ANÁLISIS EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA – 2011-2013
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS II

***Ejercicio 1*.-** (2013)

Estudie la derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ 1 & si \quad 0<x\le 3. \\ -x^2+6x+2 & si \quad x>3 \end{cases}$$

***Ejercicio 2*.-** (2013)

Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x\le 1 \\ x^2-6x+6 & si \quad x>1 \end{cases}.$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

***Ejercicio 3*.-** (2013)

Consideremos la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+6x-5 & \text{si} \quad 2\le x\le 4 \\ -2x+11 & \text{si} \quad 4<x\le 5 \end{cases}.$

a) Estudie la derivabilidad de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=4$.

b) Represente gráficamente la función $f(x)$ e indique dónde alcanza su máximo y su mínimo absolutos. ¿Cuál es el valor del máximo? ¿Y del mínimo?

***Ejercicio 4*.-** (2013)

Sea la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+3$.

a) Determine sus máximos y mínimos relativos.

b) Consideremos la función $g(x)=f'(x)$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)$, en el punto de abscisa $x=2$.

c) Dibuje la gráfica de $g(x)$ y de la recta tangente calculada en b).

***Ejercicio 5*.-** (2013)

Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años vienen dados, en millones de euros, por la función

$$B(t)=\frac{t^3}{4}-3t^2+9t, \quad 0\le t\le 8$$

donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.

a) s) Estudie la monotonía y los extremos de $B(t)$.

b) Dibuje la gráfica de $B(t)$ en el intervalo $[0, 8]$ y explique, a partir de ella, la evolución de los beneficios de esta empresa en sus 8 años de existencia.

Ejercicio 6.- (2013)

Sea $f(x)$ una función cuya función derivada, $f'(x)$, tiene por gráfica una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1,0)$ y $(5,0)$ y con vértice $(2,-4)$.

a) Estudie razonadamente la monotonía de $f(x)$.

b) Determine las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$.

c) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$, sabiendo que $f(2) = 5$.

Ejercicio 7.- (2013)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12 & \text{si} \quad x < -3 \\ -x+3 & \text{si} \quad -3 \le x \le 2 \\ x-1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en su dominio.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Calcule los extremos relativos.

Ejercicio 8.- (2013)

Sea la función $f(x) = x^3 - 24x^2 + 4x$.

a) Halle los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -2$.

c) En el punto de abscisa $x = 1$, ¿la función es creciente o decreciente?

Ejercicio 9.- (2013)

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{(x^2-5)^3}{3-x^2}$.

b) $g(x) = e^{7x} \cdot \left(x - 5x^2\right)^2$.

c) $h(x) = \dfrac{x \cdot \ln(1-x^2)}{x-3}$.

Ejercicio 10.- (2013)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$.

a) Determine el dominio y estudie la continuidad de la función.

b) Obtenga los extremos de la función.

c) Estudie su curvatura.

***Ejercicio 11*.-** (2013)

En una empresa de montajes el número de montajes diarios realizados por un trabajador depende de los días trabajados según la función $M(t)=\dfrac{11t+17}{2t+12}$, $t\geq 1$, donde t es el número de días trabajados.

a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Cuántos días necesitará para realizar cinco montajes diarios?

b) ¿Qué ocurriría con el número de montajes diarios si trabajara indefinidamente?

c) El dueño de la empresa cree que el número de montajes diarios aumenta con los días de trabajo. Estudiando la función, justifique si es cierta dicha creencia.

d) Dibuje la gráfica de la función.

***Ejercicio 12*.-** (2013)

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-bx+1 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ \\ 2x+a & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$.

a) Determine los valores de a y b para que dicha función sea continua en $x=2$ y, además, tenga un mínimo en $x = 1$.

b) Para $a = 2$ y $b = 6$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-2$.

