ANÁLISIS - EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCIA – 2007-2010

Ejercicio 1.- (2010)

Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa, determina los catetos del de área máxima.

Ejercicio 2.- (2010)

Sea $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x+2)$. Halla una primitiva F de f que verifique $F(0) = 0$. (ln denota el logaritmo neperiano).

Ejercicio 3.- (2010)

Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

(a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$.

(b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

Ejercicio 4.- (2010)

Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas.

Ejercicio 5.- (2010)

Sea f la función definida como $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{a - x}$ para $x \neq a$.

(a) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2, 3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.

(b) Para el caso $a = 2$, $b = 3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 6.- (2010)

Calcula

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx$$

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$.

Ejercicio 7.- (2010)

Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$$

<u>Ejercicio 8</u>.- (2010)

Considera la función f dada por $f(x) = 5 - x$ y la función g definida como $g(x) = \dfrac{4}{x}$ para $x \neq 0$.

(a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.

(b) Calcula el área de dicho recinto.

<u>Ejercicio 9</u>.- (2010)

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + ax) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{b\,x^2 + c}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Calcula las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3.

<u>Ejercicio 10</u>.- (2010)

Dada la función f definida por $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x + 4}$ para $x \neq 1$ y $x \neq 4$.

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas, y las rectas $x = 2$, $x = 3$.

<u>Ejercicio 11</u>.- (2010)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$. Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -5$ y en el punto de abscisa $x = 2$.

<u>Ejercicio 12</u>.- (2010)

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|2 - x|$.

(a) Esboza su gráfica.

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = 3$.

<u>Ejercicio 13</u>.- (2010)

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo? (Recuerda que el volumen del cono es: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$).

Ejercicio 14.- (2010)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = |x|$.

(a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.

(b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 15.- (2010)

Sea f la función definida como $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ para $x \neq \pm 1$.

(a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 16.- (2010)

Dada la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln x$, donde ln es la función logaritmo neperiano, se pide:

(a) Comprueba que la recta de ecuación $y = -ex + 1 + e^2$ es la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

(b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta normal del apartado (a).

Ejercicio 17.- (2010)

Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Ejercicio 18.- (2010)

Sea $I = \displaystyle\int \frac{5}{1 + \sqrt{e^{-x}}} dx$.

(a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.

(b) Determina I.

Ejercicio 19.- (2010)

Considera la función $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ cx & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

(a) Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0) = f(4)$, determina los valores de a, b y c.

(b) Para $a = -3$, $b = 4$ y $c = 1$ halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 20.- (2010)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2+4$.

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

(b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y=2x+3$. Calcula su área.

Ejercicio 21.- (2010)

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=a\,\mathrm{sen}(x)+bx^2+cx+d$, determina los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto $(0,4)$ y que la segunda derivada de f es $f''(x)=3\,\mathrm{sen}(x)-10$.

Ejercicio 22.- (2010)

Sea la función f dada por $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 0$. Determina la primitiva F de f tal que $F(1)=1$.

Ejercicio 23.- (2010)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ 1-x^2 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad 1\leq x \end{cases}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de f.

Ejercicio 24.- (2010)

Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=x^2-2x+3$ y $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+1$.

(a) Esboza las gráficas de f y g, y halla su punto de corte.

(b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.

Ejercicio 25.- (2009)

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que f verifica:

- El punto (0,1) es un punto de inflexión de la gráfica de f.
- f tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x=1$.
- La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 1.

Ejercicio 26.- (2009)

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=|x|$, $g(x)=6-x^2$.

(a) Esboza el recinto limitado por sus gráficas.

(b) Calcula el área de dicho recinto.

Ejercicio 27.- (2009)

Se considera la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

Determina la asíntota de la gráfica de f.

Ejercicio 28.- (2009)

La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,1)$ y $D = (0,1)$ en dos recintos.

(a) Dibuja dichos recintos.

(b) Halla el área de cada uno de ellos.

Ejercicio 29.- (2009)

Calcula el siguiente límite (ln denota logaritmo neperiano),

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$$

Ejercicio 30.- (2009)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x - 1|$.

(a) Esboza la gráfica de f.

(b) Comprueba que la recta de ecuación $y = x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

Ejercicio 31.- (2009)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2|x - 3|$.

(a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f.

(b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f. Calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 32.- (2009)

Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 1 + \ln(x)$, siendo ln la función logaritmo neperiano.

(a) Comprueba que la recta de ecuación $y = 1 + \frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta tangente del apartado (a).

Ejercicio 33.- (2009)

Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx + 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ ax^2 - 5x + 2a & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

es derivable. Determina los valores de a y b.

