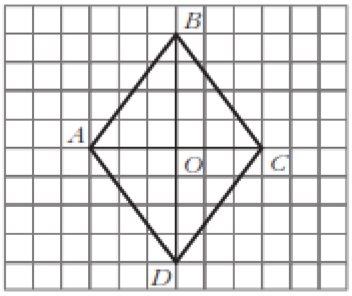
EJERCICIOS RESUELTOS GEOMETRÍA EN EL PLANO – HOJA I

Cuestión 1:

Observa el rombo de la figura y calcula:



a) $\vec{AB} + \vec{BC}$ **b)** $\vec{OB} + \vec{OC}$

c) $\vec{OA} + \vec{OD}$ **d)** $\vec{AB} + \vec{CD}$

e) $\vec{AB} + \vec{AD}$ **f)** $\vec{DB} - \vec{CA}$

Expresa los resultados utilizando los vértices del rombo.

a) $\vec{AC}$ b) $\vec{AB} = \vec{DC}$

c) $\vec{BA} = \vec{CD}$ d) $\vec{AA} = \vec{0}$

e) $\vec{AC}$ f) $2\vec{DC}$

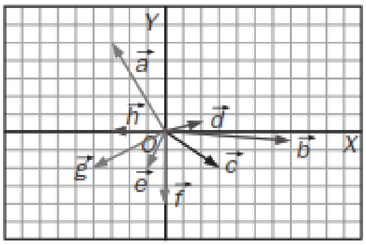
Cuestión 2:

Representa los vectores siguientes.

$\vec{a} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{e} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{g} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$

$\vec{b} = 7\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j}$ $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{i}$ $\vec{f} = -4\vec{j}$ $\vec{h} = -\vec{i} + (-2)\vec{i}$

Los vectores están representados en la figura derecha.



Cuestión 3:

Un vector libre tiene por coordenadas $\vec{u} = (-4, 1)$. Un representante suyo tiene el punto $A(2, 5)$ como origen. Halla las coordenadas del extremo.

Si $\vec{a} = (2, 5)$ y $\vec{b} = (x, y)$ son los vectores que unen el origen de coordenadas con los extremos A y B del representante del vector $\vec{u}$, se cumple que $\vec{a} + \vec{u} = \vec{b}$. Por tanto, $(2, 5) + (-4, 1) = (-2, 6) = (x, y)$, es decir, las coordenadas del extremo B son $B(-2, 6)$.

Cuestión 4:

. Un vector tiene por extremos los puntos $A(-7, 5)$ y $B(3, -2)$. Calcula las coordenadas del vector $\vec{AB}$.

Sea $\vec{a} = (-7, 5)$ y $\vec{b} = (3, -2)$. Se tiene que $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3, -2) - (-7, 5) = (10, -7)$.

Cuestión 5:

Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, siendo $\vec{a}(1, -7)$ y $\vec{u}\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$.

$$(1, -7) = 3\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right) - 2(v_1, v_2) \rightarrow \begin{cases} 1 = 5/2 - 2v_1 \rightarrow v_1 = 3/4 \\ -7 = 2 - 2v_2 \rightarrow v_2 = 9/2 \end{cases}$$

$$\vec{v}\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{2}\right)$$

Cuestión 6:

Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

$$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \rightarrow \begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

Despejando en la primera ecuación $n = 3m$ y sustituyendo en la segunda:

$$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow m = \frac{-5}{4} \rightarrow n = \frac{-15}{4}$$

Cuestión 7:

Expresa el vector $\vec{a}(1, 5)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.

Calcula m y n tales que $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

$$(1, 5) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 1 = 3m + 4n \\ 5 = -2m - 1/2n \end{cases}$$

Resuelvo el sistema por reducción (por ejemplo).