***Ejercicio 13*.-** (2012)

De la función f se sabe que su función derivada es $f'(x)=3x^2-8x+5$.

a) Estudie la monotonía y la curvatura de f.

b) Sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (1, 1), calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

***Ejercicio 14*.-** (2012)

a) Dada la función $f(x)=2x^2+ax+b$, determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 3) y alcanza un extremo en $x=-2$.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $g(x)=3x^2-2x+1$, en el punto de abscisa $x=1$.

***Ejercicio 15*.-** (2012)

Se considera la función $f(x)=1-\dfrac{2}{x+2}$.

a) Determine la monotonía y curvatura de la función.

b) Calcule sus asíntotas.

c) Represéntela gráficamente.

Ejercicio 16.- (2012)

Sea $P(t)$ el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo t, medido en meses:

$$P(t)=\begin{cases} t^2 & \text{si} \quad 0\le t\le 5 \\ \dfrac{100t-250}{t+5} & \text{si} \quad t>5 \end{cases}.$$

a) Estudie la continuidad de la función P.

b) Estudie la derivabilidad de P en $t=5$.

c) Estudie la monotonía de dicha función e interprete la evolución del porcentaje de células afectadas.

d) ¿En algún momento el porcentaje de células afectadas podría valer 50?

Ejercicio 17.- (2012)

Determine los valores que han de tomar a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax-7 & \text{si} \quad x<1 \\ 4x-b & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$ sea derivable en R.

Ejercicio 18.- (2012)

En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en km^2, viene dada por la función $f(t)=\dfrac{11t+20}{t+2}$, siendo t el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.

a) ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente, cuando empezamos a medirla?

b) Estudie si la mancha crece o decrece con el tiempo.

c) ¿Tiene algún límite la extensión de la superficie de la mancha?

Ejercicio 19.- (2012)

a) Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & \text{si} \quad x\le 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}.$$

Determine los valores de a y b, para que la función f sea derivable en $x=2$.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ en el punto de abscisa $x=0$.

Ejercicio 20.- (2012)

Se estima que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viene dado por la función $B(t)=\begin{cases} at-t^2 & \text{si} \quad 0\le t\le 6 \\ 2t & \text{si} \quad 6<t\le 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcule el valor del parámetro a para que B sea una función continua.

b) Para $a = 8$ represente su gráfica e indique en qué períodos de tiempo la función crecerá o decrecerá.

c) Para $a = 8$ indique en qué momento se obtiene el máximo beneficio en los primeros 6 años y a cuánto asciende su valor.

Ejercicio 21.- (2012)

a) Para la función f definida de la forma $f(x)=\dfrac{ax}{x+b}$, determine, razonadamente, los valores de a y b sabiendo que tiene como asíntota vertical la recta de ecuación $x=-2$ y como asíntota horizontal la de ecuación $y=3$.

b) Para la función g, definida de la forma $g(x)=x^3-3x^2+2$, determine: su dominio, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Con esos datos haga un esbozo de su gráfica.

Ejercicio 22.- (2012)

Sea la función $f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & \text{si} \quad x\le 2 \\ \dfrac{x}{2}-b & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$.

a) Calcule a y b para que la función sea continua en todo su dominio y presente un mínimo en $x = 1$.

b) Represente gráficamente la función para $a = 1.5$ y $b = 0.5$.

Ejercicio 23.- (2012)

Sean dos funciones, f y g, tales que las expresiones de sus funciones derivadas son, respectivamente, $f'(x)=x+2$ y $g'(x)=2$.

a) Estudie la monotonía de las funciones f y g.

b) De las dos funciones f y g, indique, razonadamente, cuál de ellas tiene algún punto en el que su derivada es nula.

c) ¿Cuál de las funciones f y g es una función polinómica de primer grado? ¿Por qué?

Ejercicio 24.- (2012)

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{3x}\cdot\ln(2x-5)$.

b) $g(x)=\dfrac{3^{2x}}{x^2-1}$.

c) $h(x)=(3x^2+5x-1)^6+x^2-\ln x$.

