



Instrucciones:

- Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

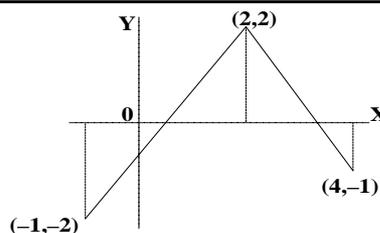
Opción A

Ejercicio 1. Sea $\text{Ln}(x)$ el logaritmo neperiano de x y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x (\text{Ln}(x))^2}.$$

- [1 punto] Determina el conjunto D sabiendo que está formado por todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ para los que existe $f(x)$.
- [1'5 puntos] Usa el cambio de variable $t = \text{Ln}(x)$ para calcular una primitiva de f .

Ejercicio 2. Sea $f : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ una función cuya derivada tiene por gráfica la de la figura.



- [1'5 puntos] Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f y determina los valores donde alcanza sus extremos relativos.
- [1 punto] Estudia la concavidad y la convexidad de f . ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f ?

Ejercicio 3. [2'5 puntos] En el sector de las aceitunas sin hueso, tres empresas A, B y C, se encuentran en competencia. Calcula el precio por unidad dado por cada empresa sabiendo que verifican las siguientes relaciones:

- El precio de la empresa A es 0'6 euros menos que la media de los precios establecidos por B y C.
- El precio dado por B es la media de los precios de A y C.
- El precio de la empresa C es igual a 2 euros mas $\frac{2}{5}$ del precio dado por A mas $\frac{1}{3}$ del precio dado por B.

Ejercicio 4. Considera los puntos $A(1, -3, 2)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(1, 1, -1)$.

- [1'25 puntos] ¿Pueden ser A, B y C vértices consecutivos de un rectángulo? Justifica la respuesta.
- [1'25 puntos] Halla, si es posible, las coordenadas de un punto D para que el paralelogramo ABCD sea un rectángulo.



Instrucciones:

- a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.

- (a) [1'5 puntos] Determina la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ y que su valor mínimo es -12 .
- (b) [1 punto] Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de inflexión de su gráfica.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x |x - 4|$.

- (a) [0'75 puntos] Esboza la gráfica de f .
- (b) [0'75 puntos] Estudia su derivabilidad en $x = 4$.
- (c) [1 punto] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Ejercicio 3. [2'5 puntos] Considera los puntos

$$A(1, -1, 2), \quad B(1, 3, 0) \quad \text{y} \quad C(0, 0, 1).$$

Halla el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por B y C .

Ejercicio 4. [2'5 puntos] Sean:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 - \alpha & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Determina α , si es posible, para que los sistemas de ecuaciones (dados en forma matricial)

$$AX = b, \quad BX = c$$

tengan infinitas soluciones (cada uno de ellos).



Instrucciones:

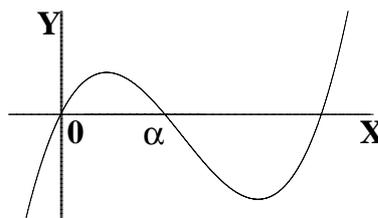
- a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1. Consideremos $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- (a) [1'5 puntos] Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

- i) $F(\alpha) = 0$.
- ii) $F'(\alpha) = 0$.
- iii) F es creciente en $(0, \alpha)$.



- (b) [1 punto] Calcula $F(1)$ siendo $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$.

Ejercicio 2. Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ para $x \neq 1$.

- (a) [1'5 puntos] Calcula las asíntotas de la gráfica de f .
- (b) [1 punto] Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

Ejercicio 3. [2'5 puntos] Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

Ejercicio 4. Los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(-1, 0, -2)$ son vértices opuestos de un cuadrado.

- (a) [1 punto] Calcula el área del cuadrado.
- (b) [1'5 puntos] Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos A y B que pasa por su punto medio.



Instrucciones:

- a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1. Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

- (a) [1 punto] Calcula las asíntotas de la gráfica de f .
- (b) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que

$$P(0) = P(2) = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^2 P(x) dx = \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 3. [2'5 puntos] Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que

$$\det(A) = -7 \quad \text{y} \quad A \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. [2'5 puntos] Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$



Instrucciones:

- a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1. [2'5 puntos] Calcula una primitiva de la función f definida por $f(x) = \frac{2x^2 + 10x}{x^2 + 2x - 3}$ para $x \neq 1$ y $x \neq -3$.

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ e^{x(ax+b)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determina a y b sabiendo que f es derivable.

Ejercicio 3. Considera

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) [1 punto] ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A ?
 - (b) [1'5 puntos] Resuelve, para $m = 2$, el sistema de ecuaciones $AX = C$.
-

Ejercicio 4.[2'5 puntos] Determina la recta que no corta al plano de ecuación $x - y + z = 7$ y cuyo punto más cercano al origen es $(1, 2, 3)$.



Instrucciones:

- a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1. [2'5 puntos] De entre todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas, determina las que son tangentes a la curva de ecuación $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 4$. Calcula los puntos de tangencia correspondientes.

Ejercicio 2. Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 e^{\frac{x}{2}}.$$

(a) [1 punto] Calcula

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

(b) [1'5 puntos] Calcula los intervalos de monotonía y los extremos locales de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

Ejercicio 3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x - my + z &= 1 \\ x + y + z &= m + 2 \\ x + y + mz &= 4 \end{aligned} \right\}$$

(a) [1'5 puntos] Clasifícalo según los valores del parámetro m .

