ÁLGEBRA EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA – 2011-2013
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS II

Ejercicio 1.- (2013)

a) Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

"Un barco puede transportar vehículos de dos tipos: coches y motos. Las condiciones de la nave obligan a que el número de motos no pueda ser inferior a la cuarta parte del de coches ni superior a su doble; además, la suma del número de motos más el doble del número de coches no puede ser mayor que 100. ¿Cuántos vehículos, como máximo, puede transportar este barco?"

b) Dado el recinto limitado por las inecuaciones

$$y \geq 30, \quad 3x - y \geq 150, \quad 6x + 7y \leq 840,$$

halle en qué puntos de ese recinto la función $F(x, y) = 6x - 2y$ alcanza su valor mínimo.

Ejercicio 2.- (2013)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y A^{2013}.

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + I_2 = 5B^t - A^2$.

Ejercicio 3.- (2013)

Un fabricante elabora dos tipos de anillos a base de oro y plata. Cada anillo del primer tipo precisa 4 g de oro y 2 de plata, mientras que cada uno del segundo necesita 3 g de oro y 1 de plata. Sabiendo que dispone de 48 g de oro y 20 de plata y que los precios de venta de cada tipo de anillo son 150 euros el primero y 100 euros el segundo, ¿cuántos anillos de cada tipo tendría que producir para obtener los ingresos máximos? ¿A cuánto ascenderían estos ingresos?

Ejercicio 4.- (2013)

a) En un problema de programación lineal, la región factible es la región acotada cuyos vértices son $A(2,-1)$, $B(-1,2)$, $C(1,4)$ y $D(5,0)$. La función objetivo es la función $f(x, y) = 2x + 3y + k$, cuyo valor máximo, en dicha región, es igual a 19. Calcule el valor de k e indique dónde se alcanza el máximo y dónde el mínimo.

b) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Resuelva, si es posible, la ecuación matricial $B \cdot A + 2X = C$.

Ejercicio 5.- (2013)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Obtenga a y b sabiendo que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica?

b) Para los valores $a = 3$ y $b = 1$ calcule la matriz X tal que $A \cdot B = 2(X - 3I_2)$.

Ejercicio 6.- (2013)

Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo de plata y 225 kg de hilo de oro. Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B. Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro. Cada tapiz del tipo A se vende a 2000 euros y cada tapiz del tipo B a 3000 euros. Si se vende todo lo que se fabrica,

a) ¿cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?

b) ¿Qué cantidad de hilo de cada clase quedará cuando se fabrique el número de tapices que proporciona el máximo beneficio?

Ejercicio 7.- (2013)

a) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Determine la matriz X que verifica $B \cdot X = 3A + A^t$.

b) Calcule la matriz Y que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 8.- (2013)

Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \leq 20; \quad x + 8y \leq 48; \quad x \geq 2; \quad y \geq 0.$$

a) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

b) Halle los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x, y) = 2x + 12y$ en este recinto e indique dónde se alcanzan.

c) Razone si existen valores (x, y) pertenecientes al recinto para los que $F(x, y) = 100$.

Ejercicio 9.- (2013)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^3.

b) Determine la matriz X para que $A \cdot X + B \cdot C = D$.

Ejercicio 10.- (2013)

Se desea maximizar la función $F(x,y)=14x+8y$ en el recinto dado por:

$$y+3x\geq 9;\quad y\leq -\frac{4}{7}x+14;\quad 5x-2y\leq 15;\quad x\geq 0.$$

a) Represente la región factible del problema.

b) ¿Cuál es el valor máximo de F y la solución óptima del problema?

c) Obtenga un punto de la región factible que no sea el óptimo.

Ejercicio 11.- (2013)

Sea R la región factible definida por las siguientes inecuaciones $x\geq 3y,\quad x\leq 5,\quad y\geq 1$.

a) Razone si el punto (4.5, 1.55) pertenece a R.

b) Dada la función objetivo $F(x,y)=2x-3y$, calcule sus valores extremos en R.

c) Razone si hay algún punto de R donde la función F valga 3.5. ¿Y 7.5?

Ejercicio 12.- (2013)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Resuelva la ecuación matricial $(2A+B)\cdot X=3A-B$.

b) Determine en cada caso la dimensión de la matriz D para que se puedan realizar las siguientes operaciones: $C\cdot D+A,\quad C^t\cdot D\cdot C,\quad D\cdot C^t,\quad C\cdot D\cdot C^t$.

Ejercicio 13.- (2012)

Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix}.$$

a) Halle los valores de a y b para que se verifique $B\cdot C^t=A$.

b) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X-A^2=I_2$.

