HOJA 4. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

- Ejemplo: $f(x) = (x+1)\cdot e^{-x}$
  - $\text{Dom} f = \mathbb{R}$
  - No periódica
  - No simétrica
  - Asíntotas: $\nexists$ A.V., $\exists$ A.H. $\lim_{x\to+\infty}(x+1)\cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^{x}} = 0$

    $y=0$ es A.H. por la derecha

    $\lim_{x\to-\infty}(x+1)\cdot e^{-x} = \lim_{x\to\infty}(-x+1)e^{x} = -\infty\cdot\infty = -\infty$

    $f(x) - b = \frac{x+1}{e^{x}} \to 0^{+}$ si $x\to+\infty$

    $\nexists$ A. oblicuas

    $m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)e^{-x}}{x}$

    $= \lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{e^{x}\cdot x} = 0$
  - Puntos de corte con los ejes:

    $x=0 \Rightarrow y=(0+1)\cdot e^{0} = 1 \qquad (0,1)$

    $y=0 \Rightarrow 0=(x+1)\cdot e^{0}\ ;\quad x=-1 \qquad (-1,0)$
  - Monotonía. Extremos relativos.

    $f'(x) = e^{-x} + (x+1)\cdot e^{-x}\cdot(-1)$

    $f'(x) = -x\cdot e^{-x}$

    $f'(x)=0 \iff x=0$ pto crítico

	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	−	
f	↗	↘	

  - $(0, f(0)) = (0,1)$ es MÁX. RELATIVO
  - f estrict. creciente en $(-\infty,0)$
  - f " decreciente en $(0,+\infty)$

- Curvatura. Ptos de inflexión

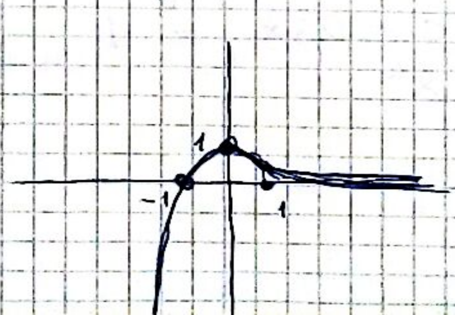
  $f''(x) = -1\cdot e^{-x} + (-x)e^{-x}\cdot(-1) = +e^{-x}(x-1)$

  $f''(x) = e^{-x}(x-1)$

  $f''(x)=0 \iff x=1$ posible P.I.

	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	−	+	
f	∩	∪	

  - Cóncava en $(-\infty,1)$
  - Convexa en $(1,+\infty)$
  - Pto de inflexión cóncavo-convexo en $(1, f(1))$ $\left(1, \frac{2}{e}\right) \simeq (1, 0'74)$
- Tabla valores
- Gráfica:



• Ej 2: $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

- $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$
- No periódica
- No simétrica
- Asíntotas: $\boxed{x=0}$ es A.V. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\not\exists$ A.H. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{-x \cdot e^x} = 0$

$\boxed{y=0}$ A.H. por la izqda

$f(x) - b = \dfrac{e^x}{x} \to 0^-$ $(x\to -\infty)$

$\not\exists$ A.O.: $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$

$m = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \infty$

- Ptos de corte con los ejes:

$x=0 \Rightarrow \not\exists f(0)$ $0 \notin \mathrm{Dom} f$.

$y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{e^x}{x} \Rightarrow 0 = e^x$ no tiene solución

No corta a los ejes.

- monotonía y Extremos relativos.

$f'(x) = \dfrac{e^x x - e^x}{x^2}$; $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ $x \neq 0$

$f'(x) = 0 \iff e^x(x-1) = 0$

$e^x = 0$; sin solución

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ pto singular

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	$-$	$\not\exists$	$-$	$+$
f	↘	$\not\exists$	↘	↗

- f estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0,1)$
- f estrictamente creciente en $(1, +\infty)$
- f tiene un mínimo relativo en $x=1$, $P(1, f(1)) = (1, e)$

- Curvatura y puntos de inflexión.

