ANÁLISIS - EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA – 2003-2006

Ejercicio 1.- (2006)

Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \operatorname{Ln}(x^2+1)$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

(b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa.

Ejercicio 2.- (2006)

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

(a) Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = -1$.

Ejercicio 3.- (2006)

Calcula

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\operatorname{Ln} x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

siendo Ln la función logaritmo neperiano.

Ejercicio 4.- (2006)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

(a) Halla el valor de a sabiendo que f es continua.

(b) Esboza la gráfica de f.

(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x + 2 = 0$ y $x - 2 = 0$.

Ejercicio 5.- (2006)

Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$

(a) Estudia la derivabilidad de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(c) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

Ejercicio 6.- (2006)

Calcula

(a) $$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\, dx.$$

(b) $\int (2x-3) \cdot \operatorname{tg}(x^2 - 3x)\, dx$, siendo tg la función tangente.

Ejercicio 7.- (2006)

Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.

Ejercicio 8.- (2006)

Halla la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

Ejercicio 9.- (2006)

Determina un punto de la curva de ecuación $y = x\,e^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

Ejercicio 10.- (2006)

Sea $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$

(a) Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 1 + x^2$.

(b) Calcula el valor de I.

Ejercicio 11.- (2006)

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$, para $x \neq 0$.

(a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.

(c) Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 12.- (2006)

El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \dfrac{x^2}{a}$ e $y = \sqrt{ax}$, con $a > 0$, vale 3. Calcula el valor de a.

Ejercicio 13.- (2006)

(a) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^2 + b$. Halla los valores de a y b sabiendo que $\displaystyle\int_0^6 f(x)\, dx = 6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale -12.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2 + p\,x + q$. Calcula los valores de p y q sabiendo que la función f tiene un extremo en $x = -6$ y su valor en él es -2.

Ejercicio 14.- (2006)

Calcula

$$\int (x^2 - 1)\, e^{-x}\; dx$$

Ejercicio 15.- (2006)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

(a) Estudia si existen y calcula, cuando sea posible, las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los valores que alcanza en ellos la función f.

(c) Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 16.- (2006)

Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \pi$.

Ejercicio 17.- (2006)

Sea $f : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \dfrac{x\,(\operatorname{Ln} x)^2}{(x-1)^2}$, siendo Ln la función logaritmo neperiano. Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, hállala.

Ejercicio 18.- (2006)

Sea $f\colon [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que su función derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\,x & \text{si } \; 0 < x < 3 \\ -2x + 8 & \text{si } \; 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

(a) Determina la expresión de f sabiendo que $f(1) = \dfrac{16}{3}$.

(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 19.- (2006)

Se sabe que la función $f\colon [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } \; 0 \leq x < 2 \\ -4 + \sqrt{x-1} & \text{si } \; 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo $(0,5)$.

(a) Calcula las constantes a y b.

(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Ejercicio 20.- (2006)

Sean las funciones f y g : $[0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \lambda\sqrt{x}$, donde λ es un número real positivo fijo. Calcula el valor de λ sabiendo que área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es $\dfrac{1}{3}$.

Ejercicio 21.- (2006)

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + 1$

(a) Determina $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(2,2)$ y tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 0$.

(b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

Ejercicio 22.- (2006)

Sea $f: (0,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{Ln}\, x & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ \mathrm{Ln}\,(2-x) & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

siendo Ln la función logaritmo neperiano.

(a) Estudia la derivabilidad de f en el punto $x = 1$.

(b) Calcula $\displaystyle\int_1^{1'5} f(x)\,dx$.

Ejercicio 23.- (2006)

Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie total de 200 cm^2. Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo.

Ejercicio 24.- (2006)

(a) Haz un esbozo del recinto limitado por las curvas $y = \dfrac{15}{1+x^2}$ e $y = x^2 - 1$.

(b) Calcula el área de dicho recinto.

Ejercicio 25.- (2005)

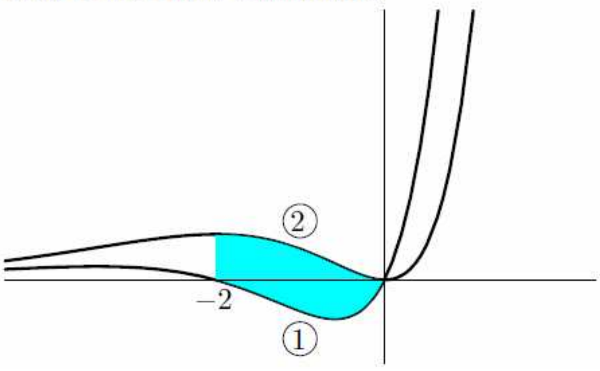
De la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

Ejercicio 26.- (2005)

Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2e^x$ y a su función derivada f'.