Para ello, multiplico la segunda ecuación por 8 (en los dos miembros) y sumo miembro a miembro las dos:

$$\begin{array}{l} 1 = 3m + 4n \\ \underline{40 = -16m - 4n} \\ 41 = -13m \rightarrow m = \dfrac{41}{-13} \end{array}$$

Sustituyo en una de las dos ecuaciones y despejo n:

$$1 = 3m + 4n \rightarrow 1 = 3\left(\frac{-41}{13}\right) + 4n \rightarrow 1 = \frac{136}{13} + 4n \rightarrow \frac{-123}{13} = 4n$$

$$\rightarrow n = \frac{136}{52} = \frac{36}{13}$$

Así, podemos decir: $\vec{a} = -\frac{41}{13}\vec{b} - \frac{36}{13}\vec{c}$

Cuestión 8:

Hallar el simétrico del punto A(4, - 2) respecto de punto M(3, - 11).

SOL: (2,-20)

Cuestión 9:

Calcula las coordenadas de D para que el cuadrilátero de vértices: A(-1, -2), B(4, -1), C(5, 2) y D; sea un paralelogramo.

SOL: D(0,1)

Cuestión 10:

Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(5, 2)$, calcula:

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

a) Halla primero las coordenadas de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.

c) Efectúa $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Multiplica el resultado (un número) por el vector $\vec{w}$. Obtendrás un vector.

En b) obtendrás un número y en d), un vector.

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13 \end{array}\right\} \to$

$\to \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

$\vec{u}\,(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

Cuestión 11:

Calcula x, de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3, -5)$ y $\vec{b}(x, 2)$ sea igual a 7.

$(3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \to 3x - 10 = 7 \to x = \dfrac{17}{3}$

Cuestión 12: Dados los vectores $\vec{u} = (2, k)$ y $\vec{v} = (3, -2)$, calcula k para que los vectores sean:

a) Perpendiculares. SOL: k = 3

b) Paralelos. SOL: k = -4/3

c) Formen un ángulo de 60°. SOL: k = 0.99 ó 31.01

Cuestión 13:

Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \to (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \to -20 - 2k = 0 \to k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \to 25 + k^2 = 34 \to k^2 = 9 \to k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

Cuestión 14:

Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}(x, y)$, ortogonal a $\vec{u}(3, 4)$ y que mida el doble que $\vec{u}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \perp \vec{v} \to \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \to 3x + 4y = 0 \\ |\vec{v}| = 2|\vec{u}| \to \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{9 + 16} = 2\sqrt{25} = 10 \to x^2 + y^2 = 100 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema:

Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

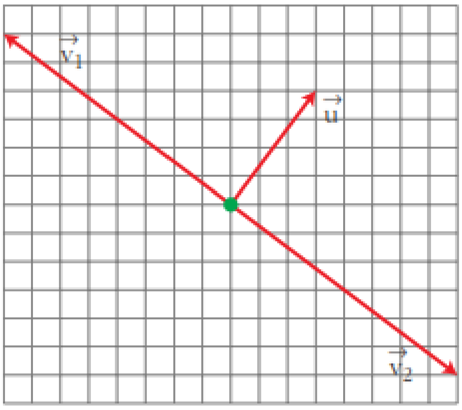
$$x = \frac{-4}{3}y \to \left(\frac{-4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \to \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \to \frac{25}{9}y^2 = 100 \to y = \pm 6$$

Si $y_1 = 6 \rightarrow x_1 = \frac{-4}{3} \cdot 6 = -8 \rightarrow \vec{v}_1\,(-8, 6)$

Si $y_2 = -6 \rightarrow x_2 = \frac{-4}{3} \cdot (-6) = 8 \rightarrow \vec{v}_2\,(8, -6)$

El problema tiene dos posibles soluciones, tales que:

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$



Cuestión 15:

Dados $\vec{a}(2, 1)$ y $\vec{b}(6, 2)$, halla un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$ y $\vec{v} \perp \vec{b}$.