Ejercicio 34.- (2009)

(a) Calcula $\int x \operatorname{sen} x dx$.

(b) Sean las funciones $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = -x^2 + 1, \quad g(x) = x - 1$$

Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas.

Ejercicio 35.- (2009)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + e^{-x}$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, así como los extremos relativos o locales de f.

(b) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f.

(c) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

(d) Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 36.- (2009)

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 + |x|, \qquad g(x) = 2$$

(a) Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza dichas gráficas.

(b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

Ejercicio 37.- (2009)

Se divide un segmento de longitud $L = 20$ cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Ejercicio 38.- (2009)

La recta tangente a la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx^2 + nx - 3$, en el punto $(1, -6)$, es paralela a la recta de ecuación $y = -x$.

(a) Determina las constantes m y n. Halla la ecuación de dicha recta tangente.

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas.

Ejercicio 39.- (2009)

De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

Ejercicio 40.- (2009)

Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$$

Halla la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$. (Sugerencia: utiliza el cambio de variable $t = \frac{3}{2}x^2$).

Ejercicio 41.- (2009)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 3x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Estudia su continuidad y derivabilidad.

(b) Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.

(c) Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 42.- (2009)

Considera la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$.

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.

(b) Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y = 2$.

Ejercicio 43.- (2009)

Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

(a) Sabiendo que f es continua, calcula a (ln denota el logaritmo neperiano).

(b) Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

Ejercicio 44.- (2009)

Se consideran las funciones $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{3x}, \quad g(x) = \frac{1}{3}x^2$$

(a) Haz un esbozo de sus gráficas.

(b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

Ejercicio 45.- (2009)

Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

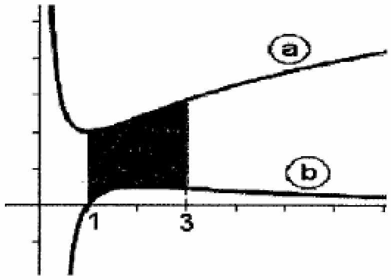
tiene extremos relativos en $(0,0)$ y en $(2,2)$. Calcula a, b, c y d.

Ejercicio 46.- (2009)

Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2\ln(x)$$

y a la de su derivada $f' : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ (ln denota logaritmo neperiano).



(a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'.

(b) Calcula el área de la región sombreada.

Ejercicio 47.- (2009)

De todos los triángulos cuya base y altura suman 20 cm ¿qué base tiene el de área máxima?

Ejercicio 48.- (2009)

Calcula un número positivo a, menor que 4, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2$ y las dos rectas de ecuaciones $y = 4$ e $y = a$, tenga un área de $\frac{28}{3}$ unidades cuadradas.

Ejercicio 49.- (2008)

Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 + ax + b \qquad \text{y} \qquad g(x) = c\,e^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto $(-1,2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.

(a) Calcula los valores de a, b y c.

(b) Halla la ecuación de dicha recta tangente.

Ejercicio 50.- (2008)

Dadas las funciones $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 51.- (2008)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Se sabe que f tiene un máximo local en $x = 1$, que el punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{9}{4}$. Calcula a, b, c y d.

Ejercicio 52.- (2008)

Sea $g : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = \ln x$ (ln denota logaritmo neperiano).

(a) Justifica que la recta de ecuación $y = \frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = e$.

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

Ejercicio 53.- (2008)

Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

(a) Halla a y b sabiendo que f es derivable en $\mathbb{R}$.

(b) Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

Ejercicio 54.- (2008)

Dada la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2x + |x^2 - 1|$

(a) Esboza la gráfica de g .

(b) Calcula $\int_0^2 g(x)\,dx$.

Ejercicio 55.- (2008)

De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1, 2)$, encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.

Ejercicio 56.- (2008)

Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 2x + 2$$

(a) Esboza las gráficas de f y g.

(b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

Ejercicio 57.- (2008)

Sea f la función definida, para $x \neq 0$, por $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de f.

Ejercicio 58.- (2008)

Calcula

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - x)(x-1)}$$

Ejercicio 59.- (2008)

De entre todos los rectángulos de perímetro 8 cm, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

Ejercicio 60.- (2008)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^{-2x}$

(a) Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -\dfrac{1}{2}$.

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

Ejercicio 61.- (2008)

Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Ejercicio 62.- (2008)

Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 - 4x \qquad \text{y} \qquad g(x) = 3x - 6$$

(a) Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g.

(b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

Ejercicio 63.- (2008)

Sea la función $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ cx + 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(a) Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado $[0,4]$, derivable en el intervalo abierto $(0,4)$ y que $f(0) = f(4)$.

(b) ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

Ejercicio 64.- (2008)

Calcula

$$\int_0^1 x \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

Ejercicio 65.- (2008)

Sea $f:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Ejercicio 66.- (2008)

Sean $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x)=x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x)=a \quad (\text{con} \quad a>0)$$

Se sabe que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f y g es $4/3$. Calcula el valor de la constante a.

Ejercicio 67.- (2008)

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\,|x| & \text{si} \quad x\le 2 \\ 6-x & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

(a) Esboza la gráfica de f.

(b) Estudia la derivabilidad de f.

(c) Calcula el área comprendida entre la gráfica de f y el eje de abscisas.

Ejercicio 68.- (2008)

Calcula

$$\int_1^e x^2\,\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

Ejercicio 69.- (2008)

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(3x-2x^2)\,e^x$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 70.- (2008)

Considera las funciones $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^3 x} \qquad \text{y} \qquad g(x)=x^3\ln x \qquad (\ln \text{ denota la función logaritmo neperiano}).$$

(a) Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando $x=\dfrac{\pi}{3}$
(se puede hacer el cambio de variable $t=\cos x$).

(b) Calcula $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Ejercicio 71.- (2008)

Dada la función f definida, para $x\ne 0$, por $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ determina las asíntotas de su gráfica.

Ejercicio 72.- (2008)

Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(a) Esboza la gráfica de g.

(b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = 2$.

(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g y el eje de abscisas.

Ejercicio 73.- (2007)

Sea $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) Calcula el punto de inflexión de la gráfica de f.

Ejercicio 74.- (2007)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x\,|x-2|$.

(a) Estudia la derivabilidad de f en $x = 2$.

(b) Esboza la gráfica de f.

(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Ejercicio 75.- (2007)

Determina una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x) = x^2 + x - 6$ y que el valor que alcanza f en su punto de máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo (relativo).

Ejercicio 76.- (2007)

Sea $f : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \mathrm{Ln}(x+1)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano).

(a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta $x = 1$.

Ejercicio 77.- (2007)

Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Ejercicio 78.- (2007)

Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3.$$

(a) Esboza las gráficas de f y de g calculando sus puntos de corte.

(b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g.

***Ejercicio 79*.-** (2007)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

***Ejercicio 80*.-** (2007)

Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{Ln}(1 + x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas (Ln denota la función logaritmo neperiano).

***Ejercicio 81*.-** (2007)

Sea $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2\text{Ln}(x)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano).

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \sqrt{e}$.

***Ejercicio 82*.-** (2007)

Considera las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = e^{x-1} \quad \text{y} \quad g(x) = e^{1-x}.$$

(a) Esboza las gráficas de f y de g y determina su punto de corte.

(b) Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de f y g.

***Ejercicio 83*.-** (2007)

Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por **centímetro cuadrado**, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 **metro**. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

***Ejercicio 84*.-** (2007)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(x-3)^2$.

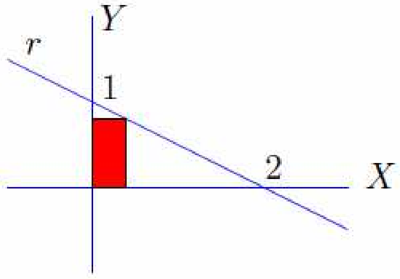
(a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) Haz un esbozo de la gráfica de f.

(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

***Ejercicio 85*.-** (2007)

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\frac{x}{2} + y = 1$ (ver figura), determina el que tiene mayor área.



Ejercicio 86.- (2007)

Sea $I = \displaystyle\int \frac{2}{2 - e^x}\, dx$.

(a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t = e^x$.

(b) Calcula I.

Ejercicio 87.- (2007)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(a) Determina los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Ejercicio 88.- (2007)

Sea $f : (-2, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x} & \text{si} \quad -2 < x \le -1 \\ \dfrac{x^2 - \beta}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 0. \end{cases}$

(a) Determina α y β sabiendo que f es derivable.

(b) Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\, dx$.

Ejercicio 89.- (2007)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 3)e^x$.

(a) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Ejercicio 90.- (2007)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha x & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$

(a) Determina el valor de α sabiendo que f es derivable.

(b) Haz un esbozo de la gráfica de f.

(c) Calcula $\displaystyle\int^{1} f(x)\, dx$.

Ejercicio 91.- (2007)

Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$.

(a) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(c) Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 92.- (2007)

Calcula

(a) $$\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx.$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,dx.$$

Ejercicio 93.- (2007)

Determina la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = x^2 - 1$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = 1$.

Ejercicio 94.- (2007)

Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).

Ejercicio 95.- (2007)

Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?

Ejercicio 96.- (2007)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2$.

(a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área.