ANÁLISIS - EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA – 2005-2007
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II

Ejercicio 1.- (2007)

a) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+a & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+bx+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$.

Halle a y b para que la función sea continua y derivable.

b) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x)=\frac{3}{(2x-5)^2}+\mathrm{L}(1-x), \qquad h(x)=\frac{e^x}{x^3+1}.$$

Ejercicio 2.- (2007)

a) Determine dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x)=3x^2-6x+a$. Calcule el valor de a para que el valor mínimo de la función sea 5.

b) Calcule $g'(3)$, siendo $g(x)=2x\cdot e^{3x-1}$.

Ejercicio 3.- (2007)

Para la función $f: R\to R$ definida de la forma $f(x)=8x^3-84x^2+240x$, determine:

a) Su monotonía y sus extremos relativos.

b) Su curvatura y su punto de inflexión.

Ejercicio 4.- (2007)

a) Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=ax^2-b$ en el punto (1, 5) sea la recta $y=3x+2$.

b) Para $g(x)=e^{1-x}+\mathrm{L}(x+2)$, calcule $g'(1)$.

Ejercicio 5.- (2007)

Sea la función $f: R\to R$, definida por $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2+mx+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$.

a) Calcule m para que la función sea continua en $x=1$.

b) Para ese valor de m, ¿es derivable la función en $x=1$?

c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=0$.

Ejercicio 6.- (2007)

a) Sea la función definida para todo número real x por $f(x)=ax^3+bx$. Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 1) y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es -3.

b) Si en la función anterior $a=\frac{1}{3}$ y $b=-4$, determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.

Ejercicio 7.- (2007)

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x+1} & \text{si } x\le 0\\ x^2+2x-3 & \text{si } x>0\end{cases}$.

a) Estudie su derivabilidad en $x = 0$.

b) Determine si existen asíntotas y obtenga sus ecuaciones.

Ejercicio 8.- (2007)

Se considera la función $f(x)=x^3-9x^2+24x$.

a) Determine los extremos relativos de f; estudie la monotonía y la curvatura.

b) Represente gráficamente la función f.

Ejercicio 9.- (2007)

Se considera la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-8x+6 & \text{si } x\le 1\\ -2x^2+8x-6 & \text{si } x>1\end{cases}.$$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f.

b) Represente la gráfica de f.

c) Indique los extremos relativos de la función.

Ejercicio 10.- (2007)

Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-k}{x+1} & \text{si } x>0\\ x^2+2x+1 & \text{si } x\le 0\end{cases}$.

a) Calcule el valor de k para que la función f sea continua en $x = 0$. Para ese valor de k, ¿es f derivable en $x =0$?

b) Para $k = 0$, calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Ejercicio 11.- (2007)

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$f(x)=\begin{cases}-5x^2+40x-60 & \text{si } 0\le x\le 6\\ \dfrac{5x}{2}-15 & \text{si } 6<x\le 10\end{cases}$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a) Represente la función f.

b) Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.

c) ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?

d) Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Ejercicio 12.- (2007)

a) La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 3$. Calcule los coeficientes a y b y determine si el citado extremo es un máximo o un mínimo relativo.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Ejercicio 13.- (2006)

Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = 2x - x^2$.

a) Determine, para cada una de ellas, los puntos de corte con los ejes, el vértice y la curvatura. Represéntelas gráficamente.

b) Determine el valor de x para el que se hace mínima la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Ejercicio 14.- (2006)

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x} + (5x-2)^3$.

b) $g(x) = (x^2+2)\cdot L(x^2+2)$.

c) $h(x) = 3^{5x} + e^x$.

Ejercicio 15.- (2006)

a) La gráfica de la función derivada de una función f es la parábola de vértice (0, 2) que corta al eje de abscisas en los puntos (−3, 0) y (3, 0). A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) Calcule los extremos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x$.

Ejercicio 16.- (2006)

Se considera la función $f(x) = \dfrac{3-x}{2-x}$.

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Estudie su monotonía.

c) Calcule sus asíntotas.

Ejercicio 17.- (2006)

a) Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto (1, −3) y tenga el punto de inflexión en $x = -1$.

b) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

Ejercicio 18.- (2006)

Sea la función f definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & \text{si } x\le 0 \\ x^2+x & \text{si } x>0 \end{cases}$.

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

Ejercicio 19.- (2006)

Consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}.$$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Determine la monotonía de f.

c) Represente gráficamente esta función.