(a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'.

(b) Calcula el área de la región sombreada.



Ejercicio 27.- (2005)

Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

(a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) Esboza la gráfica de f.

***Ejercicio 28**.-* (2005)

Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x/2}$.

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

(b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f, la recta de ecuación $x = 2$ y la recta tangente obtenida en (a).

***Ejercicio 29**.-* (2005)

Sea f la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f.

(d) Esboza la gráfica de f.

***Ejercicio 30**.-* (2005)

Calcula la integral

$$\int \frac{3x^3 + x^2 - 10x + 1}{x^2 - x - 2}\, dx.$$

***Ejercicio 31**.-* (2005)

Determina los puntos de la parábola de ecuación $y = 5 - x^2$ que están más próximos al origen de coordenadas. Calcula la distancia entre los puntos obtenidos y el origen de coordenadas.

***Ejercicio 32**.-* (2005)

Se sabe que la función $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 8, \\ \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si} \quad x > 8. \end{cases}$$

es continua en $[0, +\infty)$.

(a) Halla el valor de a.

(b) Calcula $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\, dx$.

***Ejercicio 33**.-* (2005)

Se sabe que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \alpha \operatorname{sen} x}{x^2}$$

es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.

<u>Ejercicio 34</u>.- (2005)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

(a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza dicha gráfica.

(b) Halla el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y por el eje de abscisas.

<u>Ejercicio 35</u>.- (2005)

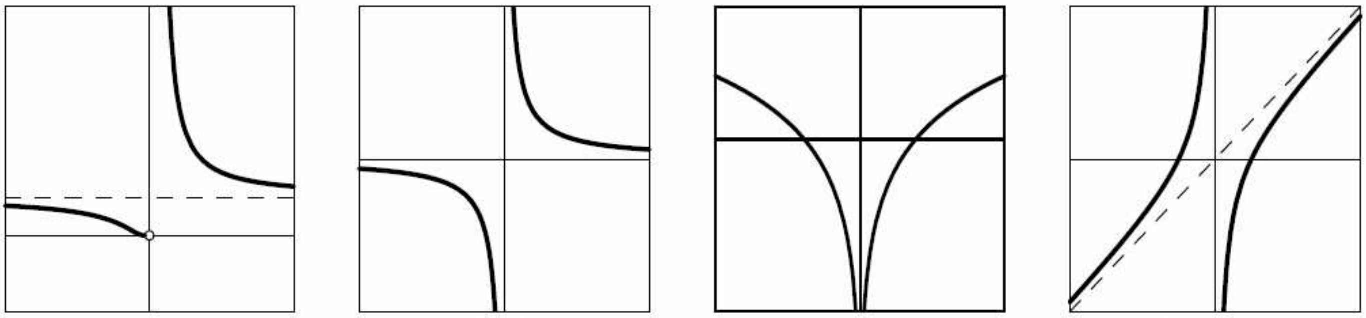
Considera las tres funciones cuyas expresiones respectivas vienen dadas, para $x \neq 0$, por

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x}, \qquad g(x) = e^{1/x} \qquad \text{y} \qquad h(x) = \operatorname{Ln}|x|,$$

siendo Ln la función logaritmo neperiano.

(a) Halla las ecuaciones de las asíntotas de las gráficas de f, g y h.

(b) Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.



Gráfica 1 Gráfica 2 Gráfica 3 Gráfica 4

<u>Ejercicio 36</u>.- (2005)

Calcula $\displaystyle\int_{-1}^{0} \operatorname{Ln}(2+x)\,dx$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

<u>Ejercicio 37</u>.- (2005)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{5x+8}{x^2+x+1}$.

(a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados.

(b) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(c) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(d) Esboza la gráfica de f.

<u>Ejercicio 38</u>.- (2005)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2-5x+4$.

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

(b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de f y por la recta tangente obtenida.

Ejercicio 39.- (2005)

De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12.800 m^2 dividido en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas), determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.