Ejercicio 14.- (2012)

Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$$3x+4y\geq 28;\quad 5x+2y\leq 42;\quad x-y\geq 0.$$

a) Razone si el punto de coordenadas (7, 3) pertenece al recinto.

b) Represente dicho recinto y halle sus vértices.

c) Calcule el valor máximo de la función $F(x,y)=3x-2y+6$ en el recinto, indicando el punto o puntos donde se alcanza ese máximo.

Ejercicio 15.- (2012)

Halle la matriz X que verifique la ecuación matricial $A^2 \cdot X = A - B \cdot C$, siendo A, B y C las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 16.- (2012)

a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones $7x - y \geq -10$; $x + y \leq 2$; $3x - 5y \leq 14$ y determine sus vértices.

b) Calcule los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x, y) = 2x + 3y$ en dicha región.

Ejercicio 17.- (2012)

Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones, y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros de tela, 2 botones y 1 cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30 euros y el de un pantalón es de 50 euros.

Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio, y determine este beneficio máximo.

Ejercicio 18.- (2012)

Una fábrica produce dos tipos de productos, A y B, que distribuye a tres clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A y 5 de B, el segundo cliente 3 de A y 7 de B, y el tercer cliente 4 de A y 6 de B.

En el mes de febrero el primer cliente y el segundo duplicaron las compras del mes anterior, y el tercer cliente compró de cada producto una unidad más de las que compró en enero. En marzo el primer cliente no compró nada, y el segundo y el tercero compraron lo mismo que en febrero.

a) Para cada mes construya la matriz de dimensión 3x2 correspondiente a las compras de ese mes.

b) Calcule la matriz de compras del trimestre.

c) Si los precios de los productos A y B son, respectivamente, 80 y 100 euros, calcule lo que factura la fábrica en el primer trimestre, por cada cliente y en total.

Ejercicio 19.- (2012)

Sea el recinto limitado por las siguientes inecuaciones:

$$y + 2x \geq 2; \quad 2y - 3x \geq -3; \quad 3y - x \leq 6.$$

a) Represente gráficamente dicho recinto.

b) Calcule sus vértices.

c) Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x - y$ en el recinto anterior, así como dónde lo alcanza.

***Ejercicio 20**.-* (2012)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

a) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X + A^t = I_2$.

b) ¿Qué requisitos mínimos debe cumplir una matriz B para que pueda efectuarse el producto $A\cdot B$?

c) ¿Y para el producto $3\cdot B\cdot A$?

***Ejercicio 21**.-* (2012)

Un comerciante dispone de 1200 euros para comprar dos tipos de manzanas A y B. Las del tipo A las compra a 0.60 euros/kg y las vende a 0.90 euros/kg, mientras que las del tipo B las compra a 1 euro/kg y las vende a 1.35 euros/kg.
Sabiendo que su vehículo a lo sumo puede transportar 1500 kg de manzanas, ¿cuántos kilogramos de cada tipo deberá adquirir para que el beneficio que obtenga sea máximo? ¿Cuál sería ese beneficio?

***Ejercicio 22**.-* (2012)

Los alumnos de 2º de Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.

a) Presente en una matriz M, de dimensión 3x2, las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de un pastel grande y uno pequeño.

b) Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escriba las dos matrices columna, A (20 grandes y 30 pequeños) y B (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.

c) Calcule los productos $M\cdot A$ y $M\cdot B$ e indique si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar y 5 kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?

***Ejercicio 23**.-* (2012)

Una empresa vende tres artículos diferentes A, B y C, cada uno de ellos en dos formatos, grande y normal. En la matriz F se indican las cantidades de los tres artículos, en cada uno de los dos formatos, que ha vendido la empresa en un mes. En la matriz G se indican las ganancias, en euros, que obtiene la empresa por cada unidad que ha vendido de cada artículo en cada formato

$$F=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix}100 & 150 & 80\\ 200 & 250 & 140\end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \leftarrow \text{grande}\\ \leftarrow \text{normal}\end{array} \qquad G=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix}6 & 8 & 5\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \leftarrow \text{grande}\\ \leftarrow \text{normal}\end{array}$$

a) Efectúe los productos $F^t\cdot G$ y $F\cdot G^t$.

b) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas de cada uno de los tres artículos y especifique cuáles son esas ganancias.

c) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas en cada uno de los dos formatos, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total.

Ejercicio 24.- (2012)

En una carpintería se construyen dos tipos de estanterías: grandes y pequeñas, y se tienen para ello $60\,m^2$ de tableros de madera. Las grandes necesitan $4\,m^2$ de tablero y las pequeñas $3\,m^2$. El carpintero debe hacer como mínimo 3 estanterías grandes, y el número de pequeñas que haga debe ser, al menos, el doble del número de las grandes. Si la ganancia por cada estantería grande es de 60 euros y por cada una de las pequeñas es de 40 euros, ¿cuántas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Ejercicio 25.- (2011)

Sean las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Resuelva la ecuación matricial $2 \cdot X - C \cdot D = (I_3 + D) \cdot C$.

b) Si las matrices C y D son las matrices de adyacencia de dos grafos, de vértices a, b, c y 1, 2, 3, respectivamente, haga la representación gráfica de dichos grafos.

