ANÁLISIS - EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA – 2001-2002

***Ejercicio 1*.-** (2002)

Sea $\mathrm{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x y sea $f : D \to \mathbb{R}$ la función definida por

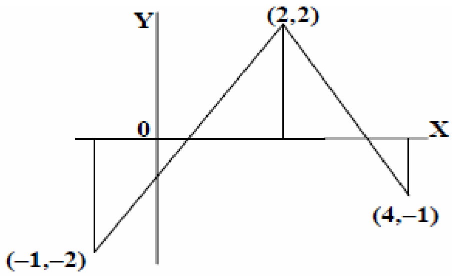
$$f(x) = \frac{1}{x\,(\mathrm{Ln}(x))^2}.$$

(a) Determina el conjunto D sabiendo que está formado por todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ para los que existe $f(x)$.

(b) Usa el cambio de variable $t = \mathrm{Ln}(x)$ para calcular una primitiva de f.

***Ejercicio 2*.-** (2002)

Sea $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ una función cuya derivada tiene por gráfica la de la figura.



(a) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f y determina los valores donde alcanza sus extremos relativos.

(b) Estudia la concavidad y la convexidad de f. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f?

***Ejercicio 3*.-** (2002)

(a) Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ y que su valor mínimo es -12.

(b) Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de inflexión de su gráfica.

***Ejercicio 4*.-** (2002)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x \mid x - 4 \mid$.

(a) Esboza la gráfica de f.

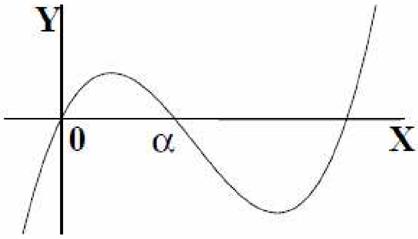
(b) Estudia su derivabilidad en $x = 4$.

(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Ejercicio 5.- (2002)

Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:



i) $F(\alpha) = 0$.

ii) $F'(\alpha) = 0$.

iii) F es creciente en $(0, \alpha)$.

(b) Calcula $F(1)$ siendo $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$.

Ejercicio 6.- (2002)

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ para $x \neq 1$.

(a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

Ejercicio 7.- (2002)

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

(a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

Ejercicio 8.- (2002)

Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que

$$P(0) = P(2) = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^2 P(x)\,dx = \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 9.- (2002)

Calcula una primitiva de la función f definida por $f(x) = \dfrac{2x^2 + 10x}{x^2 + 2x - 3}$ para $x \neq 1$ y $x \neq -3$.

Ejercicio 10.- (2002)

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3ax + b & \text{si} \quad x \leq 0 \\ e^{x(ax+b)} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Determina a y b sabiendo que f es derivable.

Ejercicio 11.- (2002)

De entre todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas, determina las que son tangentes a la curva de ecuación $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$. Calcula los puntos de tangencia correspondientes.

Ejercicio 12.- (2002)

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 e^{\frac{x}{2}}.$$

(a) Calcula

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(b) Calcula los intervalos de monotonía y los extremos locales de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

Ejercicio 13.- (2002)

Determina el valor de las constantes c y d sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$ tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y = 3x + 4$.

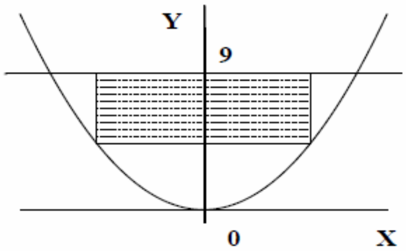
Ejercicio 14.- (2002)

Calcula

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1}\, dx.$$

Ejercicio 15.- (2002)

Considera el recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{3}x^2$ y la recta $y = 9$.



De entre los rectángulos situados como el de la figura, determina el que tiene área máxima.

Ejercicio 16.- (2002)

Sea $\text{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x. Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones $y = 1$ e $y = \text{Ln}(x)$. Calcula su área.

Ejercicio 17.- (2002)

Estudia la derivabilidad de la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3 + x^2} - x & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Calcula la función derivada.

Ejercicio 18.- (2002)

Calcula

$$\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}\,dx$$

Ejercicio 19.- (2002)

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

(a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(c) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f.

Ejercicio 20.- (2002)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = xe^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcula su área.

Ejercicio 21.- (2002)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$$

y sea r la recta de ecuación $2x + y = 6$.

(a) Determina, si es posible, un punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea r.

(b) ¿Hay algún punto de la gráfica de f en el que la recta normal a la gráfica sea r? Justifica la respuesta.

