ÁLGEBRA EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA – 2005-2007
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS II

***Ejercicio 1*.-** (2007)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2=A$.

b) Igualmente para que $B+C=A^{-1}$.

c) Determine x para que $A+B+C=3\cdot I_2$.

***Ejercicio 2*.-** (2007)

Un Ayuntamiento concede licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B.

Para ello la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100000 euros y la de tipo B 300000 euros.

Si el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20000 euros y por una de tipo B a 40000 euros, ¿cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener un beneficio máximo?

***Ejercicio 3*.-** (2007)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$.

a) Determine la matriz inversa de A.

b) Halle los valores de x, y, z para los que se cumple $A\cdot X=Y$.

***Ejercicio 4*.-** (2007)

Consideramos el recinto del plano limitado por las siguientes inecuaciones:

$$y-x\le 4;\quad y+2x\ge 7;\quad -2x-y+13\ge 0;\quad x\ge 0;\quad y\ge 0.$$

a) Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) Halle en qué puntos de ese recinto alcanza los valores máximo y mínimo la función $F(x,y)=4x+2y-1$.

Ejercicio 5.- (2007)

De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

$$4x + 3y \geq 60, \quad y \leq 30, \quad x \leq \frac{10+y}{2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

a) Represente gráficamente la región factible del problema y calcule sus vértices.

b) Maximice en esa región factible la función objetivo $F(x, y) = x + 3y$.

c) ¿Pertenece el punto (11, 10) a la región factible?

Ejercicio 6.- (2007)

a) Halle la matriz A que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$.

b) Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes: $x - 3y + 2z = 0$; $-2x + y - z = 0$; $x - 8y + 5z = 0$.

Ejercicio 7.- (2007)

a) Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Calcule el valor de b para que $B^2 = I_2$.

b) Resuelva y clasifique el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 + z \\ 2x + z & = & 2 + y \\ y & = & z \end{array}\right\}$.

Ejercicio 8.- (2007)

Una empresa fabrica lunas para coches. Cada luna delantera requiere 2.5 m^2 de cristal, mientras que cada luna trasera requiere 2 m^2.

La producción de una luna delantera precisa 0.3 horas de máquina de corte y cada luna trasera 0.2 horas. La empresa dispone de 1750 m^2 de cristal por semana y 260 horas semanales de máquina de corte.

Para adaptarse a la demanda habitual, la empresa fabrica siempre, como mínimo, el doble de lunas delanteras que de lunas traseras.

Determine cuántas lunas de cada tipo debe fabricar semanalmente la empresa para que el número total de lunas sea máximo.

Ejercicio 9.- (2007)

a) Un taller de carpintería ha vendido 15 muebles, entre sillas, sillones y butacas, por un total de 1600 euros. Se sabe que cobra 50 euros por cada silla, 150 euros por cada sillón y 200 euros por cada butaca, y que el número de butacas es la cuarta parte del número que suman los demás muebles.

Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones adecuado que permite calcular cuántos muebles de cada clase ha vendido ese taller.

b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B^t = B$, donde X es una matriz cuadrada de orden 2.

Ejercicio 10.- (2007)

La candidatura de un determinado grupo político para las elecciones municipales debe cumplir los siguientes requisitos: el número total de componentes de la candidatura debe estar comprendido entre 6 y 18 y el número de hombres (x) no debe exceder del doble del número de mujeres (y).

a) Represente el recinto asociado a estas restricciones y calcule sus vértices.

b) ¿Cuál es el mayor número de hombres que puede tener una candidatura que cumpla esas condiciones?

Ejercicio 11.- (2007)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $B \cdot B^t - A \cdot A^t$.

b) Halle la matriz X que verifica $(A \cdot A^t) \cdot X = B$.

Ejercicio 12.- (2007)

Una fábrica produce bombillas de bajo consumo que vende a 1 euro cada una, y focos halógenos que vende a 1.5 euros. La capacidad máxima de fabricación es de 1000 unidades, entre bombillas y focos, si bien no se pueden fabricar más de 800 bombillas ni más de 600 focos.

Se sabe que la fábrica vende todo lo que produce. Determine cuántas bombillas y cuántos focos debe producir para obtener los máximos ingresos posibles y cuáles serían éstos.

Ejercicio 13.- (2006)

Una imprenta local edita periódicos y revistas. Para cada periódico necesita un cartucho de tinta negra y otro de color, y para cada revista uno de tinta negra y dos de color. Si sólo dispone de 800 cartuchos de tinta negra y 1100 de color, y si no puede imprimir más de 400 revistas, ¿cuánto dinero podrá ingresar como máximo, si vende cada periódico a 0.9 euros y cada revista a 1.2 euros?

Ejercicio 14.- (2006)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^{-1} \cdot (2B + 3I_2)$.

b) Determine la matriz X para que $X \cdot A = A + I_2$.

Ejercicio 15.- (2006)

a) Represente gráficamente el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 3(y-3);\ \ 2x+3y \leq 36;\ \ x \leq 15;\ \ x \geq 0;\ \ y \geq 0.$$

b) Calcule los vértices del recinto.

c) Obtenga el valor máximo de la función $F(x,y)=8x+12y$ en este recinto e indique dónde se alcanza.

Ejercicio 16.- (2006)

El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 euros que nos ha dado es el doble del de 20 euros.

Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero.

Ejercicio 17.- (2006)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.

b) Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.

c) Determine x para que $A \cdot B = I_2$.

Ejercicio 18.- (2006)

a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x \geq 0;\quad y \geq 0;\quad -x+2y \leq 6;\quad x+y \leq 6;\quad x \leq 4.$$

b) Calcule el máximo de la función $F(x,y)=2x+2y+1$ en la región anterior e indique dónde se alcanza.

Ejercicio 19.- (2006)

a) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Calcule $A^{-1} \cdot (B - A^t)$.

b) Resuelva y clasifique el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 20.- (2006)

Un laboratorio farmacéutico vende dos preparados, A y B, a razón de 40 y 20 euros el kg, respectivamente. Su producción máxima es de 1000 kg de cada preparado. Si su producción total no puede superar los 1700 kg, ¿cuál es la producción que maximiza sus ingresos? Calcule dichos ingresos máximos.

Ejercicio 21.- (2006)

Sea la región definida por las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\geq 1; \quad -x+2y\geq 0; \quad y\leq 2.$$

a) Represente gráficamente dicha región y calcule sus vértices.

b) Determine en qué puntos la función $F(x,y)=3x-6y+4$ alcanza sus valores extremos y cuáles son éstos.

Ejercicio 22.- (2006)

Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix}; \quad D=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}; \quad E=\begin{pmatrix}-2\\-5\\5\end{pmatrix}.$$

Calcule los valores de los números reales x, y, z, para que se verifique la siguiente igualdad entre matrices: $E-x\cdot A\cdot B=y\cdot C+z\cdot D$.

Ejercicio 23.- (2006)

a) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2&2\\-5&-4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}$.

Explique qué dimensión debe tener la matriz X para que tenga sentido la ecuación matricial $X\cdot A+2B=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}$. Resuelva dicha ecuación.

b) Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones que permita encontrar la solución del siguiente problema:

"En un examen de Matemáticas que constaba de tres problemas, un alumno obtuvo una calificación total de 7.2. La puntuación del primer problema fue un 40 % más que la del segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones del primero y el segundo. ¿Cuál fue la puntuación de cada problema?"

Ejercicio 24.- (2006)

Se considera el recinto definido por las inecuaciones

$$y-x\leq 4; \quad x-y\leq 4; \quad x+y\leq 12; \quad x\geq 0; \quad y\geq 0.$$

a) Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) Dada la función objetivo $F(x,y)=\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y$, determine los valores máximo y mínimo de F y los puntos del recinto donde se alcanzan.

Ejercicio 25.- (2005)

a) Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 17 \\ 4x & + & 5y & + & z & = & 17 \end{array}$$

b) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos?

Ejercicio 26.- (2005)

a) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x-y\le 1;\quad x+2y\ge 7;\quad x\ge 0;\quad y\le 5.$$

b) Determine los vértices de este recinto.

c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo

$$F(x,y)=2x+4y-5$$

y en qué puntos alcanza dichos valores?

Ejercicio 27.- (2005)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calcule la matriz $C=B\cdot A-A^t\cdot B^t$.

b) Halle la matriz X que verifique $A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

Ejercicio 28.- (2005)

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$2x-3y\le 6;\ \ x\ge 2y-4;\ \ x+y\le 8;\ \ x\ge 0;\ \ y\ge 0.$$

a) Dibuje la región que definen y calcule sus vértices.

b) Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x,y)=2x+3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y calcule dichos valores.

Ejercicio 29.- (2005)

a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x+2y\ge 6,\ \ x\le 10-2y,\ \ \frac{x}{12}+\frac{y}{3}\ge 1,\ \ x\ge 0.$$

b) Calcule el máximo y el mínimo de la función $F(x,y)=4-3x-6y$ en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan.

Ejercicio 30.- (2005)

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2\\ 2x & & & - & z & = & 0\\ & - & 2y & + & z & = & 4\end{array}$$

a) Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto a sus soluciones.

b) ¿Tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema? Justifíquelo.

c) Obtenga, si existe, una solución del sistema que verifique $x=2y$.

Ejercicio 31.- (2005)

a) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

De las siguientes operaciones, algunas no se pueden realizar; razone por qué. Efectúe las que se puedan realizar.

$$A+B\ ;\ A^t+B\ ;\ A\cdot B\ ;\ A\cdot B^t.$$

b) Resuelva y clasifique, atendiendo al número de soluciones, el sistema:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 32.- (2005)

El estadio del Mediterráneo, construido para la celebración de los "Juegos Mediterráneos Almería 2005", tiene una capacidad de 20000 espectadores.
Para la asistencia a estos juegos se han establecido las siguientes normas:
El número de adultos no debe superar al doble del número de niños; el número de adultos menos el número de niños no será superior a 5000.
Si el precio de la entrada de niño es de 10 euros y la de adulto 15 euros ¿cuál es la composición de espectadores que proporciona mayores ingresos? ¿A cuánto ascenderán esos ingresos?

Ejercicio 33.- (2005)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & x\end{pmatrix}$.

a) Determine el valor de x en la matriz B para que se verifique la igualdad

$$A\cdot B=B\cdot A.$$

b) Obtenga la matriz C tal que

$$A^t\cdot C=I_2.$$

Ejercicio 34.- (2005)

Sea el sistema de inecuaciones siguiente:

$$x+y\le 600,\ \ x\le 500,\ \ y\le 3x,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0.$$

a) Represente gráficamente el conjunto de soluciones del sistema y calcule sus vértices.

b) Halle el punto del recinto anterior en el que la función $F(x,y)=38x+27y$ alcanza su valor máximo.

Ejercicio 35.- (2005)

Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros.
Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio.

Ejercicio 36.- (2005)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule, si existe, la matriz inversa de B .

b) Si $A \cdot B = B \cdot A$ y $A + A^t = 3 \cdot I_2$, calcule x e y.