Ejercicio 25.- (2011)

Tras un test realizado a un nuevo modelo de automóvil, se ha observado que el consumo de gasolina, $c(x)$, expresado en litros, viene dado por la función

$$c(x) = 7.5 - 0.05x + 0.00025x^2,$$

siendo x la velocidad en km/h y $25 \leq x \leq 175$.

a) Determine el consumo de gasolina a las velocidades de 50 km/h y 150 km/h.

b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $c(x)$.

c) ¿A qué velocidades de ese intervalo se obtiene el mínimo consumo y el máximo consumo y cuáles son éstos?

Ejercicio 26.- (2011)

Se considera la función dada por $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x+2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) Halle las ecuaciones de las asíntotas de esta función.

Ejercicio 27.- (2011)

Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, viene dada en función de la cantidad, x, que se invierte, también en miles de euros, por la siguiente expresión:

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.4x + 3.5, \quad \text{con } x \geq 10.$$

a) Calcule la rentabilidad para una inversión de 100000 euros.

b) Deduzca y razone qué cantidad habría que invertir para obtener la máxima rentabilidad.

c) ¿Qué rentabilidad máxima se obtendría?

Ejercicio 28.- (2011)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1-2x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 2ax + 3 & \text{si} \quad 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

a) Calcule el valor de a para que f sea continua en $x = 1$.

b) Para $a = 2$ estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

***Ejercicio 29*.-** (2011)

El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ expresada a continuación

$$B(t)=\begin{cases}\frac{1}{8}t^2-t+5 & \text{si} \quad 0\le t\le 6\\ \frac{t+1}{2} & \text{si} \quad 6<t\le 12\end{cases} \quad , \quad t \text{ es el tiempo transcurrido en meses.}$$

a) Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses.

b) ¿Cuándo fue mínimo el beneficio? ¿Cuál fue dicho beneficio?

c) Represente gráficamente la función $B(t)$. ¿Cuándo fue máximo el beneficio? ¿A cuánto ascendió?

***Ejercicio 30*.-** (2011)

a) La gráfica de la función derivada, f', de una función f es una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1,0)$ y $(3,0)$, y tiene su vértice en $(1,-4)$.
Estudie, a partir de ella, la monotonía de la función f e indique la abscisa de cada extremo relativo.

b) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=-2e^{3x}$ en el punto de abscisa $x=0$.

***Ejercicio 31*.-** (2011)

a) Calcule la función derivada de $f(x)=\dfrac{e^{-2x}}{(-x^2+2)^2}$.

b) Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes $N(t)$ que acude un día a una cadena de almacenes, en función del número de horas t que llevan abiertos, es $N(t)=a\cdot t^2+b\cdot t, \quad 0\le t\le 8, \quad a,b\in R.$
Sabiendo que el máximo de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b.

***Ejercicio 32*.-** (2011)

Las funciones $I(t)=-2t^2+51t$ y $G(t)=t^2-3t+96$ con $0\le t\le 18$ representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, t, transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.

a) ¿Para qué valores de t, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?

b) Determine la función que refleje los beneficios (ingresos menos gastos) en función de t y represéntela gráficamente.

c) ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento, los beneficios fueron máximos? Calcule el valor de ese beneficio.

Ejercicio 33.- (2011)

a) Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función

$$f(x)=\frac{4x}{2x+1}$$

b) Halle los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x)=x^3+3x^2+3x$.

Ejercicio 34.- (2011)

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+4 & \text{si} \quad x\le 2 \\ 4-\dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

a) Halle el valor de a para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor de a.

b) Para a = 1, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal? Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas.

Ejercicio 35.- (2011)

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} -x+4 & \text{si} \quad x<2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad 2\le x<4 \\ x^2-4x+1 & \text{si} \quad x\ge 4 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) Determine los extremos locales de f.

c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=3$.

Ejercicio 36.- (2011)

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{2^x+x^2}{x}; \quad g(x)=(x^2+1)^2\cdot\ln(e^{3x}+4); \quad h(x)=\frac{1}{3x}-\frac{5}{x^2-2}.$$