 4:

Representa las funciones cuadráticas.

a. **y** $= -x^2 + 4x - 3$

1. Vértice

$x_v = -4/-2 = 2$ $y_v = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -1$ **V(2, 1)**

2. Puntos de corte con el eje OX.

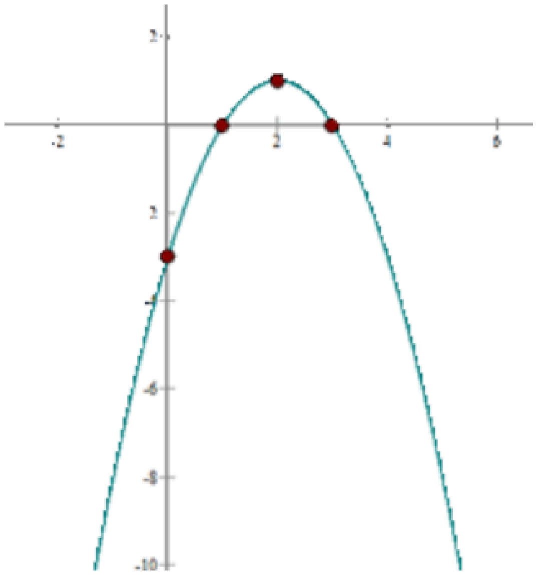
$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

(3, 0) **(1, 0)**

3. Punto de corte con el eje OY.

(0, -3)



Ejercicio 5:

b. Representa gráficamente la función cuadrática:

$y = x^2 + 2x + 1$

1. Vértice

$x_v = -2/2 = -1$ $y_v = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0$ **V(- 1, 0)**

2. Puntos de corte con el eje OX.

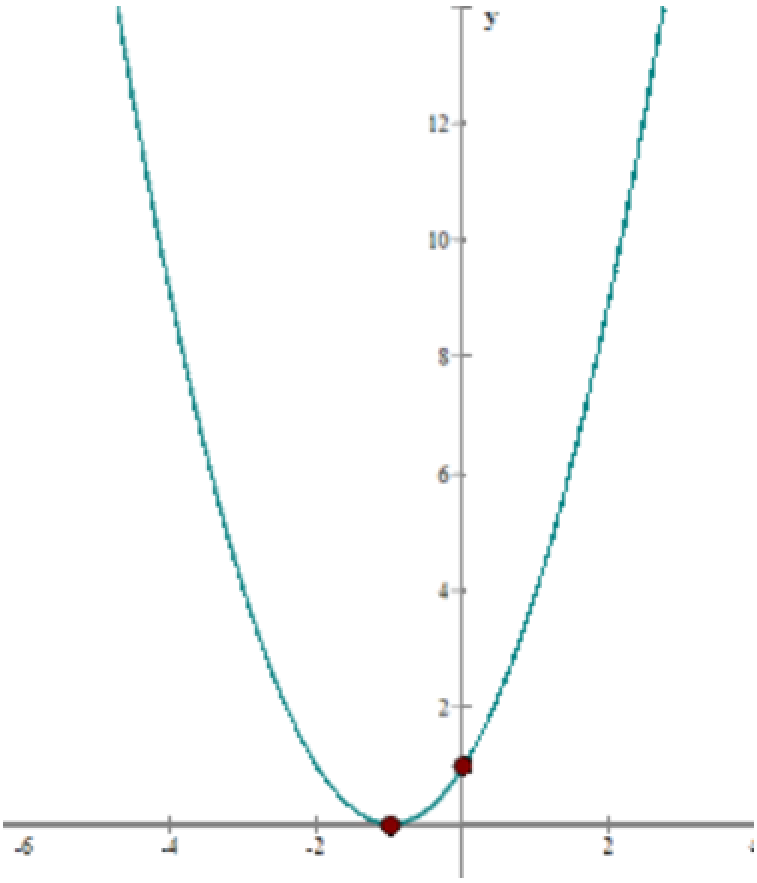
$x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Coincide con el vértice: (-1, 0)

3. Punto de corte con el eje OY.

(0, 1)



C.- Representa gráficamente la función cuadrática:

$y = x^2 + x + 1$

1. Vértice

$x_v = -1/2 \qquad y_v = (-1/2)^2 + (-1/2) + 1 = 3/4$

V(-1/2, 3/4)

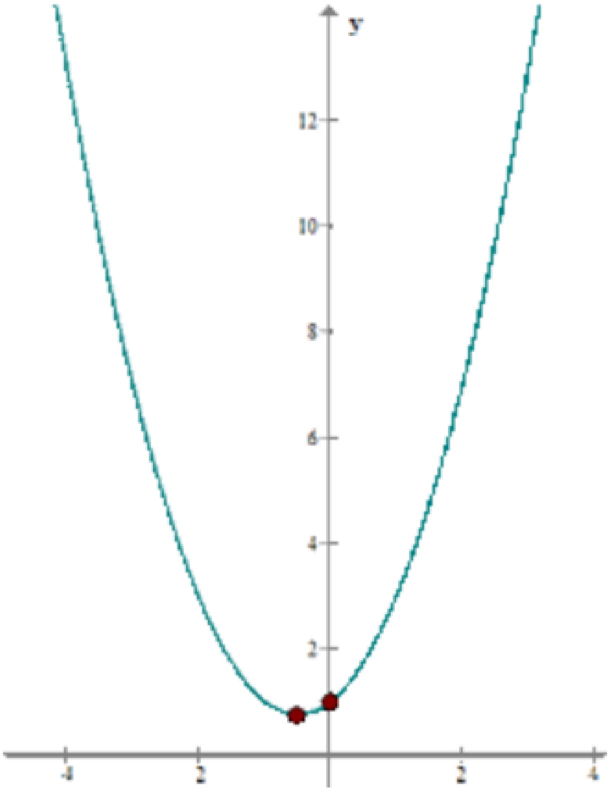
2. Puntos de corte con el eje OX.

$x^2 + x + 1 = 0$

$1^2 - 4 < 0$ No hay puntos de corte con OX.

3. Punto de corte con el eje OY.

(0, 1)



Ejercicio 6:

Haz la representación gráfica de las siguientes funciones cuadráticas, indicando el vértice y los cortes con los ejes.

a) $y = x^2 - 2x - 8$

b) $y = -x^2 + 3x$

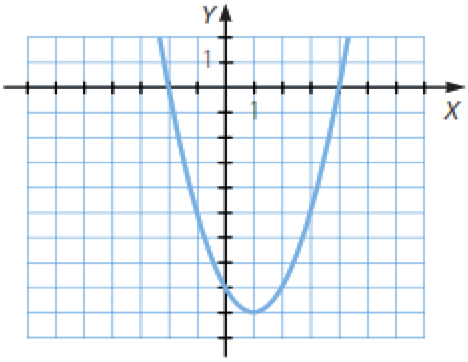
c) $y = x^2 + 4x + 4$

d) $y = 2x^2 + 3x - 2$

a) $V(1, -9)$

Puntos de corte con el eje X: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

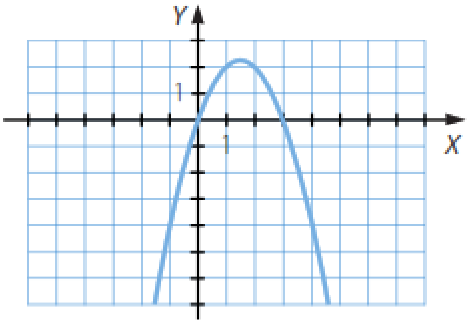
Punto de corte con el eje Y: $(0, -8)$



b) $V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Puntos de corte con el eje X: $(0, 0)$ y $(3, 0)$