Ejercicio 20.- (2006)

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$ en el punto de abscisa $x=1$.

b) Se considera la función $f(x)=ax^2-bx+4$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(1, 10)$.

Ejercicio 21.- (2006)

El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, en los próximos ocho años viene dado por la función B definida por

$$B(t)=\begin{cases} -t^2+7t & \text{si } 0\le t<5 \\ 10 & \text{si } 5\le t\le 8 \end{cases}$$

donde t indica el tiempo transcurrido en años.

a) Represente gráficamente la función B y explique cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años.

b) Calcule cuándo el beneficio esperado es de 11.25 millones de euros.

Ejercicio 22.- (2006)

Sea la función $f(x)=x^3-3x^2-1$.

a) Determine la monotonía y los extremos relativos de f.

b) Calcule su punto de inflexión.

c) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, represéntela.

Ejercicio 23.- (2006)

a) Dada la función $f(x)=a(x-1)^2+bx$, calcule a y b para que la gráfica de esta función pase por el punto de coordenadas (1, 2) y tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Calcule $g''(2)$ siendo $g(x)=\dfrac{1}{x}-x$.

Ejercicio 24.- (2006)

a) De una función f se sabe que la gráfica de su función derivada, f', es la recta de ecuación $y = -2x + 4$. Estudie razonadamente la monotonía de la función f, a la vista de la gráfica de la derivada.

b) Dada la función $g(x)=\dfrac{4x-4}{x+4}$, calcule la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 25.- (2005)

Sea la función $f(x)=x^3+3x^2$.

a) Obtenga la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=-1$.

b) Halle su punto de inflexión.

c) Dibuje la gráfica de la función, estudiando previamente la monotonía y los extremos relativos.

Ejercicio 26.- (2005)

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida de la forma $f(x)=1+\mathrm{L}(2x-1)$ en el punto de abscisa $x=1$.

b) Deduzca razonadamente las asíntotas de la función g, definida de la forma

$$g(x)=\frac{3-x}{x-2}.$$

c) Determine la posición de la gráfica de la función g respecto de sus asíntotas.

Ejercicio 27.- (2005)

Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

b) Calcule sus asíntotas.

c) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Ejercicio 28.- (2005)

El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por:

$$f(t)=-t^2+12t-31, \quad 4\leq t\leq 7.$$

a) Represente la gráfica de la función f.

b) ¿Para qué valor de t alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende? ¿Para qué valor de t alcanza su beneficio mínimo y cuál es éste?

Ejercicio 29.- (2005)

Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$.

a) Dibuje la gráfica de f y estudie su monotonía.
b) Calcule el punto de la curva en el que la pendiente de la recta tangente es -1.
c) Estudie la curvatura de la función.

Ejercicio 30.- (2005)

Sea f la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+bx+3 & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}.$$

Determine los valores que deben tener *a* y *b* para que *f* sea derivable.

Ejercicio 31.- (2005)

a) Determine *a* y *b* en la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+5$ sabiendo que ésta tiene un máximo en el punto (2, 9).

b) Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$.

Ejercicio 32.- (2005)

Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma

$$f(x)=x^2+\frac{16}{x^2};\quad g(x)=\left(x^2+9\right)^3;\quad h(x)=\mathrm{L}\left(x^2+1\right).$$

Ejercicio 33.- (2005)

El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo *t*, en años, viene dado por la función $f(t)=-4t^2+60t-15,\quad 1\leq t\leq 8$.

a) ¿Cuál será el valor de las existencias para $t=2$? ¿Y para $t=4$?
b) ¿Cuál es el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza?
c) ¿En qué instante el valor de las existencias es de 185 miles de euros?

Ejercicio 34.- (2005)

Sea la función $f(x)=\begin{cases}2x-\dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad x\leq 4 \\ 2x-8 & \text{si} \quad x>4\end{cases}$.

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de esta función.
b) Represéntela gráficamente e indique, a la vista de la gráfica, su monotonía y sus extremos.

Ejercicio 35.- (2005)

Sea la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+ax & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$.

a) Para $a=-2$ represente gráficamente la función f, e indique sus extremos relativos.

b) Determine el valor de a para que la función f sea derivable.

<u>Ejercicio 36</u>.- (2005)

Sea la función $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$.

a) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.

b) Represente gráficamente esta función.