$$\left.\begin{array}{l} (x, y) \cdot (2, 1) = 1 \rightarrow 2x + 2y = 1 \\ (x, y) \cdot (6, 2) = 0 \rightarrow 6x + 2y = 0 \end{array}\right\} \text{ Resolvemos el sistema:}$$

Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por (–1) y sumamos miembro a miembro:

$$\begin{array}{l} -2x - 2y = -1 \\ \;\;6x + 2y = 0 \\ \hline \;\;4x \qquad = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{4} \end{array}$$

Sustituimos en una ecuación; por ejemplo en la segunda y despejamos la otra incógnita:

$$6x + 2y = 0 \rightarrow 6 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + 2y = 0 \rightarrow 2y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$

Así, nuestro vector será: $\vec{v}\left(\frac{-1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

Cuestión 16:

Calcula el valor de m para que el vector $\vec{u} = (m, -4)$ sea unitario.

$\vec{u}$ es unitario si $|\vec{u}| = 1$. $|\vec{u}| = \sqrt{m^2 + (-4)^2} = \sqrt{m^2 + 16} = 1 \Rightarrow m^2 + 16 = 1 \Rightarrow m^2 = -15 \Rightarrow$ no existe solución real.

Cuestión 17:

Calcula un vector unitario en la misma dirección y sentido que los siguientes.

a) $\vec{u}_1 = (3, -5)$ b) $\vec{u}_2 = (-2, 4)$ c) $\vec{u}_3 = (1, -2)$

Basta multiplicar cada vector por el inverso de su módulo:

a) $|\vec{u}_1| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34} \Rightarrow$ El vector pedido es $\frac{1}{\sqrt{34}}\,\vec{u}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{-5}{\sqrt{34}}\right) = \left(\frac{3\sqrt{34}}{34}, \frac{-5\sqrt{34}}{34}\right)$

b) $|\vec{u}_2| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow$ El vector pedido es $\frac{1}{2\sqrt{5}}\,\vec{u}_2 = \left(\frac{-2}{2\sqrt{5}}, \frac{4}{2\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

c) $|\vec{u}_3| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow$ El vector pedido es $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$

Cuestión 18:

Siendo $\vec{u}(5, -b)$ y $\vec{v}(a, 2)$, halla a y b, sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y que $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \;\to\; (5, -b) \cdot (a, 2) = 0 \;\to\; 5a - 2b = 0$

Si $|\vec{v}| = \sqrt{13}$, entonces $\sqrt{a^2 + 2^2} = \sqrt{13} \;\to\; a^2 + 4 = 13$

Resolvemos el sistema:

$$a^2 + 4 = 13 \;\to\; a = \pm 3$$

Entonces: Si $a = 3 \;\to\; b = \dfrac{5a}{2} = \dfrac{15}{2}$

Si $a = -3 \;\to\; b = \dfrac{5a}{2} = \dfrac{-15}{2}$

Luego hay dos posibles soluciones: $\vec{u}\left(5, \dfrac{-15}{2}\right)$, $\vec{v}(3, 2)$

O bien: $\vec{u}\left(5, \dfrac{15}{2}\right)$, $\vec{v}(-3, 2)$

Cuestión 19:

Halla el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$ b) $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$ c) $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\dfrac{1}{2}, -3\right)$

a) Utilizamos las dos expresiones para calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + 2(-5) = -7$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Igualando las dos expresiones, se tiene:

$-7 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \;\to\; \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{-7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = -0{,}38$

Luego: $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112°\ 22'\ 48''$

b) Despejando directamente en la definición:

$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) \;\to$

$\to\; \cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{4 \cdot 3 + 6 \cdot (-2)}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = \dfrac{0}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = 0$

de donde: $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 90°$ (basta con ver que $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$)

c) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{-1/2 - 18}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{37/2}} = \dfrac{-37/2}{\left(37\sqrt{2}\right)/2} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Luego: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135°$

Cuestión 20:

Dado el vector $\vec{u}(6, -8)$, determina:

a) Los vectores unitarios (módulo 1) de la misma dirección que $\vec{u}$.

b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$.

c) Los vectores unitarios y ortogonales a $\vec{u}$.

a) Si $\vec{v}$ tiene la misma dirección que $\vec{u}$, entonces:

O bien $\widehat{(\vec{u}, \vec{v}_1)} = 0°$

O bien $\widehat{(\vec{u}, \vec{v}_2)} = 180°$

- En el primer caso, si el ángulo que foman es 0°, entonces:

  $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 6x - 8y = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos 0° \rightarrow$

  $\rightarrow 6x - 8y = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10 \rightarrow 6x - 8y = 10$

- Por otro lado, como $|\vec{v}_1| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$

  Resolvemos el sistema:

$$x = \frac{10 + 8y}{6} = \frac{5 + 4y}{3}$$

  que, sustituyendo en la segunda ecuación, queda:

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \frac{25 + 16y^2 + 40y}{9} + y^2 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25 + 16y^2 + 40y + 9y^2 = 9 \rightarrow 25y^2 + 40y + 16 = 0$$

$$y = \frac{-40 \pm \sqrt{1\,600 - 1\,600}}{50} = \frac{-4}{5}$$

Calculemos ahora x:

$$x = \frac{5 + 4y}{3} = \frac{5 + 4 \cdot (-4/5)}{3} = \frac{3}{5}$$

Así: $\vec{v}_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$

- En el segundo caso, es decir, si $\widehat{(\vec{u}, \vec{v}_2)} = 180°$, entonces debe ocurrir que $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_1$ formen 180°, es decir, que sean opuestos.

Luego: $\vec{v}_2\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

b) $\vec{v} \perp \vec{u} \rightarrow (x, y) \cdot (6, -8) = 0 \rightarrow 6x - 8y = 0 \rightarrow x = \frac{8y}{6} = \frac{4}{3}y$

$|\vec{v}| = |\vec{u}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 = 100$

$\left(\frac{4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 100 \rightarrow y^2 = 36 \rightarrow y = \pm 6$

- Si $y_1 = 6 \rightarrow x_1 = \frac{4}{3}6 = 8 \rightarrow \vec{v}_1\,(8, 6)$
- Si $y_2 = -6 \rightarrow x_2 = -8 \rightarrow \vec{v}_2\,(-8, -6)$

c) $\left.\begin{array}{l} |\vec{v}| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow 6x - 8y = 0 \rightarrow x = \frac{8y}{6} = \frac{4y}{3} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left(\frac{4y}{3}\right)^2 + y^2 = 1 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 1 \rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 1 \rightarrow y^2 = \frac{25}{9} \rightarrow y = \pm\frac{3}{5}$

- Si $y_1 = \frac{3}{5} \rightarrow x_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$
- Si $y_2 = \frac{-3}{5} \rightarrow x_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{-4}{5}$

Así, $\vec{v}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\vec{v}_2\left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$

Cuestión 21:

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.

☛ ***Escribe las coordenadas de $(\vec{a} + \vec{b})$ y $(\vec{a} - \vec{b})$.***
Si $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, entonces $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Obtendrás una ecuación cuya incógnita es k.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = 2(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6) \\ \vec{b} = -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15) \end{array}\right.$$

Ahora, como el producto escalar de ambos vectores debe ser 0, por ser ortogonales:

$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \rightarrow (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0$

$13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \rightarrow 9k^2 + 36k + 32 = 0$

$$k = \frac{-36 \pm \sqrt{1\,296 - 1\,152}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} =$$

$$= \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$$

Cuestión 22:

Dados los puntos $A(-3, 5)$, $B(4, 6)$, $C(-1, 9)$ y $D(8, 6)$:

a) Halla el módulo, el argumento y las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

b) Calcula las coordenadas de dos vectores unitarios de la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

c) Calcula las coordenadas de un vector de módulo 2 en la dirección de BC y en sentido opuesto.