Ejercicio 40.- (2005)

Calcula las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \cos(5x+1)\,dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx.$

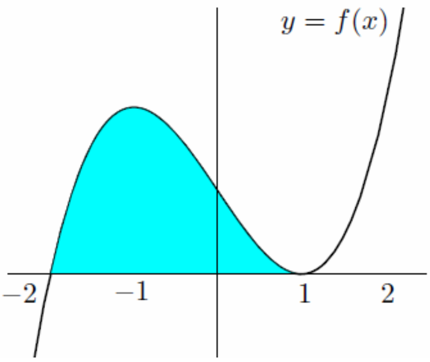
(c) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-3x}\,dx.$

Ejercicio 41.- (2005)

Se sabe que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ es la que aparece en el dibujo.

(a) Determina f.

(b) Calcula el área de la región sombreada.



Ejercicio 42.- (2005)

Sea f la función definida para $x\neq 2$ por $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$.

(a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) Calcula, si existen, el máximo y el mínimo absolutos de f en el intervalo $[0,2)$ (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Ejercicio 43.- (2005)

De la función $f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x}$ se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ viene dada por $y = -2$.

(a) Calcula a y b.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

__Ejercicio 44__.- (2005)

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(2x)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

__Ejercicio 45__.- (2005)

De una función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(0) = 2$ y que $f'(x) = 2x$.

(a) Determina f.

(b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, por el eje de abscisas y por las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$.

__Ejercicio 46__.- (2005)

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$.

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) Esboza la gráfica de f.

__Ejercicio 47__.- (2005)

De una función $f: [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(3) = 6$ y que su función derivada está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad 1 \leq x < 5. \end{cases}$$

(a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

__Ejercicio 48__.- (2005)

Considera la integral definida $I = \displaystyle\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1}\, dx$.

(a) Exprésala aplicando el cambio de variables $\sqrt{1+x} - 1 = t$.

(b) Calcula I.

Ejercicio 49.- (2004)

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2\,e^{-x^2}$.

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 50.- (2004)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x\,|x|$.

(a) Dibuja la región acotada del plano que está limitada por la gráfica de f y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

(b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

Ejercicio 51.- (2004)

Halla una función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que su gráfica pase por el punto $M(0,1)$, que la tangente en el punto M sea paralela a la recta $2x-y+3=0$ y que $f''(x)=3x^2$.

Ejercicio 52.- (2004)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x+4e^{-x}$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

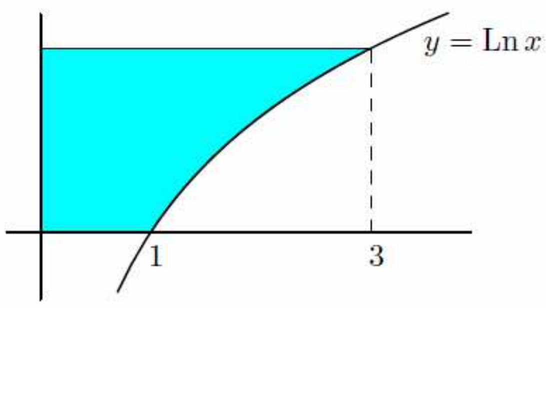
(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=2$.

Ejercicio 53.- (2004)

Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de $80\,\text{cm}^3$. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta $1€/\text{cm}^2$ y para la base se emplea un material un 50 % más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

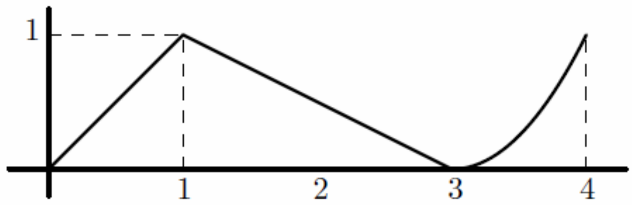
Ejercicio 54.- (2004)

Siendo $\text{Ln}\,x$ el logaritmo neperiano de x, halla el área de la superficie sombreada.



Ejercicio 55.- (2004)

De una función $f\colon [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(1) = 3$ y que la gráfica de su función derivada es la que aparece en el dibujo.



(a) Halla la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. ¿En qué punto alcanza la función f su máximo absoluto?

(c) Estudia la concavidad y la convexidad de f.

Ejercicio 56.- (2004)

Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la recta $y = 2x$ y por las curvas $y = x^2$ e $y = \dfrac{x^2}{2}$.

Ejercicio 57.- (2004)

Calcula

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3}\, dx.$$

Ejercicio 58.- (2004)

Se sabe que la función $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \dfrac{1}{2}x + c & \text{si} \quad -1 < x < 0, \\ \sqrt{1-x} & \text{si} \quad 0 \le x < 1. \end{cases}$$

es derivable en el intervalo $(-1,1)$.

(a) Determina el valor de la constante c.

(b) Calcula la función derivada f'.

(c) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que son paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.

Ejercicio 59.- (2004)

Sea $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) Halla los extremos relativos (locales) y absolutos (globales) de f.

Ejercicio 60.- (2004)

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1)\,e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, e^2)$.

Ejercicio 61.- (2004)

Considera la integral definida $I = \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

(a) Expresa la anterior integral definida aplicando el cambio de variables $1+\sqrt{x}=t$.

(b) Calcula I.

Ejercicio 62.- (2004)

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ que es paralela a la recta $-4x+y+3=0$.

(b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(2,0)$.

Ejercicio 63.- (2004)

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$.

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto de la misma de ordenada $y=1$, teniendo en cuenta que dicha recta tangente tiene pendiente negativa.

(b) Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

Ejercicio 64.- (2004)

Se quiere fabricar una caja abierta de chapa con base cuadrada y con 32 litros de capacidad. Halla las dimensiones de la caja que precisa la menor cantidad de chapa.

Ejercicio 65.- (2004)

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2 - x\,|x|$.

(a) Esboza la gráfica de f.

(b) Estudia la derivabilidad de f en $x=0$.

(c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.

Ejercicio 66.- (2004)

Considera las funciones $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por

$$f(x)=\operatorname{Ln} x \quad \text{y} \quad g(x) = 1-2^x,$$

siendo $\operatorname{Ln} x$ el logaritmo neperiano de x. Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x=1$ y $x=2$ y las gráficas de f y g.

Ejercicio 67.- (2004)

Se sabe que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)$$

es finito. Determina el valor de a y calcula el límite.

Ejercicio 68.- (2004)

Determina b sabiendo que $b>0$ y que el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=(\frac{1}{3}x-b)^2$ y los ejes coordenados es igual a 8.

***Ejercicio 69*.-** (2004)

De la función $f:(-1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ se sabe que $f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2)=0$.

(a) Determina f.

(b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.

***Ejercicio 70*.-** (2004)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$.

(a) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

(b) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f?

***Ejercicio 71*.-** (2004)

Se sabe que la función $f:(-1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si} \quad -1<x<0, \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0. \end{cases}$$

es continua en $(-1,+\infty)$.

(a) Halla el valor de a. ¿Es f derivable en $x=0$?

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

***Ejercicio 72*.-** (2004)

Determina b sabiendo que $b>0$ y que el área de la región limitada por la curva $y=x^2$ y la recta $y=bx$ es igual a $9/2$.

***Ejercicio 73*.-** (2003)

Calcula

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Ln}(1+x)-\operatorname{sen} x}{x\cdot\operatorname{sen} x},$$

siendo $\operatorname{Ln}(1+x)$ el logaritmo neperiano de $1+x$.

***Ejercicio 74*.-** (2003)

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^{x/3}$.

(a) ¿En qué punto de la gráfica de f la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas? Halla la ecuación de dicha recta tangente.

(b) Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

***Ejercicio 75*.-** (2003)

Sea $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-1)\mathrm{Ln}(x)$, donde $\mathrm{Ln}(x)$ es el logaritmo neperiano de x. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,-3/2)$.

***Ejercicio 76*.-** (2003)

Estudia la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-|x|} & \text{si} \quad x\neq -1 \text{ y } x\neq 1,\\ 0 & \text{si} \quad x=-1 \text{ o } x=1.\end{cases}$$

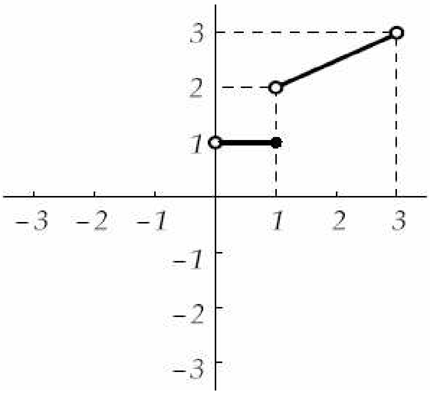
***Ejercicio 77*.-** (2003)

En la figura adjunta puedes ver representada parte de la gráfica de una función f que está definida en el intervalo $(-3,3)$ y que es simétrica respecto al origen de coordenadas.

(a) Razona cuál debe ser el valor de $f(0)$.

(b) Completa la gráfica de f.

(c) Halla $f'(x)$ para los $x\in(-3,3)$ en los que dicha derivada exista.



***Ejercicio 78*.-** (2003)

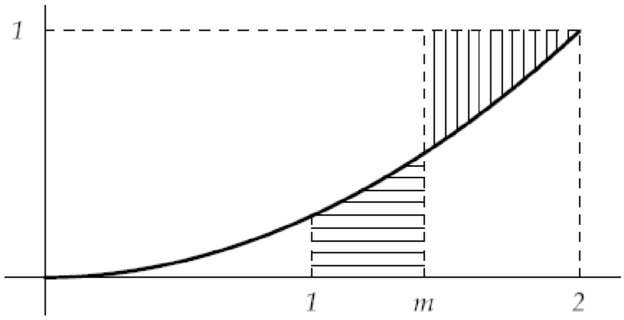
Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene máximo absoluto en el punto de abscisa $x=1$, que su gráfica pasa por el punto $(1,4)$ y que $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\frac{32}{2}$. Halla a, b y c.

***Ejercicio 79*.-** (2003)

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ es tal que $f(0)=4$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,2)$. Conociendo además que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es horizontal, calcula a, b, c y d.

***Ejercicio 80*.-** (2003)

En la figura adjunta puedes ver representada en el intervalo $[0,2]$ la gráfica de la parábola de ecuación $y=x^2/4$. Halla el valor de m para el que las áreas de las superficies rayadas son iguales.



Ejercicio 81.- (2003)

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de derivada nula en $x=1$ que no es extremo relativo y que $f(1)=1$. Calcula a, b y c.

Ejercicio 82.- (2003)

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2-2x+2$.

(a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=3$.

(b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje OY.

Ejercicio 83.- (2003)

Se sabe que la función $f:(0,3)\longrightarrow\mathbb{R}$ es derivable en todo punto de su dominio, siendo

$$f'(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } 0<x\leq 2, \\ -x+3 & \text{si } 2<x<3, \end{cases}$$

y que $f(1)=0$. Halla la expresión analítica de f.

Ejercicio 84.- (2003)

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función continua definida por

$$f(x)=\begin{cases} |2-x| & \text{si } x<a, \\ x^2-5x+7 & \text{si } x\geq a, \end{cases}$$

donde a es un número real.

(a) Determina a.

(b) Halla la función derivada de f.

Ejercicio 85.- (2003)

Sea $\mathrm{Ln}(1-x^2)$ el logaritmo neperiano de $1-x^2$ y sea $f:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\mathrm{Ln}(1-x^2)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.

Ejercicio 86.- (2003)

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=-1$. Conociendo además que $\int_0^1 f(x)\,dx=6$, halla a, b y c.

Ejercicio 87.- (2003)

Dadas la parábola de ecuación $y=1+x^2$ y la recta de ecuación $y=1+x$, se pide:

(a) Área de la región limitada por la recta y la parábola.

(b) Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola.

Ejercicio 88.- (2003)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x+3)\,e^{-x}$.

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

(c) Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 89.- (2003)

Sea la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{si} \quad x\leq 1, \\ 2-x^2 & \text{si} \quad x>1. \end{cases}$$

(a) Calcula, si es posible, las derivadas laterales de f en $x=1$.

(b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.

Ejercicio 90.- (2003)

Determina el valor positivo de λ para el que el área del recinto limitado por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=\lambda x$ es 1.

Ejercicio 91.- (2003)

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

(a) Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

(b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta tangente obtenida.

(c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Ejercicio 92.- (2003)

Considera la función f definida para $x\neq -2$ por $f(x)=\dfrac{2x^2+2}{x+2}$.

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Estudia la posición relativa de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

Ejercicio 93.- (2003)

Sea la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^3-6x+4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y su recta tangente en el punto de abscisa correspondiente al máximo relativo de la función.

Ejercicio 94.- (2003)

Dada la función f definida para $x\neq -1$ por $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$, determina:

(a) Las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Los puntos de corte, si existen, de dicha gráfica con sus asíntotas.

Ejercicio 95.- (2003)

De entre todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto de este vértice en la curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ $(x > 1)$, uno de sus lados situado sobre el semieje positivo de abscisas y otro lado sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima.

Ejercicio 96.- (2003)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 6 - x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = |x|.$$

(a) Dibuja el recinto acotado que está limitado por las gráficas de f y g.

(b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.