(b) [1 punto] Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Ejercicio 4. [2'5 puntos] Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$ que está más cercano al punto $P(1, -1, 0)$.



Instrucciones:

- a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1. [2'5 puntos] Determina el valor de las constantes c y d sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$ tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta $y = 3x + 4$.

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Calcula

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} dx.$$

Ejercicio 3. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) [1 punto] Calcula la matriz inversa de A .
- (b) [1 punto] Calcula A^{127} y A^{128} .
- (c) [0'5 puntos] Determina x e y tal que $AB = BA$.

Ejercicio 4. Considera los puntos

$$A(1, 1, 1), \quad B(2, 2, 2), \quad C(1, 1, 0) \quad \text{y} \quad D(1, 0, 0).$$

- (a) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos A y B y no corta a la recta determinada por C y D .
- (b) [1'25 puntos] Halla las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos AB y CD .

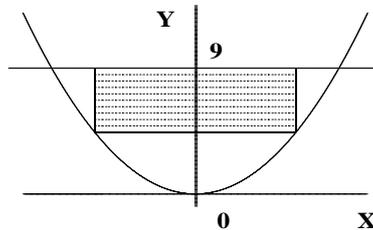


Instrucciones:

- a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1. [2'5 puntos] Considera el recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{3}x^2$ y la recta $y = 9$.



De entre los rectángulos situados como el de la figura, determina el que tiene área máxima.

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Sea $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x . Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones $y = 1$ e $y = \ln(x)$. Calcula su área.

Ejercicio 3. Sea π el plano de ecuación $3x - y + 2z - 4 = 0$,

- (a) [1 punto] Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a π y pasa por el punto $P(1, -2, 2)$.
- (b) [1'5 puntos] Halla la ecuación del plano π_2 perpendicular a ambos que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) [1 punto] Halla los valores de a para los que la matriz $3A$ tiene inversa.
- (b) [1'5 puntos] Calcula, si es posible, la inversa de la matriz A^2 para $a = 0$.



Instrucciones:

- a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1. [2'5 puntos] Estudia la derivabilidad de la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{x^2}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula la función derivada.

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Calcula

$$\int_0^1 \frac{3x^3 + 1}{x^2 - x - 2} dx$$

Ejercicio 3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 3 \\ 2x + my + z = m \\ 3x + 5y + mz = 5 \end{array} \right\}$$

- (a) [1 punto] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga una y sólo una solución.
- (b) [1 punto] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga al menos dos soluciones.
- (c) [0'5 puntos] Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema no tenga solución.

Ejercicio 4. Considera el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ y el punto $A(-1, -4, 2)$.

- (a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A .
- (b) [1'5 puntos] Halla el punto simétrico de A respecto de π .



Instrucciones:

- a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

- (a) [1 punto] Calcula las asíntotas de la gráfica de f .
- (b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- (c) [0'5 puntos] Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f .

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = xe^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcula su área.

Ejercicio 3. [2'5 puntos] Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX = X - B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. [2'5 puntos] Calcula el área del triángulo de vértices

$$A(1, 1, 2), \quad B(1, 0, -1) \quad \text{y} \quad C(1, -3, 2).$$



Instrucciones:

- a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$$

y sea r la recta de ecuación $2x + y = 6$.

- (a) [1'5 puntos] Determina, si es posible, un punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea r .
- (b) [1 punto] ¿Hay algún punto de la gráfica de f en el que la recta normal a la gráfica sea r ? Justifica la respuesta.

Ejercicio 2. Considera la curva de ecuación

$$y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$$

- (a) [1'5 puntos] Determina sus asíntotas.
- (b) [1 punto] ¿Corta la curva a alguna de sus asíntotas en algún punto? Justifica la respuesta.

Ejercicio 3. Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M . Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \quad 4 \quad 3) \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) [1'5 puntos] Calcula $(AB)^t$ y $(BA)^t$.
- (b) [1 punto] Determina una matriz X que verifique la relación $\frac{1}{2}X + (AB)^t = C$.

Ejercicio 4. [2'5 puntos] Sabiendo que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - 2y - z = a \\ 2x + z = a \end{cases}$$

se cortan, determina a y el punto de corte.



Instrucciones:

- a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.
- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) La puntuación de cada pregunta está indicada en las mismas.
- d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.
- e) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica), pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1. [2'5 puntos] Estudia la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y = -(x - 2)^2 - 2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = 3$, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área.

Ejercicio 3. [2'5 puntos] Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} k & x & 1 + ax \\ 2k & y & 2 + ay \\ 3k & z & 3 + az \end{pmatrix}$$

y enuncia las propiedades que hayas usado.

Ejercicio 4. Considera la recta r y el plano π siguientes

$$r \equiv \begin{cases} x + z - a = 0 \\ y - az - 1 = 0 \end{cases}, \quad \pi \equiv 2x - y = b.$$

(a) [1'5 puntos] Determina a y b sabiendo que r está contenida en π .

(b) [1 punto] Halla la ecuación de un plano que contenga r y sea perpendicular a π .