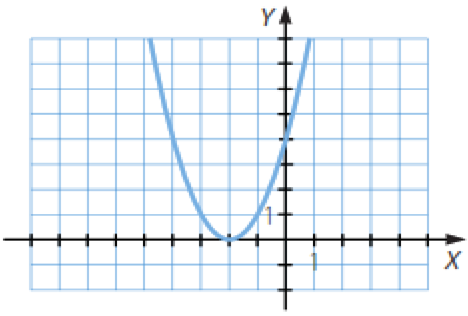
Punto de corte con el eje Y: $(0, 0)$



c) $V(-2, 0)$

Punto de corte con el eje X: $(-2, 0)$

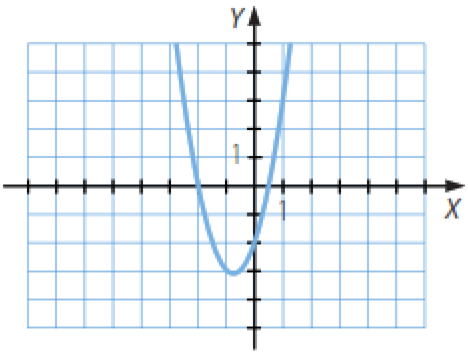
Punto de corte con el eje Y: $(0, 4)$



d) $V\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

Puntos de corte con el eje X: $(-2, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, -2)$



Ejercicio 7:

Di cuál es la pendiente de las siguientes rectas observando el coeficiente de la x:

a) $y = x - 4$ **b)** $y = -x$ **c)** $y = -4$

d) $y = \frac{4x - 5}{2}$ **e)** $y = \frac{3 - 2x}{4}$ **f)** $y = \frac{7}{3}$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{4}{2} = 2$ e) $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ f) 0

Ejercicio 8:

Halla las pendientes de las siguientes rectas, obteniendo dos de sus puntos:

a) $y = 4x - 2$ **b)** $y = -\dfrac{4}{5}x$

c) $y = \dfrac{5x}{4} + 3$ **d)** $y = 8 - 5x$

Comprueba, en cada caso, que coinciden con el coeficiente de la x (puesto que la y está despejada).

¿Qué relación existe entre el crecimiento o el decrecimiento de una recta y su pendiente?

a) $(0, -2); (1, 2) \rightarrow m = \dfrac{2+2}{1-0} = 4$

b) $(0, 0); (1, -4/5) \rightarrow m = \dfrac{-4/5}{1} = -\dfrac{4}{5}$

c) $(0, 3); (4, 8) \rightarrow m = \dfrac{8-3}{4} = \dfrac{5}{4}$

d) $(0, 8); (1, 3) \rightarrow m = \dfrac{3-8}{1-0} = -5$

Si crece, la pendiente es positiva.

Si decrece, la pendiente es negativa.

Ejercicio 9:

Halla la ecuación de las rectas que pasan por los puntos que se indican y represéntalas:

a) (2, 3) y (7, 0)

b) (–2, 5) y por el origen de coordenadas

c) (–3, 2) y (3, 2)

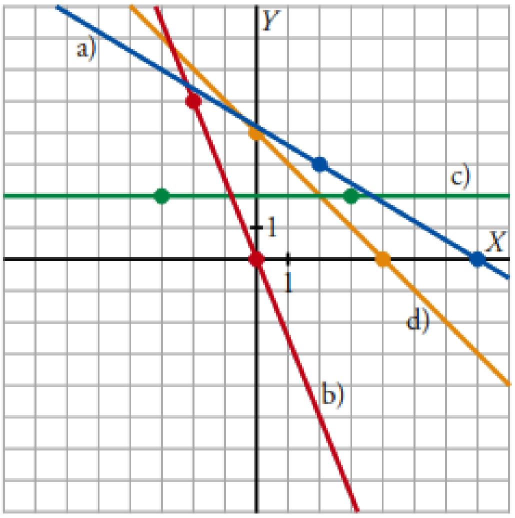
d) (0, 4) y (4, 0)

a) $m = \frac{0-3}{7-2} = -\frac{3}{5} \rightarrow y = -\frac{3}{5}(x-7)$

b) $m = -\frac{5}{2} \rightarrow y = -\frac{5}{2}x$

c) $m = \frac{2-2}{3+3} = 0 \rightarrow y = 2$

d) $m = \frac{0-4}{4-0} = -1 \rightarrow y = -x + 4$



Ejercicio 10:

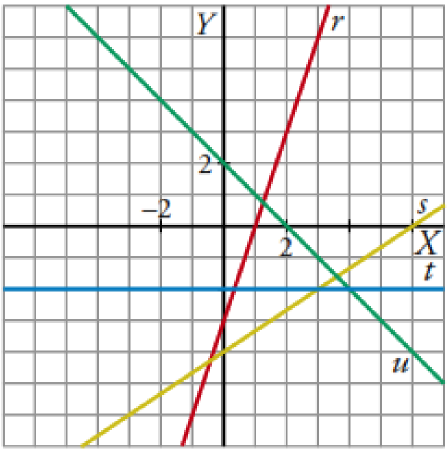
Asocia a cada recta su ecuación. Di, en cada caso, cuál es su pendiente.

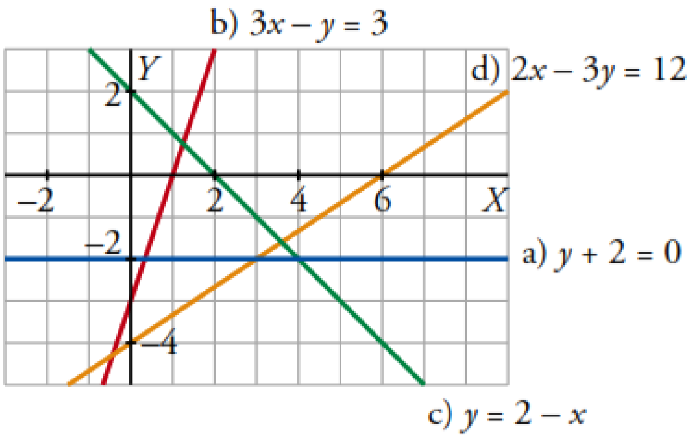
a) $y + 2 = 0$

b) $3x - y = 3$

c) $y = 2 - x$

d) $2x - 3y = 12$





Pendientes:

a) $m = 0$

b) $m = 3$

c) $m = -1$

d) $m = 2/3$

Ejercicio 11:

Halla la ecuación de las rectas que cumplen las siguientes condiciones y dibújalas:

a) Pasa por (5, 3) y tiene una pendiente de 3/5.

b) Pasa por el punto (5, 3) y tiene pendiente –1/2.

c) Pasa por (–4, 6) y tiene una pendiente de –2/3.

d) Pasa por el punto (5, 6) y tiene la misma pendiente que la recta $2x + y = 0$.

a) $y = \frac{3}{5}(x - 5) + 3 \rightarrow y = \frac{3}{5}x$

b) $y = -\frac{1}{2}(x - 5) + 3 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

c) $y = -\frac{2}{3}(x + 4) + 6 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

d) Hallamos la pendiente de $2x + y = 0 \rightarrow y = -2x \rightarrow m = -2$

$y = -2(x - 5) + 6 \rightarrow y = -2x + 16$

Ejercicio 12:

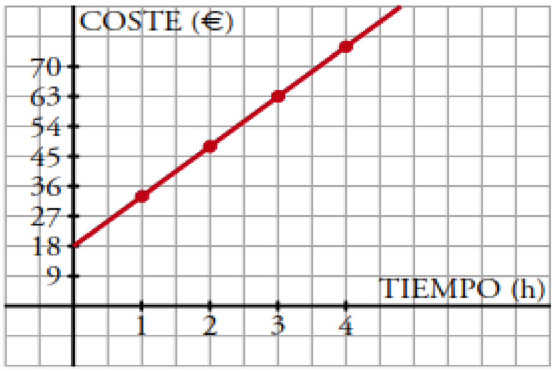
Un fontanero cobra 18 € por el desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo.

a) Haz una tabla de valores de la función *tiempo-coste* y represéntala gráficamente.

b) Si ha cobrado por una reparación 70,50 €, ¿cuánto tiempo ha invertido en la reparación?

a)

TIEMPO (h)	1	2	3	4	…
COSTE (€)	33	48	63	78	…



b) La función que nos da el coste es $y = 18 + 15x$.

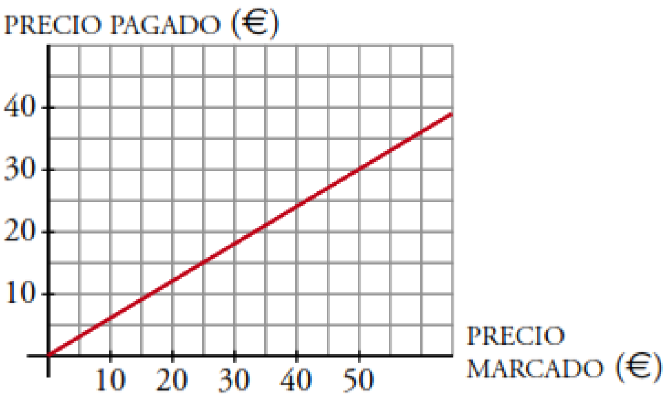
Si $y = 70{,}50 \rightarrow 70{,}50 = 18 + 15x \rightarrow x = \frac{70{,}50 + 18}{15} = 3{,}5$

La reparación le ha llevado 3 horas y media.

Ejercicio 14:

En una tienda rebajan el 40% en todas las compras que se hagan.

Esta es la gráfica de la función que muestra la relación entre el precio marcado, x, y el que pagamos, y:



a) ¿Cuál es la ecuación de esa recta?

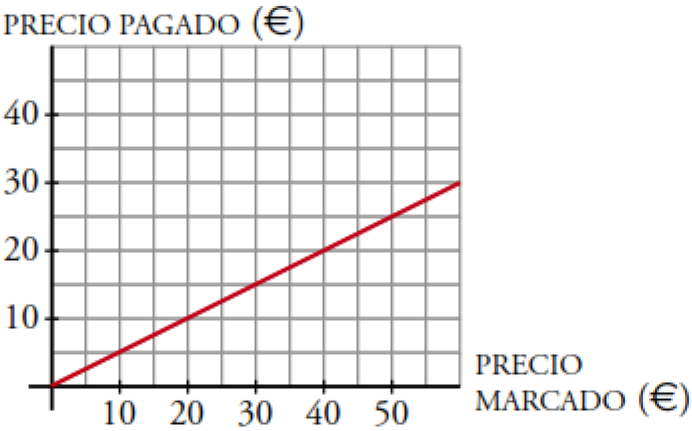
b) Si la rebaja fuese de un 50%, ¿cómo sería la gráfica? ¿Cuál sería su ecuación?

a) La recta pasa por (0, 0) y (25, 15). Su pendiente es $m = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

La ecuación de la recta es: $y = \frac{3}{5}x \rightarrow y = 0{,}6x$

b) En este caso, la ecuación sería: $y = 0{,}5x$

La representamos:



Ejercicio 15:

Halla los puntos donde cortan las siguientes funciones polinómicas al eje X.

a) $y = 3x + 9$
b) $y = -2x + 5$
c) $y = 6x^2 + 17x - 3$
d) $y = 8x^2 + 10x - 3$
e) $y = 2x^2 + x + 3$

a) $x = -3$

b) $x = \frac{5}{2}$

c) $x = -3, x = \frac{1}{6}$

d) $x = \frac{1}{4}, x = -\frac{3}{2}$

e) No tiene puntos de corte.

Ejercicio 16:

Escribe funciones con las siguientes características.

a) Una parábola que corte al eje X en $x = 3$ y $x = 5$.

b) Una parábola que corte al eje X en $x = -2$ y $x = 1$.

c) Una parábola que corte dos veces al eje X en $x = 2$.

Respuesta abierta.

a) $y = (x - 3)(x - 5)$

b) $y = (x + 2)(x - 1)$

c) $y = (x - 2)^2$

Ejercicio 17:

Encuentra las funciones cuadráticas que pasan por los siguientes puntos.

a) $(0, -3)$, $(1, -2)$ y $(-4, -27)$ **b)** $(1, -1)$, $(-2, 23)$ y $(3, 13)$

a) $$\left.\begin{array}{r} -3 = c \\ -2 = a + b + c \\ -27 = 16a - 4b + c \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 = a + b \\ -24 = 16a - 4b \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

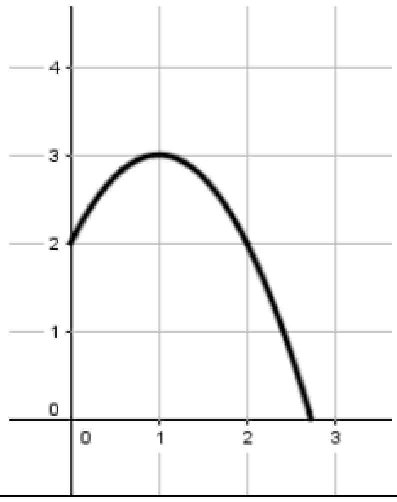
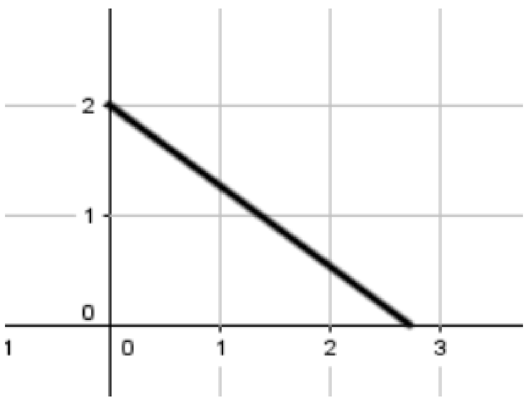
La función de interpolación cuadrática es: $y = -x^2 + 2x - 3$

b) $$\left.\begin{array}{r} -1 = a + b + c \\ 23 = 4a - 2b + c \\ 13 = 9a + 3b + c \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -1 = a + b + c \\ 24 = 3a - 3b \\ 14 = 8a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -1 = a + b + c \\ 24 = 3a - 3b \\ 90 = 30a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

La función de interpolación cuadrática es: $y = 3x^2 - 5x + 1$

Ejercicio 18:

Observa estas gráficas que tendrás que relacionar con el siguiente contexto y responde a las preguntas:
"Se lanza una pelota desde 2 metros de altura y termina alcanzando los 3 metros. Después de 2,73 segundos toca el suelo".
(2 puntos; 0,5 por apartado)

Función f	**Función g**
	

A. Justifica cuál de las gráficas se podría adaptar al contexto enunciado.

B. Calcula el dominio y recorrido de cada una de las gráficas.

C. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de las gráficas.

D. Haz una tabla de valores (2 mínimo) de la función *f*.

SOLUCIÓN

A. La función *f* porque presenta un máximo en 3 (altura).

B. El dominio de ambas funciones coincide y es [0, 2,73]. El recorrido de la función *f* es [0,3] y el de *g* es [0,2].

C. Intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. (0,1) creciente (1, 2,73) decreciente.
Intervalos de crecimiento y decrecimiento de *g*. (0, 2,73) decreciente.

D.

x	*y*
0	2
1	3
2	2

Ejercicio 19:

El estudio de la relación existente entre dos variables da como resultado una función cuadrática con las siguientes propiedades:

- Presenta un máximo absoluto en el punto (1,4)
- Corta al eje Y en el punto (0,3)

(2 puntos, 1 por apartado)

A. Determina la expresión analítica asociada a esta función.

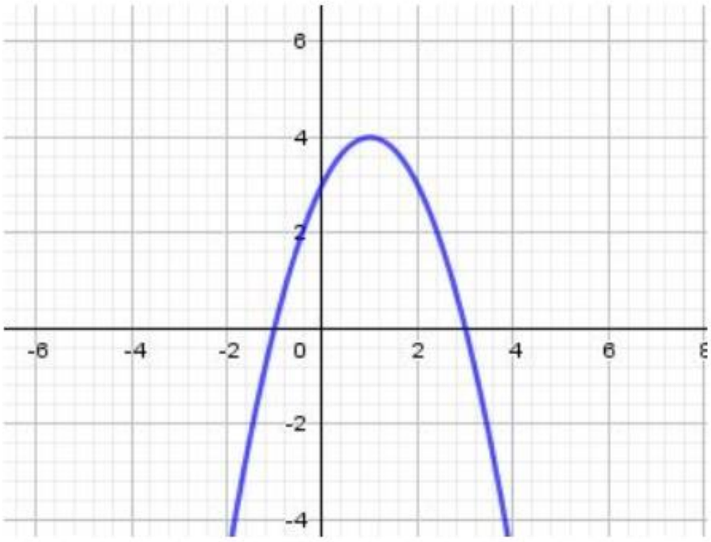
B. Representa dicha función.