$f''(x) = \dfrac{[e^x(x-1) + e^x \cdot (1)]x^2 - e^x(x-1)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x^2 e^x - 2e^x(x-1)}{x^3}$

$f''(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 2(x-1))}{x^3} = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$

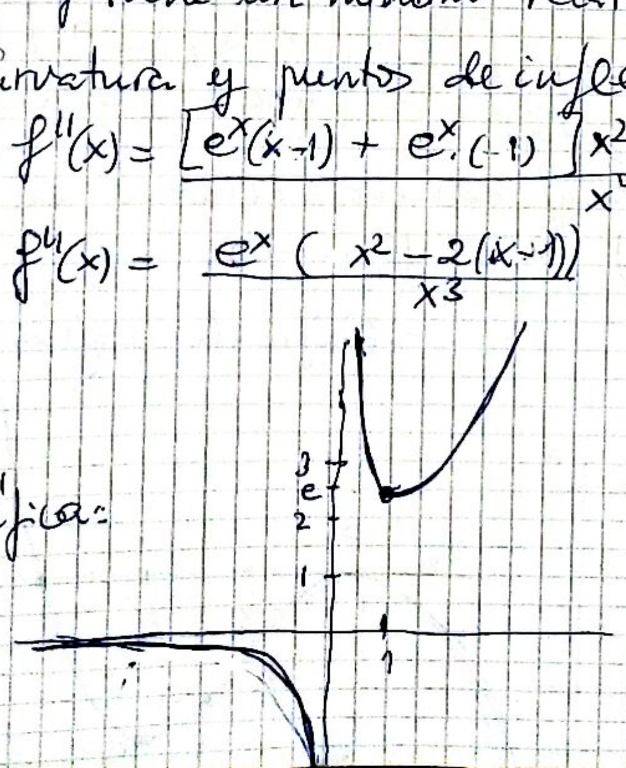
$f''(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$

No hay ptos de inflexión

$x^2 - 2x + 2 = 0$ $\not\exists$

	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	$\not\exists$	$+$
f	∩	$\not\exists$	∪
	cóncava		convexa

- Gráfica:



- Ejemplo 3: $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$
  - Dominio $= \mathbb{R}$.
  - Continua en todo $\mathbb{R}$
  - No simétrica
  - No periódica
  - Ptos de corte con ejes: Si $x=0 \Rightarrow y=-1$ $(0,-1)$
    Si $y=0 \Rightarrow x^3+x^2-x-1=0$
    $(x-1)^2(x+1)=0$ $\begin{cases}(1,0)\\(-1,0)\end{cases}$
  - Asíntotas:
    $\nexists$ A. Verticales
    $\nexists$ A. Horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ / $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
    $\nexists$ A. Oblicuas. (dos ramas infinitas parabólicas)
  - Monotonía y extremos:
    $f'(x) = 3x^2+2x-1$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x-1=0$,
    $x=-1$ y $x=\frac{1}{3}$

	$-\infty$ … -1	-1 … $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ … $+\infty$
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

- f estrict. creciente en $(-\infty,-1)$ y $(\frac{1}{3},+\infty)$
- f estrict. decreciente en $(-1,\frac{1}{3})$
- $x=-1$ MÁX. RELATIVO $P(-1,0)$
- $x=\frac{1}{3}$ MÍN. RELATIVO $Q\left(\frac{1}{3},\frac{-32}{27}\right)$

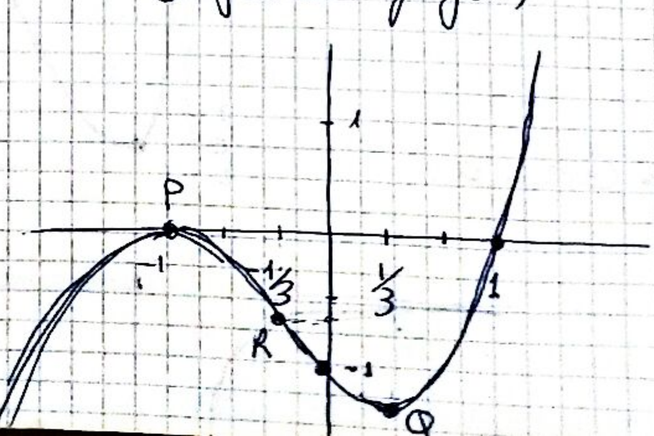
$\frac{-32}{27} \simeq -1'19$

- Curvatura y ptos de inflexión:
  $f''(x) = 6x+2$
  $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

	$-\infty$ … $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ … $+\infty$
f''	−	+
f	∩	∪
	cóncava	convexa

- f cóncava en $(-\infty,-\frac{1}{3})$
- f convexa en $(-\frac{1}{3},+\infty)$
- f presenta un P. Inf. cóncavo-convexo en $x=-\frac{1}{3}$
  $R\left(-\frac{1}{3},\frac{-16}{27}\right)$ $\quad \frac{-16}{27} \simeq -0'59$

- Tabla de valores
- Gráfica de $y=f(x)$



• Ejemplo 6: $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}$

- Dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$. Continua
- No periódica
- No simétrica
- Ptos corte con ejes: $\cancel{\text{f(x)=x}}$ si $x=0 \notin Dom f$

si $y=0$; $0=x^3+4$; $x=\sqrt[3]{-4}$ $(\sqrt[3]{-4},0)$ $-1'59$

- Asíntotas:

A. Vertical: $\boxed{x=0}$ $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4}{x^2}=\left(\frac{4}{0}\right)$ → $\lim_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$

∄ A. Horizontal: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

A. Oblicua: $\boxed{y=x}$ $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1$

$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^2}-x$

$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}=0$

Posición:

$\frac{x^3+4}{x^2}-x=\frac{4}{x^2}\to 0^+$

siempre por encima.

- Monotonía y extremos

$f'(x)=\frac{3x^2\cdot x^2-(x^3+4)x^2}{x^4}$; $f'(x)=\frac{x^3-8}{x^3}$

$f'(x)=0 \iff x^3-8=0$, $x=\sqrt[3]{8}$; $x=2$ pto singular

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	+	∄ −		+
f	↗	∄ ↘		↗

- f estrict. creciente en $(-\infty,0)$ y $(2,+\infty)$
- f estrict. decreciente en $(0,2)$
- f presenta un MÍNIMO RELATIVO en $x=2$; $(2,3)$ mínimo R.

- Curvatura y P. I.

$f''(x)=\frac{24x^2}{x^6}=\frac{24}{x^4}$

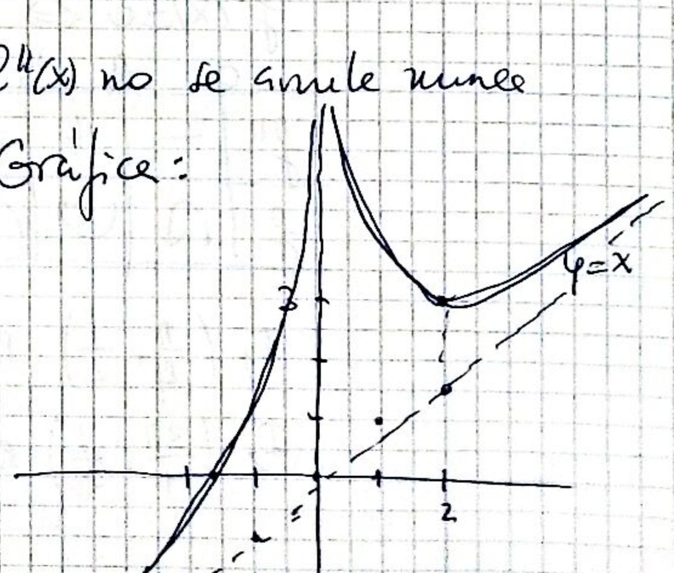
	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+		−
f	∪		∪

f siempre es convexa

f no posee P. I.

• $f''(x)$ no se anula nunca

- Gráfica:



• Ejemplo 7: $y = \cos^2 x$

— $Dom f = \mathbb{R}$

— Es periódica de período π: $f(x+\pi) = f(x)$
por ser $\cos(x+\pi) = -\cos x$

$$f(x+\pi) = \cos^2(x+\pi) = (\cos(x+\pi))^2 = (-\cos x)^2 = \cos^2 x = f(x)$$

Como $T = \pi$ la estudiamos solo en $[0,\pi]$

— Continua en $\mathbb{R}$.

— Siempre positiva. $Im f = [0,1]$

— Ptos de corte:

$x=0 \Rightarrow f(0) = (\cos 0)^2 = 1$ $(0,1)$

$y=0 \Rightarrow 0 = \cos^2 x$; $0 = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ $(\frac{\pi}{2}, 0)$

— No existen asíntotas:

$\lim_{x\to\infty} \cos^2 x = \nexists$ $\nexists$ A.H., $\nexists$ A.V.

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x}{x} = 0$ $\nexists$ A.O.

— Monotonía y extremos

$f'(x) = -2\cos x \cdot \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x$

$2x=0$; $2x=\pi$; $2x=2\pi$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2x = 0 \Leftrightarrow x=0,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$

	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'		$-$		$+$	
f		↘		↗	

• $x=\frac{\pi}{2}$ es un mínimo rel. $(\frac{\pi}{2}, 0)$

• f decrece en $(0,\frac{\pi}{2})$

• f crece en $(\frac{\pi}{2},\pi)$

— Curvatura y P.I.

$f''(x) = -2\cos 2x$

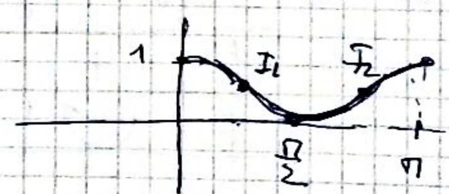
$f''(x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ó $x = \frac{3\pi}{4}$

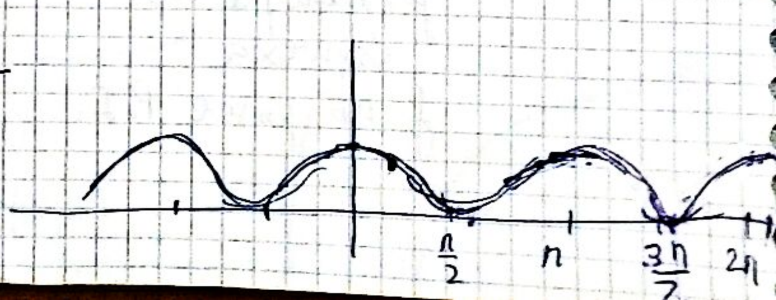
	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f''		$-$		$+$		$-$	
f		∩		∪		∩	

$I_1\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ P.I. cóncavo-convexo

$I_2\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ P.I. convexo-cóncavo

— Gráfica en $[0,\pi]$

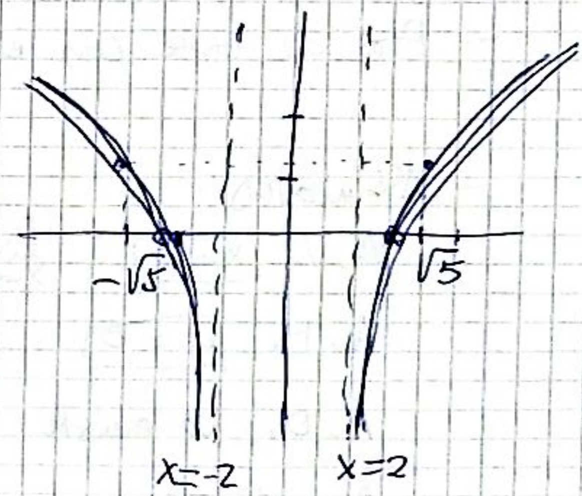




Otras representaciones
Solucionario Editex

- $f(x) = \ln(x^2-4)$
- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
- $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
- $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$
- $f(x) = \ln\sqrt{x^2-1}$
- $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$
- $f(x) = \frac{2x}{x^2+2}$
- $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