Ejercicio 26.- (2011)

Una empresa elabora dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas en una máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad de B necesita 4 horas en la primera máquina y 3 horas en la segunda máquina. Semanalmente se dispone de 100 horas en la primera máquina y de 110 horas en la segunda.

Si la empresa obtiene un beneficio de 70 euros por cada unidad de A, y de 50 euros por cada unidad de B, ¿qué cantidad semanal de cada producto debe producir con objeto de maximizar el beneficio total? ¿Cuál es ese beneficio?

Ejercicio 27.- (2011)

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $(I_3 - A)^3$.

b) Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, determine a y b de manera que $B \cdot C - D = O$, siendo O la matriz nula.

Ejercicio 28.- (2011)

a) Dibuje el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices:

$$y \geq 200 - 2x, \quad x - 100 \leq 3y, \quad x + 2y \leq 600, \quad x \geq 0.$$

b) Sabiendo que A(0, 2), B(1, 4), C(3, 4), D(4, 2) y E(2, 1) son los vértices de una región factible, determine en ella el mínimo y el máximo de la función $F(x, y) = 10x + 5y + 21$, e indique los puntos donde se alcanzan.

Ejercicio 29.- (2011)

a) De una matriz cuadrada, A, de orden 3 se conocen los siguientes elementos

$$a_{12}=a_{21}=-2,\quad a_{13}=a_{31}=0,\quad a_{23}=a_{32}=1.$$

Determine los demás elementos de la matriz A sabiendo que debe cumplirse la ecuación

$$A\cdot B=C^t,\text{ donde } B^t=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

b) Calcule $2D^2$, siendo $D=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 3 & -5\end{pmatrix}$.

Ejercicio 30.- (2011)

Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones:

$$13x+8y\le 600;\quad 3(x-2)\ge 2(y-3);\quad x-4y\le 0.$$

a) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

b) Calcule el valor máximo en dicho recinto de la función $F(x,y)=65x+40y$, indicando dónde se alcanza.

Ejercicio 31.- (2011)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^2-B\cdot C^t$.

b) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X+B=2\cdot C$.

Ejercicio 32.- (2011)

Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$$x+y\le 20,\quad 3x+5y\le 70,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0.$$

a) Razone si el punto de coordenadas (4.1, 11.7) pertenece al recinto.

b) Represente dicho recinto y calcule sus vértices.

c) ¿Dónde alcanzará la función $F(x,y)=0.6x+y$ sus valores extremos y cuáles serán éstos?

Ejercicio 33.- (2011)

Se considera el recinto R del plano, determinado por las siguientes inecuaciones:

$$x+y\ge 2,\quad x+3y\le 15,\quad 3x-y\le 15,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0.$$

a) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

b) Halle los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x,y)=3x+y$ en dicho recinto.

c) Razone si existen puntos (x,y) del recinto, para los que $F(x,y)=30$.

Ejercicio 34.- (2011)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Efectúe, si es posible, los siguientes productos:

$$A\cdot A^t;\quad A^t\cdot A;\quad A\cdot B$$

b) Resuelva la siguiente ecuación matricial $A\cdot A^t\cdot X=B$

***Ejercicio 35*.-** (2011)

a) Represente gráficamente el recinto determinado por las siguientes inecuaciones $6x - y + 9 \geq 0$, $2x + 5y - 13 \leq 0$, $2x - 3y - 5 \leq 0$.

b) Determine los vértices del recinto anterior.

c) Halle los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 3x - 2y + 3$ en el recinto del primer apartado, y especifique en qué puntos los alcanza.

***Ejercicio 36*.-** (2011)

a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $N^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, razone cuáles de las siguientes operaciones tienen sentido y efectúe las que puedan realizarse:

$$M + N^t, \quad M^t \cdot N, \quad M \cdot N.$$

b) Un industrial cafetero produce dos tipos de café, natural y descafeinado, en tres modalidades cada uno, A, B y C. Se han anotado en la matriz P los pesos, en kg, del café que el industrial produce de cada una de las modalidades de cada tipo, y en la matriz Q los precios a los que vende el kg de cada producto final:

$$P: \begin{array}{c} \\ \text{natural} \\ \text{descafein.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 550 & 400 & 240 \\ 260 & 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array} \qquad Q: \begin{array}{c} \\ \text{natural} \\ \text{descafein.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2.20 & 2.75 & 2.50 \\ 3.20 & 3.90 & 3.60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto $P \cdot Q^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante.