

ÁLGEBRA EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA 2003-2006

Ejercicio 1.- (2006)

Sean $\vec{u} = (x, 2, 0)$, $\vec{v} = (x, -2, 1)$ y $\vec{w} = (2, -x, -4x)$ tres vectores de \mathbb{R}^3 .

- (a) Determina los valores de x para los que los vectores son linealmente independientes.
(b) Halla los valores de x para los que los vectores son ortogonales dos a dos.

Ejercicio 2.- (2006)

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x + y - z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{array} \right\}$$

- (a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .
(b) Resuélvelo para $\lambda = 2$.

Ejercicio 3.- (2006)

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x - y - z = -1 \\ x + \lambda y + z = 4 \\ x + y + z = \lambda + 2 \end{array} \right\}$$

- (a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .
(b) Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

Ejercicio 4.- (2006)

Resuelve $AB^t X = -2C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.- (2006)

Considera $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

- (a) Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.
(b) Calcula, en función de a , los determinantes de $2A$ y A^t , siendo A^t la traspuesta de A .
(c) ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica? Razona la respuesta.

Ejercicio 6.- (2006)

Resuelve

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7.- (2006)

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Determina los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A tiene inversa.
(b) Para $m = 0$ y siendo $X = (x \ y \ z)$, resuelve $XA = (3 \ 1 \ 1)$.

Ejercicio 8.- (2006)

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden dos.

- (a) Calcula los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $|A - \lambda I| = 0$.
(b) Calcula $A^2 - 7A + 10I$.

Ejercicio 9.- (2006)

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + \lambda y + z &= 8 \\ \lambda x + y + \lambda z &= 10 \end{aligned} \right\}$$

- (a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .
(b) Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

Ejercicio 10.- (2006)

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Halla el valor de $m \in \mathbb{R}$ para el que la matriz A no tiene inversa.
(b) Resuelve $AX = O$ para $m = 3$.

Ejercicio 11.- (2006)

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, B = (2 \ 1) \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

- (a) Halla, si existe, la matriz inversa de $AB + C$.
- (b) Calcula, si existen, los números reales x e y que verifican: $C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12.- (2006)

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{aligned} x + y - z &= -4 \\ 3x + \lambda y + z &= \lambda - 1 \\ 2x + \lambda y &= -2 \end{aligned} \right\}$$

- (a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .
- (b) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

Ejercicio 13.- (2005)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala.
- (b) Determina la matriz X que cumple que $A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de B .

Ejercicio 14.- (2005)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ -\lambda x + 3y + z &= -7 \\ x + 2y + (\lambda + 2)z &= -5 \end{aligned} \right\}.$$

- (a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .
- (b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Ejercicio 15.- (2005)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ mx + 2z &= 0 \\ my - z &= m \end{aligned} \right\}.$$

- (a) Determina los valores de m para los que el sistema tiene una única solución. Calcula dicha solución para $m = 1$.
- (b) Determina los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcula dichas soluciones.
- (c) ¿Hay algún valor de m para el que el sistema no tiene solución?

Ejercicio 16.- (2005)

Halla la matriz X que cumple que

$$A \cdot X \cdot A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 17.- (2005)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} (b+1)x + y + z &= 2 \\ x + (b+1)y + z &= 2 \\ x + y + (b+1)z &= -4 \end{aligned} \right\}.$$

- (a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro b .
(b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Ejercicio 18.- (2005)

Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$.

- (a) Determina el valor de b para el que $A^2 - 2A + I = O$.
(b) Para $b = 2$ halla la matriz X que cumple que $A \cdot X - 2A^t = O$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A .

Ejercicio 19.- (2005)

Sea I la matriz identidad de orden 2 y sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Halla los valores de x para los que la matriz $A - xI$ no tiene inversa.
(b) Halla los valores de a y b para los que $A^2 + aA + bI = O$.

Ejercicio 20.- (2005)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 5x + 2y - z &= 0 \\ x + y + (m+4)z &= my \\ 2x - 3y + z &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

- (a) Determina los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.
(b) Resuelve el sistema cuando tenga infinitas soluciones y da una solución en la que $z = 19$.

Ejercicio 21.- (2005)

Álvaro, Marta y Guillermo son tres hermanos. Álvaro dice a Marta: si te doy la quinta parte del dinero que tengo, los tres hermanos tendremos la misma cantidad. Calcula lo que tiene cada uno si entre los tres juntan 84 euros.

Ejercicio 22.- (2005)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 2 \\ mx + y + z = m \end{array} \right\}.$$

(a) ¿Para qué valor de m el sistema tiene al menos dos soluciones?

(b) ¿Para qué valores de m el sistema admite solución en la que $x = 1$?

Ejercicio 23.- (2005)

En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.

Ejercicio 24.- (2005)

Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los

siguientes determinantes:

(a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$.

(b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$.

(c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$.

Ejercicio 25.- (2004)

Se sabe que el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + \alpha y = 1 \\ x + \alpha z = 1 \\ y + z = \alpha \end{array} \right\}$$

tiene una única solución.

(a) Prueba que $\alpha \neq 0$.

(b) Halla la solución del sistema.

Ejercicio 26.- (2004)

Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6,$$

calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a)
$$\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}.$$

(b)
$$\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}.$$

(c)
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x - a & 2y - b & 2z - c \end{vmatrix}.$$

Ejercicio 27.- (2004)

Determina a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ -x + y + 2z = -1 \\ ax + by + z = 4 \end{array} \right\}$$

tiene al menos dos soluciones distintas.

Ejercicio 28.- (2004)

(a) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a ?

(b) Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 29.- (2004)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + \lambda y = \lambda \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z = 1 \\ \lambda x + y = 2 + \lambda \end{array} \right\}.$$

(a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

(b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Ejercicio 30.- (2004)

Un tendero dispone de tres tipos de zumo en botellas que llamaremos A , B y C . El mencionado tendero observa que si vende a 1€ las botellas del tipo A , a 3€ las del tipo B y a 4€ las del tipo C , entonces obtiene un total de 20€. Pero si vende a 1€ las del tipo A , a 3€ las del B y a 6€ las del C , entonces obtiene un total de 25€.

- (a) Plantea el sistema de ecuaciones que relaciona el número de botellas de cada tipo que posee el tendero.
- (b) Resuelve dicho sistema.
- (c) ¿Puede determinarse el número de botellas de cada tipo de que dispone el tendero? (Ten en cuenta que el número de botellas debe ser entero y positivo).

Ejercicio 31.- (2004)

Denotamos por M^t a la matriz transpuesta de una matriz M .

- (a) Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y que $\det(A) = 4$, calcula los siguientes determinantes:

$$\det(-3A^t) \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix}.$$

- (b) Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea B una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$. Calcula $\det(B)$.
- (c) Sea C una matriz cuadrada tal que $C^{-1} = C^t$. ¿Puede ser $\det(C) = 3$? Razona la respuesta.

Ejercicio 32.- (2004)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} mx + 2y + z = 2 \\ x + my = m \\ 2x + mz = 0 \end{array} \right\}.$$

- (a) Determina los valores de m para los que $x = 0$, $y = 1$ y $z = 0$ es solución del sistema.
- (b) Determina los valores de m para los que el sistema es incompatible.
- (c) Determina los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 33.- (2004)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 13y + 2z = 0 \\ (a + 2)x - 12y + 12z = 0 \end{array} \right\}.$$

Determina el valor a para que tenga soluciones distintas de la solución trivial y resuélvelo para dicho valor de a .

Ejercicio 34.- (2004)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$. Calcula, indicando las propiedades que utilices, los

siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{31} & a_{22} - a_{32} & a_{23} - a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Ejercicio 35.- (2004)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} mx - y &= 1 \\ x - my &= 2m - 1 \end{aligned} \right\}.$$

- (a) Clasifica el sistema según los valores de m .
- (b) Calcula los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que $x = 3$.

Ejercicio 36.- (2004)

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcula $A \cdot B$, $A \cdot C$, $A^t \cdot B^t$ y $C^t \cdot A^t$, siendo A^t , B^t y C^t las matrices transpuestas de A , B y C , respectivamente.
- (b) Razona cuáles de las matrices A , B , C y $A \cdot B$ tienen matriz inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

Ejercicio 37.- (2003)

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial $A \cdot X + 2B = 3C$?
- (b) Resuelve la ecuación matricial dada para $m = 1$.

Ejercicio 38.- (2003)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- (a) Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.
- (b) Resuelve el sistema $A \cdot X = 3X$ e interpreta geoméricamente el conjunto de todas sus soluciones.

Ejercicio 39.- (2003)

Determina razonadamente los valores de m para los que el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = mx \\ x + 2y + z = my \\ x + 2y + 4z = mz \end{array} \right\}$$

tiene más de una solución.

Ejercicio 40.- (2003)

- (a) Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada A de orden 3 vale -2 . ¿Cuánto vale el determinante de la matriz $4A$?

- (b) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de λ la matriz $3B + B^2$ no tiene inversa?

Ejercicio 41.- (2003)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

halla la matriz X que cumple que $A \cdot X = (B \cdot A^t)^t$.

Ejercicio 42.- (2003)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (a) Determina los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.
- (b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 2$.

Ejercicio 43.- (2003)

Considera los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 2, a)$ y $\vec{w} = (2, 0, 0)$.

- (a) Halla los valores de a para los que los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes.
- (b) Determina los valores de a para los que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{w}$ son ortogonales.

Ejercicio 44.- (2003)

Sean C_1 , C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

- (a) El determinante de A^3 .
- (b) El determinante de A^{-1} .
- (c) El determinante de $2A$.
- (d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3C_1 - C_3$, $2C_3$ y C_2 .

Ejercicio 45.- (2003)

Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x + my - z &= -2 + 2my \\ mx - y + 4z &= 5 + 2z \\ 6x - 10y - z &= -1. \end{aligned} \right\}$$

- (a) Discute las soluciones del sistema según los valores de m .
- (b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Ejercicio 46.- (2003)

Considera la matriz

$$M(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde x es un número real.

- (a) ¿Para qué valores de x existe $(M(x))^{-1}$? Para los valores de x obtenidos, calcula la matriz $(M(x))^{-1}$.
- (b) Resuelve, si es posible, la ecuación $M(3) \cdot M(x) = M(5)$.

Ejercicio 47.- (2003)

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- (a) ¿Para qué valores de m existe la matriz A^{-1} ?
- (b) Siendo $m = 2$, calcula A^{-1} y resuelve el sistema $A \cdot X = B$.
- (c) Resuelve el sistema $A \cdot X = B$ para $m = 1$.

Ejercicio 48.- (2003)

Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A , B y C . Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A , se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.