a) $\overrightarrow{AB} = (4, 6) - (-3, 5) = (7, 1)$; $\quad \overrightarrow{CD} = (8, 6) - (-1, 9) = (9, -3)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ $\quad |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$\arg(\overrightarrow{AB}) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{7}\right) = 8°\ 7'\ 48{,}4''$ $\quad \arg(\overrightarrow{CD}) = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{3}{9}\right) = 341°\ 33'\ 54{,}2''$

b) Basta multiplicar $\vec{A}B$ y $\vec{C}D$ por el inverso de su módulo:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\frac{7}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{7\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{10}\right) \qquad \frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \left(\frac{9}{3\sqrt{10}}, \frac{-3}{3\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10}\right)$$

c) $\overrightarrow{BC} = (-1, 9) - (4, 6) = (-5, 3)$, y $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$. Multiplicando $\overrightarrow{BC}$ por $\frac{-2}{\sqrt{34}}$ se obtiene un vector de módulo 2 y sentido opuesto a BC:

$$\frac{-2}{\sqrt{34}}\overrightarrow{BC} = \frac{-2}{\sqrt{34}}(-5, 3) = \left(\frac{5\sqrt{34}}{17}, \frac{-3\sqrt{34}}{17}\right)$$

Cuestión 23:

a) Comprueba si el vector $\vec{u} = (-\cos a, \operatorname{sen} a)$ es unitario.

b) Elige un vector unitario y ortogonal al vector $\vec{u}$. ¿Es único?

a) $|\vec{u}| = \sqrt{(-\cos a)^2 + (\operatorname{sen} a)^2} = \sqrt{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a} = 1$. Por tanto, el vector $\vec{u}$ es unitario.

b) Un posible vector unitario y ortogonal a $\vec{u}$ es el vector $\vec{v} = (\operatorname{sen} a, \cos a)$, ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y además $|\vec{v}| = 1$.

No es el único vector que cumple las condiciones anteriores, también las cumple el vector $\vec{w} = (-\operatorname{sen} a, -\cos a)$.

Cuestión 24:

Calcula las coordenadas del vector $\vec{u}$, sabiendo que se verifica: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2$, siendo $\vec{v} = (3, -4)$ y $\vec{w} = (2, -3)$.

Sea $\vec{u} = (x, y)$. Del enunciado se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (x, y) \cdot (3, -4) = 3x - 4y = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \Rightarrow (x, y)\ (2, -3) = 2x - 3y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -8,\ y = -6.$$

Por tanto, el vector es $\vec{u} = (-8, -6)$.

Cuestión 25:

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (4, 3)$, halla:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$

c) El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

e) Un vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ sentido opuesto.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (4, 3) = 12 + 12 = 24$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ y $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

c) $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{24}{25} \Rightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \text{arc cos}\left(\dfrac{24}{25}\right) = 16^\circ\ 15'\ 36{,}74''$

d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{24}{5}$

e) El vector $-\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$ es unitario y tiene la dirección de $\vec{v}$ y el sentido opuesto.

Cuestión 26:

Calcula el valor de k para que el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (3, k)$ y $\vec{w} = (2, -1)$ sea:

a) 90° b) 0° c) 45° d) 60°

$\vec{u}\cdot\vec{w} = (3, k)\cdot(2, -1) = 6 - k$; $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + k^2} = \sqrt{9 + k^2}$; $|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

a) Como $(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = 90^\circ$, se tiene que $0 = \cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\,|\vec{w}|} = \dfrac{6-k}{\sqrt{9+k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow 6 - k = 0 \Rightarrow k = 6$

b) Como $(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = 0^\circ$, se tiene que $1 = \cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = \dfrac{6-k}{\sqrt{9+k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow 4k^2 - 2k - 9 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{-3\pm3\sqrt{2}}{2}$

c) Como $(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = 45^\circ$, se tiene que $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = \dfrac{6-k}{\sqrt{9+k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow 6k^2 + 48k - 54 = 0 \Rightarrow k = 1$ o $k = -9$

d) Como $(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = 60^\circ$, se tiene que $\dfrac{1}{2} = \cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = \dfrac{6-k}{\sqrt{9+k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow k^2 - 99 = 0 \Rightarrow k = \pm3\sqrt{11}$

Cuestión 27:

. **a) Halla el valor de k para que el vector $\vec{u} = (3, k)$ sea ortogonal al vector $\vec{v} = (-1, 4)$.**

b) Halla el módulo de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Halla el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Por tanto, se tiene que $(3, k)\cdot(-1, 4) = -3 + 4k = 0 \Rightarrow k = \dfrac{3}{4}$.

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$; $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

c) Como son ortogonales, $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.

Cuestión 28:

. **Halla el valor de k para que el vector $\vec{u} = (k, 2)$ sea:**

a) Unitario

b) Perpendicular al vector de coordenadas (2, 3)

a) El vector es unitario si su módulo es igual a 1. Luego:
$|\vec{u}| = \sqrt{k^2 + 4} = 1 \Rightarrow 4 + k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = -3 \Rightarrow$ no existe k real que haga el vector unitario.

b) Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0. Luego:
$(k, 2)\cdot(2, 3) = 0 \Rightarrow 6 + 2k = 0 \Rightarrow k = -3$

Cuestión 29:

Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.

☛ ***$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} = -11$. Como $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2 = 9$, calcula $|\vec{v}|$.***

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$

Como $|\vec{u}| = 3$, se tiene que:

$$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \;\rightarrow\; |\vec{v}|^2 = 20 \;\rightarrow\; |\vec{v}| = \sqrt{20}$$

Cuestión 30:

Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \perp \vec{v}$, halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$\overset{(*)}{=} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{34}$$

$^{(*)}$ $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{34}$$

Cuestión 31:

Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios.

¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

☛ ***Si*** $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0.$

Si $\vec{c} \perp \vec{d} \rightarrow \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$

$$5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios $\rightarrow |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

$$5\,|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\,|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \rightarrow |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-1}{2} \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$$

Cuestión 32:

Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45°.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos 45° \rightarrow$$

$$7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$14 + 2x = \sqrt{100(1 + x^2)} \rightarrow \frac{14 + 2x}{10} = \sqrt{1 + x^2} \rightarrow$$

$$\frac{7 + x}{5} = \sqrt{1 + x^2} \rightarrow \frac{49 + x^2 + 14x}{25} = 1 + x^2 \rightarrow$$

$$49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \rightarrow 24x^2 - 14x - 24 = 0 \rightarrow$$

$$12x^2 - 7x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$$

Cuestión 33:

Halla las coordenadas de cierto vector $\vec{x}$, sabiendo que forma un ángulo de 60° con $\vec{a}(2, 4)$ y que los módulos de ambos son iguales.

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}| = \sqrt{20} = |\vec{x}| \\ \text{Sea } \vec{x}(m, n) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}|\,|\vec{x}|\,\cos 60° \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2m + 4n = \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} \cdot \dfrac{1}{2} \rightarrow 2m + 4n = 10 \\ \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{20} \rightarrow m^2 + n^2 = 20 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$m = \frac{10 - 4n}{2} = 5 - 2n$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$(5 - 2n)^2 + n^2 = 20 \rightarrow 25 + 4n^2 - 20n + n^2 = 20 \rightarrow n^2 - 4n + 1 = 0$

$$n = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \begin{cases} n_1 = 0{,}27 \\ n_2 = 3{,}73 \end{cases}$$