Ejercicio 22.- (2002)

Considera la curva de ecuación

$$y = \frac{x^3+2x}{x^2-2x-3}.$$

(a) Determina sus asíntotas.

(b) ¿Corta la curva a alguna de sus asíntotas en algún punto? Justifica la respuesta.

Ejercicio 23.- (2002)

Estudia la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 24.- (2002)

Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y = -(x-2)^2 - 2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = 3$, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área.

Ejercicio 25.- (2001)

Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante una recta $y = a$. Halla el valor de a.

Ejercicio 26.- (2001)

Sea f la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

(a) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f.

(c) Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 27.- (2001)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 10 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

(a) Esboza la gráfica de f.

(b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

Ejercicio 28.- (2001)

Siendo $\text{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x, calcula

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\text{Ln}(x)} \right)$$

Ejercicio 29.- (2001)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |8 - x^2|$.

(a) Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores).

(b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x = -2$.

Ejercicio 30.- (2001)

Siendo $\text{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x, considera la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\text{Ln}(x)$. Calcula:

(a) $\displaystyle\int f(x)\, dx$

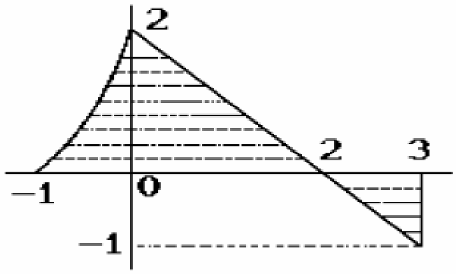
(b) Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1, 0)$.

Ejercicio 31.- (2001)

De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sabe que $f''(x) = x^2 + 2x + 2$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$. Halla la expresión de f.

***Ejercicio 32**.-* (2001)

Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y = \dfrac{2x+2}{1-x}$



***Ejercicio 33**.-* (2001)

Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)\text{sen}x}{x^3 - x^2}$

***Ejercicio 34**.-* (2001)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 1|$

(a) Esboza la gráfica de f.

(b) Estudia la derivabilidad de f.

(c) Calcula $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

***Ejercicio 35**.-* (2001)

Siendo $\text{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x, considera la función $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ x\text{Ln}(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) Determina el valor de a sabiendo que f es derivable.

(b) Calcula $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

***Ejercicio 36**.-* (2001)

Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $5x - y - 3 = 0$.

***Ejercicio 37**.-* (2001)

(a) Determina el valor de las constantes a y b sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ admite recta tangente en el punto $(0, 1)$.

(b) ¿Existen constantes c y d para las cuales la gráfica de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ cx^2 + d & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ admita recta tangente en el punto $(0, 1)$? (Justifica la respuesta)

Ejercicio 38.- (2001)

Calcula

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$ **(b)** $$\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-3x}$$

Ejercicio 39.- (2001)

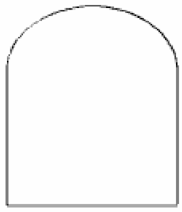
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) Determina los extremos relativos α y β de f con $\alpha < \beta$ y calcula $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Ejercicio 40.- (2001)

Determina las dimensiones de una puerta formada por un rectángulo y un semicírculo (como en la figura), sabiendo que es la que tiene perímetro mínimo entre las que tienen área igual a 2 m^2.



Ejercicio 41.- (2001)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - mx - x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Determina m sabiendo que f es derivable.

(b) Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Ejercicio 42.- (2001)

Un hilo de alambre de 1 m. de longitud se corta en dos trozos formando con uno de ellos una circunferencia y con el otro un cuadrado. Prueba que la suma de las áreas es mínima cuando el lado del cuadrado es el doble que el radio de la circunferencia.

Ejercicio 43.- (2001)

Considera la función $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{16}{(x+1)^2} & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ 4 - x & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(a) Esboza la gráfica de f.

(b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Ejercicio 44.- (2001)

Considera la función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcula el punto de la gráfica de f más cercano al punto $(2,6)$ y calcula también el más alejado.

***Ejercicio 45*.-** (2001)

Considera la función $f : (-\infty, 10) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ |x-5| & \text{si} \quad 2 \leq x < 10 \end{cases}$$

(a) Determina el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a > 0$).

(b) Esboza la gráfica de f.

(c) Estudia la derivabilidad de f.

***Ejercicio 46*.-** (2001)

(a) Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{2} + \cos x$, los ejes de coordenadas y la recta $x = \pi$.

(b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

***Ejercicio 47*.-** (2001)

Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.

***Ejercicio 48*.-** (2001)

Determina α sabiendo que existe y es finito el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

Calcula dicho límite.