— Gráfica de $y = \ln(x^2-4)$



x	-4	-3	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	3	4
y	2'48	1'61	0	0	1'61	2'48

- Ejemplo 8: $y = \ln(x^2-4)$

— $\text{Dom}f = (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ Continua
— No periódica
— Simetría par: $f(x) = f(-x)$
— Puntos de corte con ejes: $x=0 \notin \text{Dom}f$

$y=0 \Rightarrow 0 = \ln(x^2-4)$

$1 = x^2-4$; $x = \pm\sqrt{5} \simeq 2'$

$(-\sqrt{5},0)$, $(\sqrt{5},0)$

— Asíntotas:

$\boxed{x=-2}$ A.V. $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

$\boxed{x=2}$ A.V. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

$\nexists$ A.H. $\lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2-4) = +\infty$

$\nexists$ A.O. $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x^2-4)}{x} = 0$

— Monotonía y extremos relativos:

$f'(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \notin \text{Dom}f$.
No hay extremos relativos

	$-\infty$ a -2	-2 a 2	2 a $+\infty$
f'	$-$	$\nexists$	$+$
f	↘	$\nexists$	↗

— Curvatura y ptos de inflexión:

$f''(x) = \frac{2(x^2-4) - 2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2-8-4x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2}$ $\nexists$ P.I.

	$-\infty$ a -2	-2 a 2	2 a $+\infty$
f''	$-$	$\nexists$	$-$
f	∩	$\nexists$	∩

Es siempre cóncava, sin P.I.

- Ejemplo 9: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

- $\text{Dom} f = (0, +\infty)$
- No hay simetría ni periodicidad
- Ptos de corte con ejes: $x=0 \notin \text{Dom} f \Rightarrow$ No corta al eje Y

  $y=0 \Rightarrow 0 = \frac{\ln x}{x}$; $0 = \ln x$; $x = e^0$

  $P(1,0)$

- Asíntotas:

  A.V. $\boxed{x=0}$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$

  A.H. $\boxed{y=0}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$

  A.O. No existe $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

  Posición: $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[\text{si } x \to +\infty]{} 0^+$ f por encima.

- Monotonía y extremos:

  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x \cdot 1}{x^2}$ $\qquad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

  $f'(x) = 0$; $1 = \ln x$; $x = e$

	0	e	$+\infty$
f'	$+$	$-$	
f	↗	↘	

  $M(e, f(e)) = (e, e^{-1}) = \left(e, \frac{1}{e}\right) \simeq$
  $\simeq (2'7, 0'37)$ es un máximo.

- Curvatura y puntos de inflexión

  $f''(x) = \frac{(1-\ln x)' x^2 - (1-\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x} x^2 - 2x + 2x \ln x}{x^4}$

  $f''(x) = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4}$

  $f''(x) = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$

  $f''(x) = 0$; $+3 = 2 \ln x$

  $\frac{3}{2} = \ln x$

  $x = e^{3/2}$

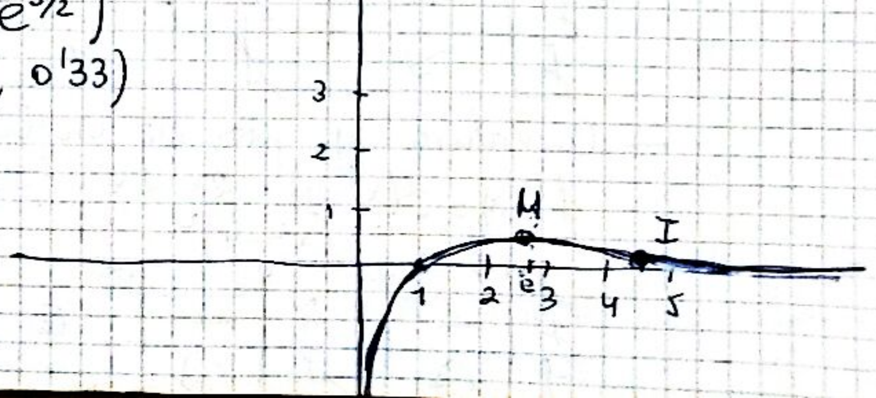
	0	$e^{3/2}$	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	∩	∪	