SOLUCIÓN

A. Como es una función cuadrática tendrá la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, y sabemos que c=3 (ordenada en el origen), utilizando las fórmulas del vértice obtenemos la expresión:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

B.



Ejercicio 20:

Los ingresos mensuales en miles de euros de una determinada empresa de tornillos están dados por la función: $f(x) = -3x^2 + 12x$, donde x representa las cajas de mil unidades de tornillos que se fabrican al mes. Por motivos logísticos de almacenamiento y fabricación solo se pueden fabricar hasta una cantidad de 4000 tornillos. Ayuda a esta empresa a mejorar sus ganancias resolviendo los siguientes apartados.
(2 puntos; 0,5 por apartado)

A. Indica la variable independiente y la dependiente de la función con sus correspondientes unidades. Sabiendo que la empresa obtiene 9000 ▯ de ganancia fabricando 1000 tornillos, ¿cuánto ganará elaborando 3 cajas tornillos al mes? Rellena la siguiente tabla de valores.

x	$f(x)$
0	0
1	9
3	

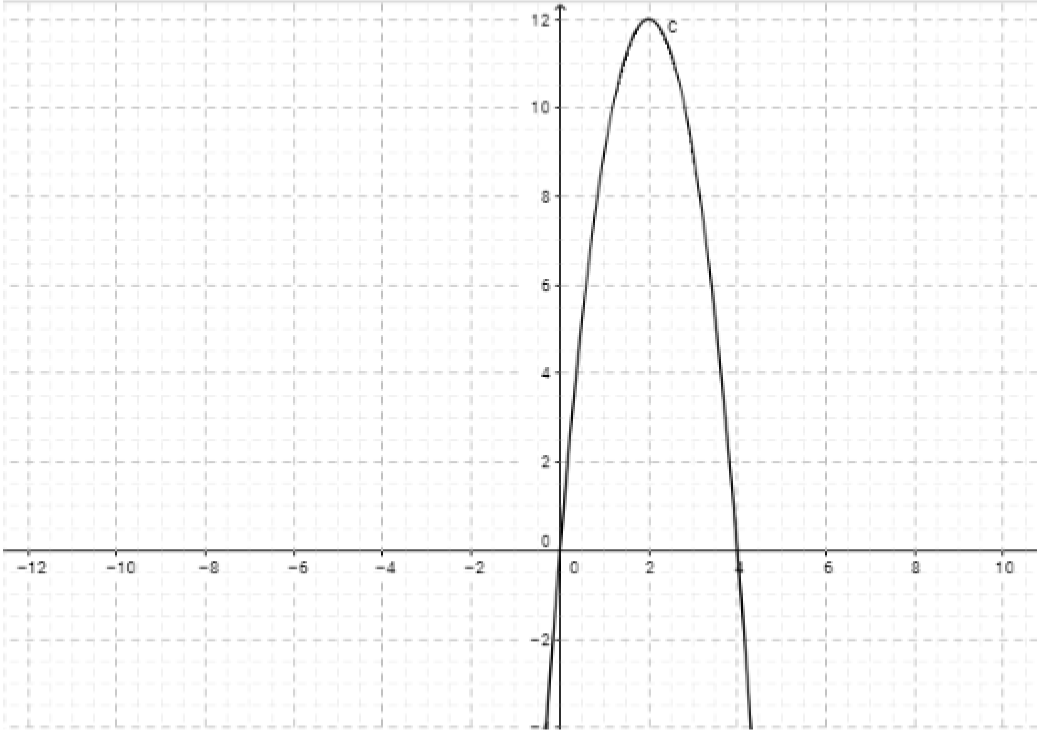
Variable independiente $x =$ cajas de $mil\ unidades\ de\ tornillos\ fabricados$

Variable dependiente $y = miles\ de\ euros\ ingresados$

$f(3) = 9$. Por lo que los ingresos serían de $9000€$

B. ¿De qué tipo de función se trata? Realiza la representación gráfica de la función.

Se trata de una función cuadrática (polinómica de segundo grado)



C. Describe el dominio, recorrido y monotonía de la función. Interpreta los resultados obtenidos.

Dominio: $[0, 4]$ Solo tiene sentido la fabricación x de números enteros positivos en ese intervalo.