- Si $n_1 = 0{,}27 \rightarrow m_1 = 5 - 2 \cdot 0{,}27 = 4{,}46 \rightarrow \vec{x}_1 = (4{,}46;\ 0{,}27)$
- Si $n_2 = 3{,}73 \rightarrow m_2 = 5 - 2 \cdot 3{,}73 = -2{,}46 \rightarrow \vec{x}_2 = (-2{,}46;\ 3{,}73)$

Cuestión 34:

Dados los vectores $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(6, 4)$, halla la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

☛ ***Sabes que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot$ proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.***

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot$ (proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$)

$$(\text{proy. de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{6 + 12}{\sqrt{10}} = \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{18\sqrt{10}}{10} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

Cuestión 35:

Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sabiendo que se verifican las siguientes condiciones:

$|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 7$

Sea α el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por el teorema del coseno:

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos \alpha \Rightarrow 7^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos \alpha \Rightarrow 49 = 16 + 36 - 48 \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 = -48 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{1}{16} \Rightarrow \alpha = 86^\circ\ 25'\ 0{,}04''$

Cuestión 36:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $\vec{u} = 9$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 17$. Calcula el módulo del vector $\vec{v}$.

Se tiene que $(\vec{u} + \vec{v})\,(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2} = 17$. Por tanto, $|\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 17 = 9^2 - 17 = 64$.

En consecuencia, $|\vec{v}| = \sqrt{64} = 8$

Cuestión 37:

Dado el triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(5, 2)$ y $C(7, 9)$:

a) Halla la medida de los lados.

b) Halla la medida de los ángulos.

a) Medida de los lados:

Lado $AB = |\overrightarrow{AB}| = |(5, 2) - (2, 3)| = |(3, -1)| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Lado $BC = |\overrightarrow{BC}| = |(7, 9) - (5, 2)| = |(2, 7)| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$

Lado $CA = |\overrightarrow{CA}| = |(2, 3) - (7, 9)| = |(-5, -6)| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$

b) Medida de los ángulos:

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (-3,\ 1)$; $\overrightarrow{BC} = (7,\ 9) - (5,\ 2) = (2,\ 7)$

$$\cos\alpha = \cos(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\ |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-6+7}{\sqrt{10}\sqrt{53}} = -\frac{1}{\sqrt{530}} \Rightarrow \alpha = 87^\circ\ 30'\ 37{,}61''$$

$\overrightarrow{AB} = (3,\ -1)$; $\overrightarrow{AC} = (7,\ 9) - (2,\ 3) = (5,\ 6)$

$$\cos\beta = \cos(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AC}|} = \frac{15-6}{\sqrt{10}\sqrt{61}} = \frac{9}{\sqrt{610}} \Rightarrow \beta = 68^\circ\ 37'\ 45{,}76''$$

$\gamma = 180^\circ - 87^\circ\ 30'\ 37{,}61'' - 68^\circ\ 37'\ 45{,}76'' = 23^\circ\ 51'\ 36{,}63''$

Cuestión 38:

Si $M_1(2,\ 1),\ M_2(3,\ 3)\ y\ M_3(6,\ 2)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo?

SOL: $A(7,\ 4), B(5,\ 0), C(-1,\ 2)$

Cuestión 39:

Dados los puntos $A(-3,\ 5)$ y $B(3,\ 2)$ calcular las coordenadas del punto del segmento AB cuya distancia a A es el doble de su distancia a B .

SOL: $C(1,3)$

Cuestión 40:

Dados los puntos A (2,1); B (6,3); C (7,1) y D (3,-1). Demostrar que el polígono ABCD es rectángulo y calcula su perímetro y su área. Sol: $P=6\sqrt{5}$; $A=10$

Cuestión 41:

Halla un vector unitario de misma dirección y distinto sentido que (4,-3). Sol: (-4/5,3/5)

Cuestión 42:

Escribe vectores ortogonales al vector (-3,1) tales que: a) Su primera componente sea 2; b) Que su segunda componente sea 4; c) Que sea unitario. Sol: a) (2,6); b) (4/3,4); c) $(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$