  $x = e^{3/2}$ es p. inflexión

  P.I. $\left(e^{3/2}, \frac{3/2}{e^{3/2}}\right)$

  $= \left(e^{3/2}, \frac{3}{2e^{3/2}}\right) \simeq$

  $\simeq (4'48, 0'33)$



a) $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$

- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$
- Ptos corte $(0,0)$
- A.V. $\nexists$

  A.H. ~~$\nexists$~~ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\quad y=0$ A.H. por izqda.

- $f'(x) = 4xe^x + 2x^2e^x = 2xe^x(2+x)$

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^x(2+x) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$

	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … $+\infty$
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

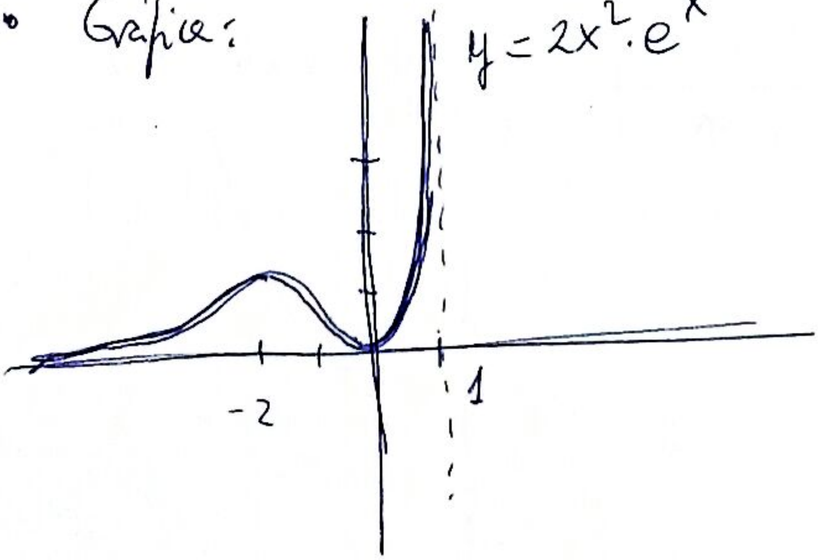
$\begin{cases} x=-2 & \text{MÁXIMO REL.} \\ x=0 & \text{MÍNIMO REL} \end{cases}$

- $f''(x) = 2e^x(2+4x+x^2)$

  $\left.\begin{array}{l} x_1 = -2-\sqrt{2} \\ x_2 = -2+\sqrt{2} \end{array}\right\}$ posibles P.I.

	$-\infty$ … x_1	x_1 … x_2	x_2 … $+\infty$
f'	+	−	+
f	∪	∩	∪

- Gráfica:



b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

- $\text{Dom} f = (0,1) \cup (1,+\infty)$
- Ptos corte (no tiene)
- Asíntotas A.V. $x=1$

A.H. $\nexists$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

A.O. $\nexists$

- $f'(x) = \dfrac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

$f'(x) = 0 \to x = 0 \notin \text{Dom} f.$

$ \to x = \sqrt{e}$

	0	1		$\sqrt{e}$	$+\infty$
f'	$-$	$\nexists$	$-$	$+$	
f	↘	$\nexists$	↘	↗	

$x = \sqrt{e}$ mínimo relativo (no absoluto)

- $f''(x) = \dfrac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{(\ln x)^3}$ No se anula nunca.

	0	1	$+\infty$
f'	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

No existen P.I.