Recorrido: $[0, 12]$ Por el comentario del enunciado.

Monotonía: Creciente $[0,2)$ y Decreciente $[2, +\infty)$. Tiene ganancias hasta los 4000 tornillos pero a partir de los 2000 tornillos decrecen los ingresos.

D. ¿Cuántos tornillos se deben fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso? ¿Cuál es el valor de ese ingreso máximo? Justifica la respuesta.

Al tratarse de una función polinómica de segundo grado o cuadrática con coeficiente $a < 0$,el máximo se alcanza en el vértice de la parábola de su correspondiente representación gráfica: $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = (2,12)$.

Por lo tanto, deben fabricarse 2000 tornillos mensuales para ganar el valor máximo de 12000€.

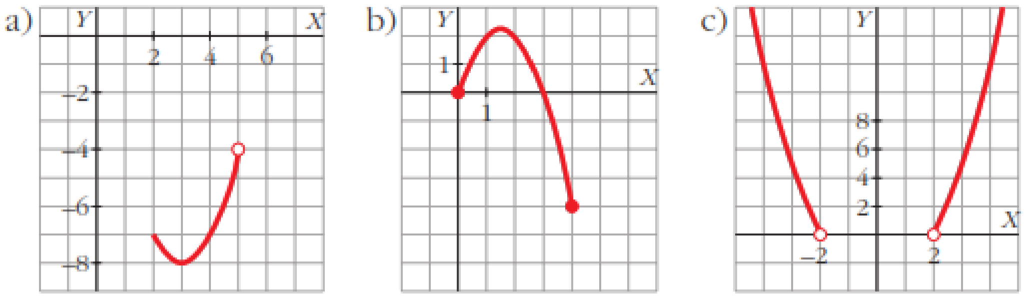
Ejercicio 21:

Representa las funciones siguientes:

a) $y = x^2 - 6x + 1,\ \ x \in [2, 5)$

b) $y = -x^2 + 3x,\ \ x \in [0, 4]$

c) $y = x^2 - 4,\ \ x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

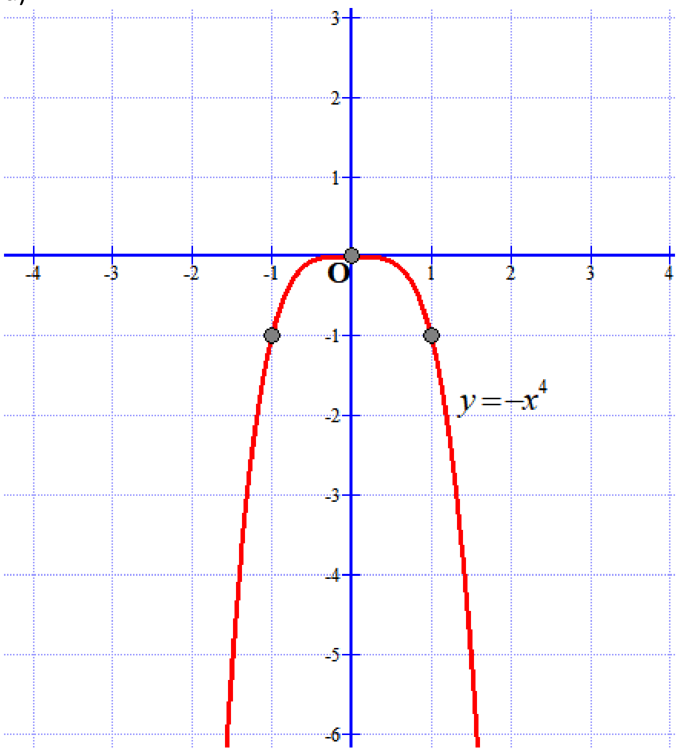


Ejercicio 22: Representa gráficamente las funciones siguientes:

a) $y = -x^4$ b) $y = \dfrac{1}{2}x^3$

Sol.:

a)



b)