Cuestión 43:

Si A, B y C están alineados calcular "m":

a) A(m,-1), B(2,5) y C(-1,3) Sol. m=-7

b) A(-4,1), B(1,m) y C(-2,6) Sol. m=27/2

c) A(1,1), B(-4,2) y C(m,3) Sol. m=-9

Cuestión 44:

Averiguar si A, B y C están o no alineados:

a) A(-3,5), B(4,2) y C(10,-1) Sol. no

b) A(-8,11), B(1,-1) y C(4,-5) Sol. si

c) A(-2,-9), B(0,1) y C(4,20) Sol. no

d) A(0,-5), B(7,-2) y C(21,4) Sol. si

Cuestión 45:

Dados los vectores $\vec{u}(-1,4)$ y $\vec{v}(2,3)$ hallar el ángulo $\angle(\vec{u},\vec{v})$. Sol. α=47º43'34''

Cuestión 46:

Hallar "k" sabiendo que $|\vec{a}| = 3$ y $\vec{a}(2, k)$. Sol. $k = \pm\sqrt{5}$

Cuestión 47:

Siendo A(-5,-7) y B(1,5), dividimos el segmento en :

a) Tres partes iguales. Sol. (-3, -3) y (-1, 1)

b) Cuatro partes iguales Sol. (-7/2, -4), (-2, -1) y (-1/2, 2)

Cuestión 48:

Los puntos A(2,1), B(4,-1), C(0,4) y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo. Hallar D. Sol. D(-2,6)

Cuestión 49:

Los puntos A(1,1) y B(3,3) son dos vértices consecutivos de un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en el punto M(5,2). Hallar los dos vértices restantes. Sol. C(9,3) y D(7,1)

Cuestión 50:

Los cuatro vértices consecutivos de un paralelogramos son A(-1,3), B, C(7,4) y D. Siendo M(1,2) el punto medio del lado AB. Hallar B y D. Sol. B(3,1) y D(3,6)

Cuestión 51:

1. Determinar si los vectores $\overrightarrow{AB} = (35, -21)$ y $\overrightarrow{CD} = (-10, 6)$ tienen la misma dirección. Calcular el módulo de ambos vectores.

Solución

Para determinar si dos vectores tienen la misma dirección basta comprobar si sus componentes son proporcionales.

El cociente de las primeras componentes es $\frac{35}{-10} = \frac{7}{-2}$ y el de las segundas $\frac{-21}{6} = \frac{-7}{2}$, por tanto los vectores tienen la misma dirección.

El módulo de los vectores es:

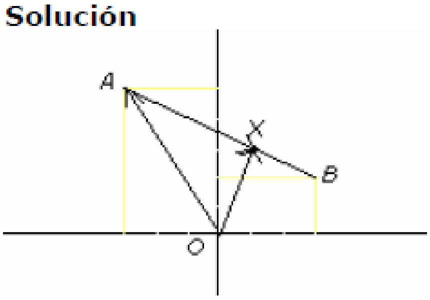
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{35^2 + (-21)^2} = \sqrt{1225 + 441} = \sqrt{1666}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-10)^2 + 6^2} = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136} = \sqrt{4 \cdot 34} = 2\sqrt{34}$$

Cuestión 52:

6. Dados los puntos $A = (-3, 5)$ y $B = (3, 2)$ calcular las coordenadas del punto del segmento $\overline{AB}$ cuya distancia a A es el doble de su distancia a B.

Solución



En la figura se observa que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$.

Teniendo en cuenta que la distancia de X a A es el doble que la de X a B se tiene $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Por tanto, $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ y como $\overrightarrow{AB} = (3-(-3), 2 - 5) = (6, -3)$, sustituyendo queda $\overrightarrow{OX} = (-3, 5) + \frac{2}{3}(6, -3) = (1, 3)$.

Por tanto, las coordenadas buscadas son (1, 3)